

超離散系におけるカルマンフィルター

磯島, 伸
青山学院大学理工学部

白瀬, 裕巳
三菱UFJ信託銀行

薩摩, 順吉
青山学院大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/23467>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (21), pp.147-152, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 21 (pp. 147 - 152)

超離散系におけるカルマンフィルター

磯島 伸 (ISOJIMA Shin), 白瀬 裕巳 (SHIRASE Yuki),
薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)

(Received 13 January 2012; accepted 6 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

超離散系におけるカルマンフィルター

青山学院大学理工学部 礒島伸 (ISOJIMA Shin)
三菱 UFJ 信託銀行 白瀬裕己 (SHIRASE Yuki)
青山学院大学理工学部 薩摩順吉 (SATSUMA Junkichi)

概要 カルマンフィルター [1] は、確率的に変動する物理量の推定値をその観測値から得るアルゴリズムである。その理論においては系の線形性を仮定するため、非線形系に対して直接適用することはできない。一方、区分線形方程式で記述される超離散系 [2] は一般の非線形系と構造がよく似た解を持つと同時に、線形系に近い性質を持つ。本稿では、線形系に対するカルマンフィルターと同様の考え方を用いて、ある超離散系に対するカルマンフィルターを導出し、その結果について考察する [3]。

1 離散カルマンフィルター

本節では離散時間カルマンフィルター理論の概要を述べる。不規則に時間変動する物理量（信号）の時間発展（信号過程）とその物理量の測定機構（測定過程）を考える。時刻 $k = 0, 1, 2, \dots$ における n 次確率変数ベクトル値をとる信号を $x(k)$ で表す。信号 $x(k)$ を直接測ることはできないが、 m 次確率変数ベクトル値をとる測定値 $y(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) は測れるとする。問題は $y(0), y(1), \dots, y(k)$ から $x(k)$ の最適な推定量を求めることである。カルマンフィルター理論においては、以下の 線形システム を仮定する。

$$\begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k u(k) \\ y(k) = C_k x(k) + w(k) \end{cases} \quad (1.1)$$

第1式が信号過程、第2式が測定過程である。ここで A_k, B_k, C_k はそれぞれ $n \times n$ 次、 $n \times r$ 次、 $m \times n$ 次の確定した行列であり、システム雑音 $u(k)$ 、観測雑音 $w(k)$ はそれぞれ r 次、 m 次の確率変数ベクトルであって、 $x(0), u(k), w(l)$ は互いに独立であるとする。また、雑音について、1次と2次の統計量は測定可能でいずれも 白色雑音 とする。

$$E[u(k)] = \bar{u}(k), \quad E[(u(k) - \bar{u}(k))^t (u(l) - \bar{u}(l))] = \delta_{kl} U_k \quad (1.2)$$

$$E[w(k)] = \bar{w}(k), \quad E[(w(k) - \bar{w}(k))^t (w(l) - \bar{w}(l))] = \delta_{kl} W_k \quad (1.3)$$

ただし、 U_k, W_k はそれぞれ $r \times r$ 次、 $m \times m$ 次の正定値行列であり、 δ_{kl} はクロネッカーのデルタ記号である。信号 $x(k)$ および測定量 $y(k)$ の1次と2次の統計量を

$$E[x(k)] = \bar{x}(k), \quad E[(x(k) - \bar{x}(k))^t (x(l) - \bar{x}(l))] = X_{kl} \quad (1.4)$$

$$E[y(k)] = \bar{y}(k), \quad E[(y(k) - \bar{y}(k))^t (y(l) - \bar{y}(l))] = Y_{kl} \quad (1.5)$$

で表し、 $\bar{x}(0)$ および X_{00} は既知とする。このとき

$$\bar{x}(k+1) = A_k \bar{x}(k) + B_k \bar{u}(k) \quad (1.6)$$

$$X_{ij} = X_{i,j-1}^t A_{j-1} \quad (i < j) \quad (1.7)$$

などの統計量が満たす漸化式が得られる．そして，最小 2 乗規範によって最適な推定量を定義する．すなわち，誤差 $e(k) := \hat{x}(k) - x(k)$ の平均が零ベクトル，かつ，共分散行列が 2 次形式の意味で最小になる推定量を最適とする．このとき，推定量 $\hat{x}(k)$ は時刻 k までの測定値の線形結合の形

