離散可積分系による非交叉歩道の数え上げ

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/23472

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (26), pp.176-181, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 26 (pp. 176 - 181)

離散可積分系による非交叉歩道の数え上げ

上岡　修平（KAMIOKA Shuhei）

(Received 14 January 2012; accepted 24 January 2012)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

離散可積分系による非交叉歩道の数え上げ

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平　(KAMIOKA Shuhei)

概　要　　非交叉歩道の数え上げ問題として, 三角格子路の非交叉的な配置の数え上げ問題を考える. 三角格子路に関連する Narayana 多項式を考え, それを成分とする行列式の値を調べることにより三角格子路の非交叉的な配置の仕方の総数を求める. 特に行列式の計算には, 直交関数の一つである Laurent 双直交多項式や離散可積分系である離散戸田方程式を利用する. Aztec diamond のドミノタイリング問題との関連についても紹介する.

1　はじめに

本研究では数え上げ組合せ論の問題として非交叉歩道の数え上げ問題について考察する. 非交叉歩道は図 1 のように複数の径路をどの二つも交わらないように平面に描いたものであり, その数え上げ問題は Young 盤の数え上げや頂点模型の統計解析等, 数学や物理学の色々な場面で現れる (例えば [4]). 対称関数の理論に現れる Jacobi–Trudi の公式もその例である.

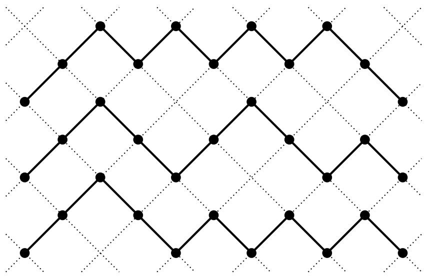

図 1: 正方格子上の非交叉歩道.

非交叉歩道の数え上げ問題として典型的に現れるのは, 図 1 のような正方格子上の歩道の問題であり, 二項係数 $\binom{m}{n}$ や Catalan 数 (OEIS [5] A000108) 等の組合せ論的数に関する計算問題に帰着する場合が多い. 本研究ではこれとは異なり三角格子路, つまり図 2 のような三角格子上の歩道を取り扱う. 三角格子路は Schröder 路とも呼ばれ [2], Narayana 数 (OEIS A001263) や large Schröder 数 (OEIS A006318) 等に関連する. 正方格子上の歩道と三角格子路との違いは唯一点, 横方向の水平ステップを取り得るか否かである. 本研究では特に三角格子路に含まれる水平ステップの数に注目し, そのために Narayana 数を係数とする Narayana 多項式 [2] やその行列式を用いた解析を行う.

2　三角格子路と Narayana 多項式

準備として三角格子路と Narayana 多項式の定義を与える.

三角格子路　二次元格子 $\mathbb{Z}^2$ 上の格子路で次の二条件を満たすものを三角格子路とよぶ.

- 次の三種類のステップにより構成される: 上 $(1,1)$, 下 $(1,-1)$, 水平 $(2,0)$.
- x 軸より下は通らない.

三角格子路の例を図 2 に示す. 三角格子路 ω に含まれる水平ステップの数を $\mathrm{level}(\omega)$ と表す. 例えば図 2 の三角格子路については $\mathrm{level}(\omega) = 4$ である.

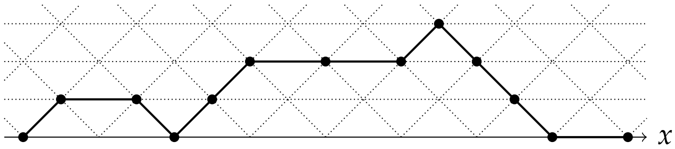

図 2: 三角格子路.

Narayana 多項式　Narayana 数 $\frac{1}{m}\binom{m}{k}\binom{m}{k-1}$ (OEIS A001263) を係数とする変数 y に関する多項式 $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\binom{m}{k-1}y^k$ を Narayana 多項式という [2]. ここでは変数変換 $y = x + 1$ を施し, 変数 x の多項式

$$N_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\binom{m}{k-1}(x+1)^k \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

として Narayana 多項式を扱う.

