

連立Euler-Poisson-Darboux方程式の対称性

三澤, 彰宏
立教大学大学院理学研究科

笥, 三郎
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/23477>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (31), pp.202-207, 2012-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 31 (pp. 202 - 207)

連立 Euler-Poisson-Darboux 方程式 の対称性

三澤 彰宏 (MISAWA Akihiro), 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

(Received 24 January 2012; accepted 2 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

連立 Euler-Poisson-Darboux 方程式の対称性

立教大学大学院 三澤彰宏 (MISAWA, Akihiro)

立教大学理学部 筧 三郎 (KAKEI, Saburo)

概要 ある種の双曲型偏微分方程式である Euler-Poisson-Darboux 方程式が $\mathfrak{sl}_2$ 対称性を持つことは良く知られている。本研究では、1つの拡張として連立型 Euler-Poisson-Darboux 方程式を考察し、その対称性を議論する。

1 はじめに

Euler-Poisson-Darboux 方程式 (以下では EPD 方程式と略す)

$$L(\alpha, \beta)u(x, y) = 0, \quad L(\alpha, \beta) := \partial_x \partial_y - \frac{\alpha - \beta}{x - y} \partial_x + \frac{\alpha(\beta - 1)}{(x - y)^2} \partial_y \quad (1.1)$$

は、数学と物理学の様々な領域に現れる重要な方程式である [1]。物理学では、音の伝播 [2] や重力波の衝突 [3] などで現れることが知られている。数学では、特に特殊関数 [4, 5, 6, 7] や曲面論 [8, 9] の研究で重要である。事実として、この方程式の相似簡約を考えると Gauss の超幾何微分方程式が得られる。また、Miller の対称性や Laplace 列、2次元戸田格子と関係していることが知られている [4, 9]。

(1.1) の $L(\alpha, \beta)$ に対して $(x - y)^{-\alpha}$ による共役変換を行うと、

$$E(\alpha, \beta) := (x - y)^\alpha \circ L(\alpha, \beta) \circ (x - y)^{-\alpha} = \partial_x \partial_y - \frac{\beta}{x - y} \partial_x + \frac{\alpha}{x - y} \partial_y \quad (1.2)$$

が得られる。本稿では、この $E(\alpha, \beta)$ に関する方程式

$$E(\alpha, \beta)u = \left\{ \partial_x \partial_y - \frac{\beta}{x - y} \partial_x + \frac{\alpha}{x - y} \partial_y \right\} u = 0 \quad (1.3)$$

も“Euler-Poisson-Darboux 方程式”と呼ぶことにする。この方程式の対称性について論じることが、本稿の目的である。

文献 [4, 9] では EPD 方程式 (1.3) の持つ、2種類の対称性について述べられている。すなわち、EPD 方程式 (1.3) の解に作用する変換には2種類あり、ひとつは $\mathfrak{sl}_2$ 対称性、そしてもうひとつは隣接関係を与える昇降作用素である。EPD 方程式 (1.3) がなぜそのような対称性を持つかということは、必ずしも自明ではないが、本稿では、天下りの的に与えられている2つの対称性を自然な形で再構成する。そのために、まず次節では EPD 方程式について、文献 [4, 9] を基に知られていることをまとめておく。

2 EPD 方程式の解の変換

2.1 $\mathfrak{sl}_2$ 対称性

次の命題は、EPD 方程式の解に対する $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2$ の作用を定めている ([8] §349, [10])¹

¹ここでは [11] による引用に従った。文献 [4, 9] では、Appell による結果とされている。

命題 1 $v(x, y)$ が $E(\alpha, \beta)v(x, y) = 0$ を満たすならば,

$$\tilde{v}(x, y) = (bx + d)^{-\alpha} (by + d)^{-\beta} v\left(\frac{ax + c}{bx + d}, \frac{ay + c}{by + d}\right) \quad (2.1)$$

で定義される $\tilde{v}(x, y)$ も $E(\alpha, \beta)\tilde{v}(x, y) = 0$ を満たす.