$$\hat{x}(k) = d(k) + \sum_{l=0}^k F_{kl} y(l) \quad (1.8)$$

となる．ここで $d(k)$ は n 次定数ベクトル， F_{kl} は $n \times m$ 次定数行列である．

以上のシステムの線形性，雑音の白色性，最小 2 乗規範の仮定の下で，以下の結果が得られる．まず，記号

$$\begin{aligned} X(k) &= \begin{pmatrix} X_{0k} \\ \vdots \\ X_{kk} \end{pmatrix}, & Y(k) &= \begin{pmatrix} Y_{00} & \cdots & Y_{0k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k0} & \cdots & Y_{kk} \end{pmatrix}, \\ C(k) &= \begin{pmatrix} C_0 & & O \\ & \ddots & \\ O & & C_k \end{pmatrix}, & W(k) &= \begin{pmatrix} W_0 & & O \\ & \ddots & \\ O & & W_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

を導入しよう．誤差の平均を最小にする $d(k)$ は

$$d(k) = \bar{x}(k) - \sum_{l=0}^k F_{kl} \{C_l \bar{x}(l) + \bar{w}(l)\} \quad (1.10)$$

で与えられる．さらに，誤差の分散を最小にする $F(k) := (F_{k0} \ F_{k1} \ \dots \ F_{kk})$ は

$$F(k) = {}^t X(k) {}^t C(k) Y^{-1}(k) \quad (1.11)$$

であり，そのときの誤差の共分散行列を $P(k) := E[e(k) {}^t e(k)]$ とおくと

$$P(k) = X_{kk} - {}^t X(k) {}^t C(k) Y^{-1}(k) C(k) X(k) \quad (1.12)$$

となる．以上より，

$$\mathbf{y}_{[0,k]} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{[0,k]} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{w}}_{[0,k]} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}(0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{w}}(k) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

とすれば，最適推定量は

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + {}^t X(k) {}^t C(k) Y^{-1}(k) \left\{ \mathbf{y}_{[0,k]} - (C(k) \bar{\mathbf{x}}_{[0,k]} + \bar{\mathbf{w}}_{[0,k]}) \right\} \quad (1.14)$$

で与えられる．

この式を用いて $\hat{x}(k)$ を求めるためには過去すべての測定信号 $\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(k)$ が必要であり，記憶しておくデータが増え続ける．しかし幸いなことに， $\hat{x}(k)$ と $P(k)$ が満たす漸化式

$$\hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + P(k) {}^t C_k W_k^{-1} \{ \mathbf{y}(k) - (C_k \tilde{x}(k) + \bar{\mathbf{w}}(k)) \} \quad (1.15)$$

$$\tilde{x}(k) = A_{k-1} \tilde{x}(k-1) + B_{k-1} \bar{\mathbf{u}}(k-1) \quad (1.16)$$

$$P(k) = \{ M^{-1}(k) + {}^t C_k W_k^{-1} C_k \}^{-1} \quad (1.17)$$

$$M(k) = A_{k-1} P(k-1) {}^t A_{k-1} + B_{k-1} U_{k-1} {}^t B_{k-1} \quad (1.18)$$

を導くことができる．初期条件

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(0) \\ M(0) = X_{00} \end{cases} \quad (1.19)$$

を与えると，測定値 $y(k)$ および雑音の統計量を得るごとに，(1.15)–(1.18) によって共分散行列 $P(k)$ を計算しつつ $\hat{\mathbf{x}}(k)$ が求められる．また時刻 $k-2$ 以前のデータは，計算のステップごとに捨てることのできるため，記憶容量を節約することが可能となる．なお $P(k)$ を求める行列の関係式は一次分数変換，すなわち離散リッカチ方程式の形であることを注意しておく．

2 超離散系におけるカルマンフィルター

琵琶湖流域からの湖への流入高を計算するモデルの1つとしてタンクモデルが提案されている [4]．このモデルは演算が加減算と max 演算で閉じているため，超離散系と考えてよい．以下では，タンクモデルを簡略化した2段タンクモデル (図1) に対するカルマンフィルターを構成する．このモデルでは，雨は一番上から降り注ぎ，上段タンクは地表水・地中水に，下段タンクは地下水にそれぞれ対応すると考える．上段タンクの水はある割合で下段に流れ込み，また上段タンクの水面の高さ $x_1(k)$ が流出口の高さ h_1 を越えると，水はその高さの差に比例して流出し，河川等を通じて湖に流入する．