Narayana 多項式 $N_m(x)$ は m 次のモニック多項式である. ここでは $m = 0$ についても便宜的に $N_0(x) = 1$ と定める. さらに負整数 m についても変数 x^{-1} の多項式として $N_m(x)$ を次で定義する:

$$N_m(x) = x^{2m+1}N_{-m-1}(x) \quad (m = -1, -2, -3, \ldots). \tag{2.2}$$

Narayana 多項式 $N_m(x)$ は次の意味で三角格子路の数え上げ多項式である:

$$N_m(x) = \sum_{\omega} x^{\mathrm{level}(\omega)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

ここで右辺の和において ω は三角格子路で, 始点と終点がそれぞれ $(0,0)$ と $(2m,0)$ であるもの全てにわたってとる. 例えば $m = 2$ のとき, 始点と終点がそれぞれ $(0,0)$ と $(4,0)$ である三角格子路は図 3 の 6 つである. その内, 水平ステップを 2 個含むものは 1 つ, 1 個含むものは 3 つ, 全く含まないものは 2 つある. 従って Narayana 多項式は $N_2(x) = x^2 + 3x + 2$ である.

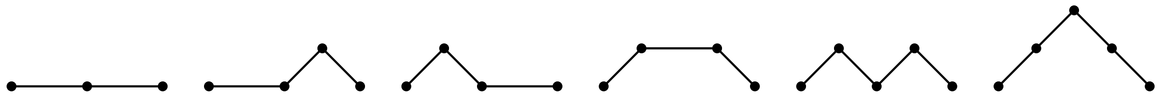

図 3: 始点 $(0,0)$ から終点 $(4,0)$ への三角格子路.

3　三角格子路の非交叉的な配置と Narayana 行列式

非負整数 m と正整数 n を任意にとる. n 本の三角格子路 $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ を次の三条件に従って非交叉的に配置する.

(i) 三角格子路 ω_j の始点と終点はそれぞれ $(-j, j)$ と $(2m + j, j)$ である.

(ii) どの二本も節点を共有しない: $i \neq j$ ならば $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$.

(iii) 水平ステップの総数は丁度 k である: $\mathrm{level}(\omega_0) + \mathrm{level}(\omega_1) + \cdots + \mathrm{level}(\omega_{n-1}) = k$.

図 4 に三角格子路の非交叉的な配置の例を示す. ここで考察するのは次の数え上げ問題である.

- 与えられた m, n, k に対して, 上の三条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角格子路の非交叉的な配置の仕方は何通りあるか.

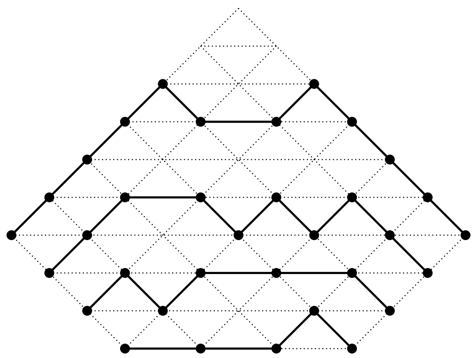

図 4: 三角格子路の非交叉的な配置 ($m=3, n=4, k=6$).

この問題に対して次の結果が得られた.

定理 1. 任意の非負整数 m と正整数 n に対して $\alpha=(m+1)(m-2)/2$ および $\gamma=n(2m+n-1)/2$ とおく. このとき三角格子路の非交叉的な配置 $(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$ で上の三条件 (i), (ii), (iii) を満たすものの数は次で与えられる.

- $m=0$ のとき $\binom{n(n-1)/2}{k}$.
- $m=1$ のとき $\binom{n(n+1)/2}{k}$.
- $m=2$ のとき $\sum_{j=0}^{n}\binom{n(n+1)/2+j}{k}$.
- $m=3$ のとき $\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2+j}{2}\binom{n(n+1)/2+j}{k}+\sum_{j=0}^{n}\binom{2+j}{2}\binom{n(n+3)/2-j}{k}$.
- $m\ge 4$ のとき $\gamma-n\le k\le\gamma$ ならば $\sum_{j=0}^{n}\binom{\alpha+j}{\alpha}\binom{\gamma-j}{k}$.