対応する無限小変換は

$$X := -x^2 \partial_x - y^2 \partial_y - \alpha x - \beta y, \quad Y := \partial_x + \partial_y, \quad W := 2x \partial_x + 2y \partial_y + \alpha + \beta \quad (2.2)$$

で与えられ, これらは $\mathfrak{sl}_2$ の交換関係を満たす:

$$[W, X] = 2X, \quad [W, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = W. \quad (2.3)$$

2.2 昇降作用素

2 つの微分作用素 $H(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta)$ を次で定める:

$$H(\alpha, \beta) := (x - y) \partial_y - \beta, \quad B(\alpha, \beta) := \frac{1}{\alpha(\beta - 1)} \{(y - x) \partial_x - \alpha\}. \quad (2.4)$$

命題 2 $v(x, y)$ が $E(\alpha, \beta)v(x, y) = 0$ を満たすとき,

$$v_+(x, y) := H(\alpha, \beta)v(x, y), \quad v_-(x, y) := B(\alpha, \beta)v(x, y), \quad (2.5)$$

は次を満たす:

$$E(\alpha - 1, \beta + 1)v_+(x, y) = 0, \quad E(\alpha + 1, \beta - 1)v_-(x, y) = 0. \quad (2.6)$$

命題 1, 2 は, やや天下りの印象を受ける. そこで以下では, 2 つの対称性の導出に自然な解釈を与え, 連立 EPD 方程式に拡張する.

3 超双曲型方程式との関係

先の結果は EPD 方程式を超双曲型方程式,

$$\square u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \square := \partial_1 \partial_4 - \partial_2 \partial_3, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

の $\mathfrak{gl}_4$ 対称性と関連付けることで理解することができる (cf. [5, 6, 7]). そのためにまず次の空間を考える.

$$Z = GL(2) \setminus \{z \in Mat(2, 4) \mid \text{すべての } 2 \text{ 次小行列式} \neq 0\} \quad (3.2)$$

実は,

$$Z \ni z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 & z_5 & z_7 \\ z_2 & z_4 & z_6 & z_8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} =: x \quad (3.3)$$

に対する右 $GL(4)$ 作用から, 超双曲型方程式 $\square u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ の対称性を導出することができる [5, 6, 7]. たとえば, E_{ij} を行列単位として,

$$x \mapsto xe^{E_{ij}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_3 \\ 0 & 1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_4 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

を考えると, $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ が方程式 (3.1) の解ならば, (適当な因子) $\times u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ も (3.1) の解となる.

E_{ij} に対応する無限小変換を X_{ij} と表すことにして, 具体的に計算すると以下を得る:²

$$\begin{aligned} X_{11} &= -(x_1\partial_1 + x_3\partial_3), & X_{12} &= -(x_2\partial_1 + x_4\partial_3), & X_{21} &= -(x_1\partial_2 + x_3\partial_4), & X_{22} &= -(x_2\partial_2 + x_4\partial_4), \\ X_{33} &= -(x_1\partial_1 + x_2\partial_2), & X_{34} &= -(x_1\partial_3 + x_2\partial_4), & X_{43} &= -(x_2\partial_1 + x_4\partial_3), & X_{44} &= -(x_3\partial_3 + x_4\partial_4). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで, 方程式 (3.1) の解 $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ として,

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} v(\xi, \eta), \quad \xi = \frac{x_2}{x_1}, \quad \eta = \frac{x_4}{x_3} \quad (3.6)$$

という形のものに着目する. この形の $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は,

$$X_{33}u = -\alpha u, \quad X_{44}u = -\beta u \quad (3.7)$$

を満たすことを注意しておく. このとき (3.6) の $v(\xi, \eta)$ は, EPD 方程式

$$\left(\partial_\xi \partial_\eta - \frac{\beta}{\xi - \eta} \partial_\xi + \frac{\alpha}{\xi - \eta} \partial_\eta \right) v(\xi, \eta) = 0 \quad (3.8)$$

を満たすことが示される.