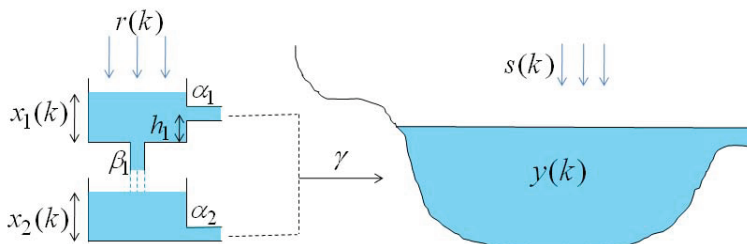


図 1: 琵琶湖水循環システム

このモデルの信号過程は， $r(k)$ を k 日の流域雨量， $u_i(k)$ をすべての誤差を集約したものとして

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 - \beta_1)x_1(k) - \alpha_1\{\max(x_1(k), h_1) - h_1\} + r(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \beta_1x_1(k+1) - \alpha_2x_2(k) + u_2(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

と表される．一方，琵琶湖の水収支 $y(k)$ は次のようになる．

$$y(k) = \gamma\{\alpha_1\max(x_1(k), h_1) - h_1\} + \alpha_2x_2(k) + s(k) + w(k) \quad (2.2)$$

ここに， $s(k)$ は k 日の湖面雨量， $w(k)$ はすべての誤差を集約したものである．上式とは別に， $y(k)$ は日々の湖面水位や放流高の測定データから算出できる．定数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma \in [0, 1]$ は既知とする．

この系を (1.1) との類似点を見やすくするために書き直す．新しいパラメータ $a_{11} := 1 - \beta_1$ ， $a_{21} := \beta_1(1 - \beta_1)$ ， $a_{22} := 1 - \alpha_2$ ， $b_{11} := -\alpha_1$ ， $b_{21} := -\beta_1\alpha_1$ ， $c_1 := \gamma\alpha_2$ ， $c_2 := \gamma\alpha_1$ を導入し， $\alpha_1h_1 + r(k) + u_1(k) \rightarrow u_1(k)$ ， $\beta_1(\alpha_1h_1 + r(k) + u_1(k)) + u_2(k) \rightarrow u_2(k)$ ， $-\alpha_1\gamma h_1 + w(k) + s(k) \rightarrow w(k)$ と置き換えると，(2.1)，(2.2) は

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\max(\mathbf{x}(k), \mathbf{h}) + \mathbf{u}(k) \\ y(k) = C_1\mathbf{x}(k) + C_2\max(\mathbf{x}(k), \mathbf{h}) + w(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

と書ける．ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{max}(\mathbf{x}(k), \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \max(x_1(k), h_1) \\ \max(x_2(k), h_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

とした（実際には $h_2 = 0$ である）．この系を (1.1) と比較すると，区分線形項 $\mathbf{max}(\mathbf{x}(k), \mathbf{h})$ が加わって超離散系になっていることがわかる．

この超離散システムに対して，前節と同様の議論を進めることで，超離散系におけるカルマンフィルターを構成する．統計量についての仮定および記号は線形の場合と同一である．ただし，区分線形項を新しい量と考えると，1 次の統計量

$$E[\max(x_i(k), h_i)] = \bar{m}_i(k), \quad \begin{pmatrix} \bar{m}_1(k) \\ \bar{m}_2(k) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{m}}(k) \quad (2.5)$$

および 2 次の統計量

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{max}(\mathbf{x}(k), \mathbf{h}) - \bar{\mathbf{m}}(k))^t (\mathbf{max}(\mathbf{x}(l), \mathbf{h}) - \bar{\mathbf{m}}(l))] &= G_{kl} \\ E[(\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k))^t (\mathbf{max}(\mathbf{x}(l), \mathbf{h}) - \bar{\mathbf{m}}(l))] &= H_{kl} \\ E[(\mathbf{max}(\mathbf{x}(k), \mathbf{h}) - \bar{\mathbf{m}}(k))^t (\mathbf{x}(l) - \bar{\mathbf{x}}(l))] &= I_{kl} \end{aligned} \quad (2.6)$$