定理 1 の結果を得るための基礎は, 非交叉歩道と行列式に関する Gessel–Viennot–Lindström (GVL) の補題 (例えば [1, Ch. 29]) である. 任意の整数 m および非負整数 n に対して *Narayana* 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ を, Narayana 多項式の Hankel 行列式として次で定める:

$$\Delta_n^{(m)}(x)=\det\left[N_{m+i+j}(x)\right]_{i,j=0}^{n-1}=\begin{vmatrix} N_m(x) & N_{m+1}(x) & \cdots & N_{m+n-1}(x)\\ N_{m+1}(x) & N_{m+2}(x) & \cdots & N_{m+n}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ N_{m+n-1}(x) & N_{m+n}(x) & \cdots & N_{m+2n-2}(x)\end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

ただし $\Delta_0^{(m)}(x)=1$ とする. m が非負の場合, Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ の成分である Narayana 多項式は全て三角格子路による表示 (2.3) を持つ. 従って $\Delta_n^{(m)}(x)$ に対して GVL の補題を適用することができ, その結果として次の数え上げ公式が得られる. 任意の非負整数 m と正整数 n に対して,

$$\Delta_n^{(m)}(x)=\sum_{(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1})} x^{\mathrm{level}(\omega_0)+\mathrm{level}(\omega_1)+\cdots+\mathrm{level}(\omega_{n-1})}. \tag{3.2}$$

ただし右辺の和において $(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$ は三角格子路の非交叉的な配置で, 上の二条件 (i) と (ii) を満たすもの全てにわたってとる.

GVL 補題による数え上げ公式 (3.2) により, 三角格子路の非交叉的な配置に対する数え上げ問題は Narayana 行列式の計算問題に帰着する. 特に定理 1 は Narayana 行列式に関する次の定理の帰結として得られる.

定理 2. 任意の非負整数 m,n に対して $\alpha=(m+1)(m-2)/2$ とおく. また $y=x+1$ とする. このとき Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値は次の形で与えられる.

- $m=0,1,2,3$ のとき

$$\begin{aligned}&\Delta_n^{(0)}(x)=y^{\frac{n(n-1)}{2}},\quad \Delta_n^{(1)}(x)=y^{\frac{n(n+1)}{2}},\quad \Delta_n^{(2)}(x)=y^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{j=0}^{n}y^j,\\ &\Delta_n^{(3)}(x)=y^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2+j}{2}(y^j+y^{2n-j})+\binom{2+n}{2}y^n\right\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

- $m\geq 4$ のとき

$$\Delta_n^{(m)}(x)=y^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{n}\binom{\alpha+j}{\alpha}y^{(m-1)n-j}+(y\text{ に関する高々}(m-2)n-1\text{ 次の多項式})\right\}.\tag{3.4}$$

定理 2 から定理 1 を得るには, 各 Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ を変数 x の多項式として展開し, x^k の項の係数を調べればよい. 以下では定理 2 の導出について解説する.

4 Narayana 行列式の計算

定理 2 を導出するためには, 実際に Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値を計算する必要がある. ここでは次の三段階に分けて順次計算する.

1. Laurent 双直交多項式の理論を用いて $\Delta_n^{(-n)}(x)$ と $\Delta_n^{(-n+1)}(x)$ の値を求める.
2. 離散戸田方程式を用いて $\Delta_n^{(0)}(x)$ と $\Delta_n^{(1)}(x)$ の値を求める.
3. 離散戸田方程式を用いて $m=2,3,4,\ldots$ に対して $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値を評価する.

Laurent 双直交多項式の理論を用いて $\Delta_n^{(-n)}(x)$ と $\Delta_n^{(-n+1)}(x)$ の値を求める 任意の非負整数 n に対して, 変数 z に関するモニック多項式 $P_n(z)$ を次の三項間漸化式により定める:

$$P_{n+1}(z)=(z-x)P_n(z)-zP_{n-1}(z)\quad(n=0,1,2,\ldots).\tag{4.1}$$

ただし $P_{-1}(z)=0$ かつ $P_0(z)=1$ である. この多項式 $P_n(z)$ は *Laurent* 双直交多項式というクラス (例えば [6]) に属する直交関数であり, 線型汎関数 F が存在して直交関係式 $F[z^{-m}P_n(z)]=0$ $(m=0,1,2,\ldots,n-1)$ が成り立つ.