さらにこの過程で, 超双曲型方程式 (3.1) の対称性 X_{ij} が EPD 方程式 (3.8) の対称性に落ちる. 特に, (2.2) の X, Y, W は, $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ から得られる:

$$(X_{11} - X_{22})u = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} (Wv), \quad X_{12}u = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} (Xv), \quad X_{21}u = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} (Yv). \quad (3.9)$$

また, H, B は X_{34}, X_{43} から得られる:

$$X_{34}u = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} (Hv), \quad X_{43}u = (\text{定数}) \cdot x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} (Bv). \quad (3.10)$$

4 連立 EPD 方程式

前節の議論では,

$$Z = GL(2) \setminus \{z \in Mat(2, 4) \mid \text{すべての 2 次行列式} \neq 0\}$$

を基に考えた. これを,

$$Z = GL(2) \setminus \{z \in Mat(2, 5) \mid \text{すべての 2 次行列式} \neq 0\}$$

に変更することで, 連立 EPD 方程式の対称性を考えることができる.

²本稿では 2 節で述べた “ $\mathfrak{sl}_2$ 対称性”, “昇降作用素” を理解することを目的とするため, 16 個の X_{ij} から (3.5) の 8 個を選んで考察を加える.

まず, 6 変数の関数 $u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ に対する連立偏微分方程式系

$$(\partial_1 \partial_4 - \partial_2 \partial_3)u(x_1, \dots, x_6) = 0, \quad (\partial_1 \partial_6 - \partial_2 \partial_5)u(x_1, \dots, x_6) = 0, \quad (\partial_3 \partial_6 - \partial_4 \partial_5)u(x_1, \dots, x_6) = 0 \quad (4.1)$$

を考える. この方程式の $\mathfrak{gl}_5$ 対称性は,

$$Z \ni x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_3 & x_5 \\ 0 & 1 & x_2 & x_4 & x_6 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

に対する右 $GL(5)$ 作用からが導かれる. たとえば, 行列単位 E_{ij} に対して,

$$x \mapsto x e^{\varepsilon E_{ij}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_5 \\ 0 & 1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_4 & \tilde{x}_6 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

とすると, $u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ が (4.1) の解ならば (適当な因子) $\times u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6)$ も方程式 (4.1) の解となる.

このとき, E_{ij} に対応する無限小変換を X_{ij} と表すことにすると, 直接の計算により以下が得られる:³

$$\begin{aligned} X_{11} &= -(x_1 \partial_1 + x_3 \partial_3 + x_5 \partial_5), & X_{12} &= -(x_2 \partial_1 + x_4 \partial_3 + x_6 \partial_5), \\ X_{21} &= -(x_1 \partial_2 + x_3 \partial_4 + x_5 \partial_6), & X_{22} &= -(x_2 \partial_2 + x_4 \partial_4 + x_6 \partial_6), \\ X_{33} &= x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2, & X_{34} &= x_1 \partial_3 + x_2 \partial_4, & X_{35} &= x_1 \partial_5 + x_2 \partial_6, \\ X_{43} &= x_3 \partial_1 + x_4 \partial_2, & X_{44} &= x_3 \partial_3 + x_4 \partial_4, & X_{45} &= x_3 \partial_5 + x_4 \partial_6, \\ X_{53} &= x_5 \partial_1 + x_6 \partial_2, & X_{54} &= x_5 \partial_3 + x_6 \partial_4, & X_{55} &= x_5 \partial_5 + x_6 \partial_6. \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで, (4.1) の解として

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} x_5^{-\gamma} v(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = \frac{x_2}{x_1}, \quad \eta = \frac{x_4}{x_3}, \quad \zeta = \frac{x_6}{x_5} \quad (4.5)$$

という形のものをとる. この形の $u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は,

$$X_{33}u = -\alpha u, \quad X_{44}u = -\beta u, \quad X_{55}u = -\gamma u \quad (4.6)$$

を満たすことを注意しておく. すると (4.5) の $v(\xi, \eta, \zeta)$ は, 次の“連立 EPD 方程式”を満たすことが分かる:

$$\begin{cases} \left(\partial_\xi \partial_\eta - \frac{\beta}{\xi - \eta} \partial_\xi + \frac{\alpha}{\xi - \eta} \partial_\eta \right) v(\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ \left(\partial_\eta \partial_\zeta - \frac{\gamma}{\eta - \zeta} \partial_\eta + \frac{\beta}{\eta - \zeta} \partial_\zeta \right) v(\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ \left(\partial_\zeta \partial_\xi - \frac{\alpha}{\zeta - \xi} \partial_\zeta + \frac{\gamma}{\zeta - \xi} \partial_\xi \right) v(\xi, \eta, \zeta) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