を定義する．最小 2 乗規範に基づいて最適な推定量を定義することも同様である．超離散系に拡張したことによる変更点は (2.5)，(2.6) を付け加えたのみで，計算は線形の場合と全く同様に進めることができる．

詳細は [3] に譲り，結果のみ述べる．まず，前節で用いられていない記号

$$C_1(k) = \begin{pmatrix} C_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & C_1 \end{pmatrix}, \quad C_2(k) = \begin{pmatrix} C_2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & C_2 \end{pmatrix}, \quad I(k) = \begin{pmatrix} I_{0k} \\ \vdots \\ I_{kk} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

を定義する．誤差の平均が零ベクトルになることから，

$$\mathbf{d}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \sum_{l=0}^k F_{kl} (C_1 \bar{\mathbf{x}}(l) + C_2 \bar{\mathbf{m}}(l) + \bar{w}(l)) \quad (2.8)$$

を得る．次に，誤差の共分散行列を最小にする $F(k) := (F_{k0} \dots F_{kk})$ は

$$F(k) = {}^t \{C_1(k)X(k) + C_2(k)I(k)\} Y^{-1}(k) \quad (2.9)$$

であり，そのときの誤差の共分散行列を $P(k)$ とすれば，

$$P(k) = X_{kk} - {}^t \{C_1(k)X(k) + C_2(k)I(k)\} Y^{-1}(k) \{C_1(k)X(k) + C_2(k)I(k)\} \quad (2.10)$$

となる．以上より，

$$\mathbf{y}(k) = \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{[0,k]} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{m}}_{[0,k]} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{m}}(0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{m}}(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{w}}(k) = \begin{pmatrix} \bar{w}(0) \\ \vdots \\ \bar{w}(k) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

とすれば, $x(k)$ の推定量は

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + {}^t \{C_1(k)X(k) + C_2(k)I(k)\} Y^{-1}(k) \{y(k) - (C_1(k)\bar{x}_{[0,k]} + C_2(k)\bar{m}_{[0,k]} + \bar{w}(k))\} \quad (2.12)$$

と与えられる. かくして, (2.3) のシステムの最適フィルターは (2.12) で, 誤差の共分散行列は (2.10) で与えられることが分かった. この式は (1.14) とほぼ同じ形式をしていることを注意しておく. また線形の場合と同じく, 次に示すように $\hat{x}(k)$, $P(k)$ が満たす漸化式を導出できる. ただし, 統計量について

$$X_{ij} = X_{i,j-1} {}^t A + H_{i,j-1} {}^t B = \begin{cases} X_{i,j-1} {}^t (A+B) & (x_1(j-1) > h_1 \text{ のとき}) \\ X_{i,j-1} {}^t A & (x_1(j-1) < h_1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.13)$$

などの我々が知り得ない値 $x_1(k)$ に関する場合分けを持つ漸化式を用いる必要がある ((1.7) と比較せよ). 直接 (2.12) を用いて推定量を計算しようとしても, 上のような場合分けを伴う漸化式を用いなければならないことは同じである.

再び計算は省略するが, $\hat{x}(k)$, $P(k)$ が満たす漸化式を以下にまとめる.

(i) $x_1(k-1) > h_1$, $x_1(k) > h_1$ のとき:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + P(k) {}^t (C_1 + C_2) W_k^{-1} \{y(k) - ((C_1 + C_2)\tilde{x}(k) + \bar{w}(k))\} \\ \tilde{x}(k) = (A+B)\hat{x}(k-1) + \bar{u}(k-1) \\ P(k) = \{M^{-1}(k) + {}^t (C_1 + C_2) W_k^{-1} (C_1 + C_2)\}^{-1} \\ M(k) = (A+B)P(k-1) {}^t (A+B) + U_{k-1} \end{cases} \quad (2.14)$$

(ii) $x_1(k-1) > h_1$, $x_1(k) < h_1$ のとき:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + P(k) {}^t C_1 W_k^{-1} \{y(k) - (C_1\tilde{x}(k) + \bar{w}(k) + C_2\mathbf{h})\} \\ \tilde{x}(k) = (A+B)\hat{x}(k-1) + \bar{u}(k-1) \\ P(k) = \{M^{-1}(k) + {}^t C_1 W_k^{-1} C_1\}^{-1} \\ M(k) = (A+B)P(k-1) {}^t (A+B) + U_{k-1} \end{cases} \quad (2.15)$$