Laurent 双直交多項式 $P_n(z)$ を導入する理由は, Narayana 多項式 $N_m(x)$ による次の行列式表示にある: 線型汎関数 F はモーメント $F[z^m]=N_{m-1}(x)$ $(m\in\mathbb{Z})$ により与えられ,

$$P_n(z)=\frac{1}{\Delta_n^{(-n)}(x)}\begin{vmatrix}N_{-n}(x)&N_{-n+1}(x)&\cdots&N_{-1}(x)&N_0(x)\\N_{-n+1}(x)&N_{-n+2}(x)&\cdots&N_0(x)&N_1(x)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\N_{-1}(x)&N_0(x)&\cdots&N_{n-2}(x)&N_{n-1}(x)\\1&z&\cdots&z^{n-1}&z^n\end{vmatrix}\quad(n=0,1,2,\ldots).\tag{4.2}$$

行列式表示 (4.2) から, Narayana 行列式 $\Delta_n^{(-n)}(x)$ および $\Delta_n^{(-n+1)}(x)$ の値は簡単に求めることができ,

$$\Delta_n^{(-n)}(x)=x^{-\frac{n(n-1)}{2}},\quad \Delta_n^{(-n+1)}(x)=x^{-\frac{n(n+1)}{2}}\quad(n=0,1,2,\ldots).\tag{4.3}$$

離散戸田方程式を用いて $\Delta_n^{(0)}(x)$ と $\Delta_n^{(1)}(x)$ の値を求める　Narayana 行列式の計算に用いる離散戸田方程式は双線型方程式

$$\tau_{n+1}^{(m-1)}\tau_{n-1}^{(m+1)} - \tau_n^{(m-1)}\tau_n^{(m+1)} + \left(\tau_n^{(m)}\right)^2 = 0 \tag{4.4}$$

により記述される離散可積分系である. ここでは離散戸田方程式を半無限格子 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 上で考え (離散戸田分子), 境界条件として $\tau_0^{(m)} = 1$ を課す.

Narayana 行列式は離散戸田方程式 (4.4) の一つの解 $\tau_n^{(m)} = \Delta_n^{(m)}(x)$ を与える. つまり Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ は方程式

$$\Delta_{n+1}^{(m-1)}(x)\Delta_{n-1}^{(m+1)}(x) - \Delta_n^{(m-1)}(x)\Delta_n^{(m+1)}(x) + \left(\Delta_n^{(m)}(x)\right)^2 = 0 \tag{4.5}$$

を満足する (行列式に関する Jacobi の恒等式). 従って原理的には, 離散戸田方程式の形の方程式 (4.5) を漸化式として用いることにより, 全ての整数 m と非負整数 n に対して Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値を求めることができる.

今, 漸化式の初期値として (4.3) で既に得られた $\Delta_n^{(-n)}(x)$ と $\Delta_n^{(-n+1)}(x)$ を選ぶ. このとき直ちに次の事実を示すことができる: 任意の整数 m と非負整数 n を $-n \leq m \leq 1$ を満たすようにとるとき, Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値は

$$\Delta_n^{(m)}(x) = x^{-\frac{m(m-1)}{2}} y^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} \tag{4.6}$$

に等しい (証明は m, n に関する数学的帰納法). ただし $y = x + 1$ である. 特に $m = 0$ または $m = 1$ のとき, それぞれ

$$\Delta_n^{(0)}(x) = y^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \Delta_n^{(1)}(x) = y^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

離散戸田方程式を用いて $m = 2, 3, 4, \ldots$ に対して $\Delta_n^{(m)}(x)$ の値を評価する　再び方程式 (4.5) を漸化式として用いる. (4.7) で得られた $\Delta_n^{(0)}(x)$ と $\Delta_n^{(1)}(x)$ を初期値として用いることにより, 定理 2 の $m = 2, 3$ および $m \geq 4$ に対する公式は全て得られる (証明は m, n に関する数学的帰納法).

こうして Narayana 行列式 $\Delta_n^{(m)}(x)$ に関する定理 2 の主張が導かれた.

5　おわりに

本研究では次のことを明らかにした. 三角格子路を非交叉的に配置するとき, 配置の仕方の総数は定理 1 のようになる. この組合せ論的な結果は Gessel–Viennot–Lindström の補題を通して, Narayana 行列式, つまり Narayana 多項式を成分とする Hankel 行列式の値を調べることにより得られる (定理 2). Narayana 行列式の値の計算および評価は, Laurent 双直交多項式や離散戸田方程式を利用することにより容易になる.