(以下では, 方程式系 (4.7) の解空間を $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$ で表す.) このとき, (4.1) の対称性 X_{ij} が, 連立 EPD 方程式 (4.7) の対称性に落ちる. 例えば (4.7) の持つ $\mathfrak{sl}_2$ 対称性の基底は, $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ から得られる:

$$\begin{aligned} (X_{11} - X_{22})v &= x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} x_5^{-\gamma} (2\xi \partial_\xi + 2\eta \partial_\eta + 2\zeta \partial_\zeta + \alpha + \beta + \gamma) v, \\ X_{12}v &= x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} x_5^{-\gamma} (\xi^2 \partial_\xi + \eta^2 \partial_\eta + \zeta^2 \partial_\zeta + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) v, \\ X_{21}v &= x_1^{-\alpha} x_3^{-\beta} x_5^{-\gamma} (\partial_\xi + \partial_\eta + \partial_\zeta) v. \end{aligned}$$

³本節では 2 節での“ $\mathfrak{sl}_2$ 対称性”, “昇降作用素”の自然な拡張を考察することが目的なので, 25 個の X_{ij} から (4.4) の 13 個のみを考えることにする.

このとき、微分作用素 X, Y, W を

$$\begin{cases} W := 2\xi\partial_\xi + 2\eta\partial_\eta + 2\zeta\partial_\zeta + \alpha + \beta + \gamma, \\ X := -\xi^2\partial_\xi - \eta^2\partial_\eta - \zeta^2\partial_\zeta - \alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta, \\ Y := \partial_\xi + \partial_\eta + \partial_\zeta, \end{cases} \quad (4.8)$$

によって定めると、この X, Y, W も (2.3) を満たし、 $\mathfrak{sl}_2$ の 1 つの実現を与える。

また、 $X_{34}, X_{35}, X_{43}, X_{45}, X_{53}, X_{54}$ より、昇降作用素 $H_i(\alpha, \beta, \gamma), B_i(\alpha, \beta, \gamma)$ ($i = 1, 2, 3$) が得られる：

$$\begin{cases} H_1(\alpha, \beta, \gamma) = (\xi - \eta)\partial_\eta - \beta & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha-1, \beta+1, \gamma}, \\ H_2(\alpha, \beta, \gamma) = (\eta - \zeta)\partial_\zeta - \gamma & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha, \beta-1, \gamma+1}, \\ H_3(\alpha, \beta, \gamma) = (\zeta - \xi)\partial_\xi - \alpha & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha+1, \beta, \gamma-1}, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} B_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha(\beta-1)} \{(\eta - \xi)\partial_\xi - \alpha\} & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha+1, \beta-1, \gamma}, \\ B_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\beta(\gamma-1)} \{(\zeta - \eta)\partial_\eta - \beta\} & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha, \beta+1, \gamma-1}, \\ B_3(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\gamma(\alpha-1)} \{(\xi - \zeta)\partial_\zeta - \gamma\} & : \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha-1, \beta, \gamma+1}. \end{cases} \quad (4.10)$$

次に、改めて $x := \eta/\xi, y := \zeta/\xi$ として x, y を定め、

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \xi^{-\delta} \phi(x, y) \quad (4.11)$$

が (4.7) を満たすと仮定すると、 $\phi(x, y)$ は

$$\begin{cases} [x(1-x)\partial_x\partial_x + (1-x)y\partial_x\partial_y + \{(1-\alpha+\delta) - (\beta+\delta+1)x\}\partial_x - \beta y\partial_y - \beta\delta]\phi(x, y) = 0, \\ [y(1-y)\partial_y\partial_y + (1-y)x\partial_x\partial_y + \{(1-\alpha+\delta) - (\gamma+\delta+1)y\}\partial_y - \gamma x\partial_x - \gamma\delta]\phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

を満たすことが示される。これは、2 変数超幾何関数の 1 つである “Appell’s F_1 ” が満たす微分方程式系であり [5, 6, 7, 12],

$$F_1(a, b, c, d; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a, m+n)(b, m)(c, n)}{(d, m+n)n!m!} x^m y^n \quad (4.13)$$

とするとき、 $\phi(x, y) = F_1(\delta, \beta, \gamma, 1-\alpha+\delta, x, y)$ は (4.12) を満たす。