(iii) $x_1(k-1) < h_1$, $x_1(k) > h_1$ のとき:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + P(k) {}^t (C_1 + C_2) W_k^{-1} \{y(k) - ((C_1 + C_2)\tilde{x}(k) + \bar{w}(k))\} \\ \tilde{x}(k) = A\hat{x}(k-1) + \bar{u}(k-1) + B\mathbf{h} \\ P(k) = \{M^{-1}(k) + {}^t (C_1 + C_2) W_k^{-1} (C_1 + C_2)\}^{-1} \\ M(k) = AP(k-1) {}^t A + U_{k-1} \end{cases} \quad (2.16)$$

(iv) $x_1(k-1) < h_1$, $x_1(k) < h_1$ のとき:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + P(k) {}^t C_1 W_k^{-1} \{y(k) - (C_1\tilde{x}(k) + \bar{w}(k) + C_2\mathbf{h})\} \\ \tilde{x}(k) = A\hat{x}(k-1) + \bar{u}(k-1) + B\mathbf{h} \\ P(k) = \{M^{-1}(k) + {}^t C_1 W_k^{-1} C_1\}^{-1} \\ M(k) = AP(k-1) {}^t A + U_{k-1} \end{cases} \quad (2.17)$$

前節のカルマンフィルタ (1.15)–(1.18) と, (2.14)–(2.17) とを比較すると, 構造は非常に近い. 初期条件

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = \bar{x}(0) \\ M(0) = X_{00} \end{cases} \quad (2.18)$$

が与えられ, もし各ステップで場合分けが確定したとすれば, 測定値 $y(k)$ および雑音の統計量を得るごとに, (2.14)–(2.17) を用いて共分散行列 $P(k)$ と $\hat{x}(k)$ を求めることができる. つまり, (2.14)–(2.17) は超離散系におけるカルマンフィルタと呼ばれるものになっていると言える.

なお, $-1 < b_{11}, b_{21} < 0$, $0 < c_1, c_2 < 1$ であることに注意して, 各場合における共分散行列を比較すると, (i) の $P(k)$ が最小, (iv) の $P(k)$ が最大になることがわかる. 従って, (i) は分散を最小にするという意味で最もよい推定量だが, 分散を過小評価する危険性を伴う. また (iv) は「安全だが緩い」推定量と言える.

3 まとめと課題

本稿では超離散系 (2.3) に対してカルマンフィルタと呼べるもの (2.14)–(2.17) を構成することができた. 時刻 k における最適推定量 $\hat{x}(k)$ は, (2.14)–(2.17) のように時刻 k と $k-1$ における x_1 と h_1 の値の大小によって (時刻 $0, 1, \dots, k-2$ までの x_1 の値に関わらず) 4通りの中の1つに決まる. しかし, この4通りの場合分けは, 我々が決して知ることのできない信号値 $x(k)$ に関する場合分けであり, 時刻 k までのすべての測定値を得たとしても, どの1つを採用すればいいのかを決定することはできない. 導かれた4通りの中で, 共分散行列 $P(k)$ の簡単な大小比較が可能であるが, $P(k)$ が最小となる (i) の推定量を毎ステップ採用するのがよいと結論づけることはできない.

今後は数値例の計算によって超離散カルマンフィルタの有効性を検証すること, 別の形の超離散システムに対してカルマンフィルタを構成することが課題となる. さらに, 非線形フィルタ理論の構築に向けて, 一般の非線形問題を超離散近似してカルマンフィルタを構成・解析する手法を確立することを目標としたい. また時間 k を動かしたときの $P(k)$ のダイナミクスを調べることも今後の課題である.

謝辞

本研究は科研費 21760063, 21560069 の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] 有本卓: 『カルマン・フィルタ』, 産業図書 (1977).
- [2] 広田良吾, 高橋大輔: 『差分と超離散』, 共立出版 (2003).
- [3] 白瀬裕己: 「超離散系におけるカルマンフィルタ」, 修士論文, 青山学院大学大学院理工学研究科 (2011).
- [4] 清水光, 久保和夫, 有本卓: 琵琶湖流域の水の循環に関するシステム理論的考察, 計測自動制御学会論文集, 13 (1977) pp. 200–206.