最後に Aztec diamond のドミノタイリング問題との関連について述べる. 図 5 のような図形を Aztec diamond という. Aztec diamond をドミノ, つまり 1×2 または 2×1 のブロックで敷き詰めるとき, 可能な敷き詰め方は何通りあるか. この問題は Aztec diamond のドミノタイリング問題と呼ばれ, 厳密解の求まる非自明なタイリング問題の先駆けとして有名である [3].

三角格子路の非交叉的な配置に関する定理 1 を思い出すとき, $m = 1$ に関する結果は実は Aztec diamond のドミノタイリング問題に対する解を与えている. この事実は三角格子路の非交叉的な配置と Aztec diamond のドミノタイリングの間の全単射 (図 5 の右図) から導かれる. つまり大き

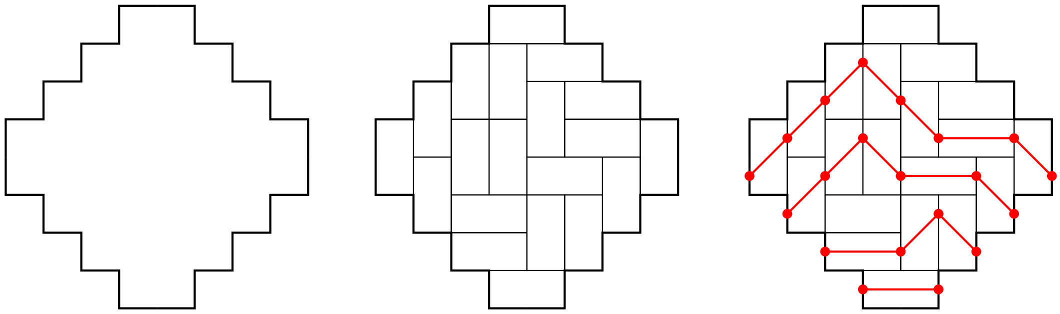

図 5: Aztec diamond (左), ドミノタイリング (中), 三角格子路の非交叉的な配置との対応 (右).

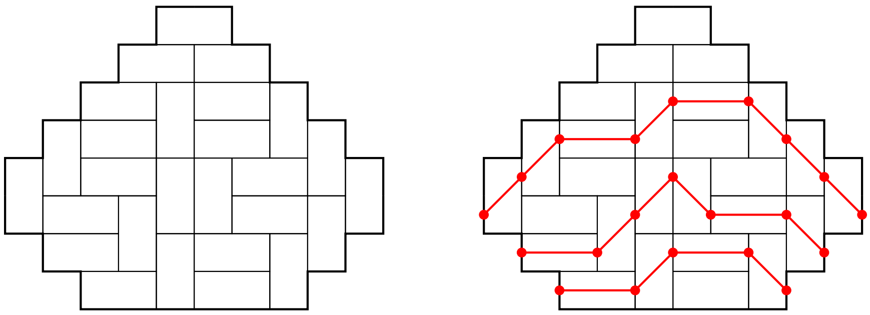

図 6: 底部の削られた Aztec diamond のドミノタイリング (左) と三角格子路の非交叉的な配置との対応 (右).

さ n の Aztec diamond をドミノで敷き詰めるとき, 2×1 ブロックの数が丁度 $2k$ 個になるような敷き詰め方は $\binom{n(n+1)/2}{k}$ 通りある. これは [3] の結果に対する別証明を与えている.

さて $m \geq 2$ の場合はどうか. $m = 1$ のときに用いた全単射から予想されるように, $m \geq 2$ の場合には図 6 のような底部の $m-1$ 行が削られた Aztec diamond のドミノタイリング問題が現れる. 数え上げ問題としての結果も $m = 1$ の場合と同様に導くことができる.

参考文献

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, Proofs from The Book, 4th ed., Springer-Verlag, 2010.

[2] J. Bonin, L. Shapiro and R. Simion, *Some q-analogues of the Schröder numbers arising from combinatorial statistics on lattice paths*, J. Statist. Plann. Inference **34** (1993), 35–55.

[3] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings. I,*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132.

[4] A. J. Guttmann, A. L. Owczarek and X. G. Viennot, *Vicious walkers and Young tableaux. I. Without walls*, J. Phys. A **31** (1998), 8123–8135.

[5] OEIS Foundation Inc., The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `http://oeis.org`, 2011.

[6] A. Zhedanov, *The "classical" Laurent biorthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **98** (1998), 121–147.