このとき、連立 EPD 方程式の対称性を記述する作用素であった H_i, B_i ($i = 1, 2, 3$)、および x, y から、以下の微分作用素が得られる：

$$\begin{cases} \tilde{H}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (1-x)\partial_x - \beta, \\ \tilde{B}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \frac{1}{\alpha(\beta-1)} \{x(1-x)\partial_x + (1-x)y\partial_y - \delta x + \delta - \alpha\}, \\ \tilde{H}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (x-y)\partial_y - \gamma, \\ \tilde{B}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \frac{1}{\beta(\gamma-1)} \{(y-x)\partial_y - \beta\}, \\ \tilde{H}_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := y(1-y)\partial_y + (1-y)x\partial_x - \delta y + \delta - \alpha, \\ \tilde{B}_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \frac{1}{\gamma(\alpha-1)} \{(1-y)\partial_y - \gamma\}, \\ \tilde{H}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := x(1-x)\partial_x + y(1-y)\partial_y - \beta x - \gamma y - \alpha + \delta, \\ \tilde{B}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (1-x)\partial_x + (1-y)\partial_y - \delta. \end{cases} \quad (4.14)$$

これらにより, Appell の F_1 に対する隣接関係式が得られる:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= \frac{(\alpha - 1)\beta}{1 - \alpha + \delta} F_1(\delta, \beta + 1, \gamma, 1 - (\alpha - 1) + \delta, x, y), \\
\tilde{B}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= \frac{-\alpha + \delta}{\alpha(\beta - 1)} F_1(\delta, \beta - 1, \gamma, 1 - (\alpha + 1) + \delta, x, y), \\
\tilde{H}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= -\gamma F_1(\delta, \beta - 1, \gamma + 1, 1 - \alpha + \delta, x, y), \\
\tilde{B}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= \frac{1}{1 - \gamma} F_1(\delta, \beta + 1, \gamma - 1, 1 - \alpha + \delta, x, y), \\
\tilde{H}_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= (-\alpha + \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma + 1, 1 - (\alpha - 1) + \delta, x, y), \\
\tilde{B}_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= \frac{1}{1 - \alpha + \delta} F_1(\delta, \beta, \gamma - 1, 1 - (\alpha + 1) + \delta, x, y), \\
\tilde{H}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= (-\alpha + \delta) F_1(\delta - 1, \beta, \gamma, 1 - \alpha + (\delta - 1), x, y), \\
\tilde{B}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F_1(\delta, \beta, \gamma, 1 - \alpha + \delta, x, y) &= \frac{\delta(\alpha + \beta + \gamma - \delta - 1)}{1 - \alpha + \delta} F_1(\delta + 1, \beta, \gamma, 1 - \alpha + (\delta + 1), x, y).
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] C. Moroşanu, Euler-Poisson-Darboux equation, in *Encyclopaedia of Mathematics: Supplement III* (M. Hazewinkel, Ed.), Kluwer, 2002, pp. 141–142
- [2] E.T. Copson, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1975
- [3] I. Hauser and F.J. Ernst, Initial value problem for colliding gravitational plane wave, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 872–887
- [4] 岡本和夫, 戸田方程式と特殊関数, 大阪大学理学部における集中講義 (1987)
- [5] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994 年
- [6] 原岡喜重, 超幾何関数, 朝倉書店 (すうがくの風景 7), 2002 年
- [7] 木村弘信, 超幾何関数入門 — 特殊関数への統一的視点からのアプローチ, サイエンス社, 2007 年
- [8] G. Darboux, *Sur la théorie générale des surfaces II*, Chelsea Publishing Company, 1972
- [9] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, *Kyushu J. Math.* **60** (2006), 101–243
- [10] W. Miller, Jr., Symmetries of differential equations. The hypergeometric and Euler-Darboux equations, *SIAM J. Math. Anal.* **4** (1973), 314–328.
- [11] N. Takayama, Propagation of singularities of solutions of the Euler-Darboux equation and a global structure of the space of holonomic solutions I, *Funkcialaj Ekvacioj* **35** (1992), 343–403
- [12] T. Kimura, *Hypergeometric functions of two variables*, Lecture Notes, Univ. of Minnesota (1971–1972)