Classical Orthogonal Polynomials and Bannai-Ito Polynomials

Tsujimoto, Satoshi
Kyoto University

Vinet, Luc
Centre de Recherches Mathématiques Universite de Montréal, Canada

Zhedanov, Alexei
Donetsk Institute for Physics and Technology, Ukraine

https://doi.org/10.15017/23466

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (20), pp.141-146, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 20 (pp. 141 - 146)

Classical Orthogonal Polynomials and Bannai-Ito Polynomials

Tsujimoto Satoshi，Vinet Luc，Zhedanov Alexei

（Received 24 January 2012; accepted 27 February 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

Classical Orthogonal Polynomials and Bannai-Ito Polynomials

Satoshi Tsujimoto Kyoto University, Japan
Luc Vinet Centre de Recherches Mathématiques Universite de Montréal, Canada
Alexei Zhedanov Donetsk Institute for Physics and Technology, Ukraine

概 要 これまで議論されることが少なかった Bannai-Ito 多項式の古典直交多項式における位置づけを明らかにする．特に，差分演算子と鏡映変換演算子を用いて表される Bannai-Ito 作用素の固有関数として Bannai-Ito 多項式が得られることを示す.

1. 古典直交多項式

はじめに，直交多項式の定義を与える．直交多項式にはいろいろな等価な定義の仕方があるが，本稿では隣接した次数の多項式間の関係式である三項間漸化式からはじめる．次の三項間漸化式をみたす多項式の系列 $\{P_n(x)\}_n$ のことを最高次の係数を 1 に規格化した直交多項式列 (monic orthogonal polynomial sequence, MOPS) という.

$$P_0(x) = 1,$$
$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + u_nP_{n-1}(x), \quad u_n \neq 0, \quad n = 1,2,\dots \tag{1}$$

ここで b_n, u_n は定数であり，特に u_n は非零定数である．この漸化式をみたす多項式 $P_n(x)$ が n 次の多項式であり, 最高次の係数が 1 となることは, 式 (1) の両辺の係数を比較することにより容易に示すことができる．さらに，この三項間漸化式から，直交関係式

$$\mathscr{L}[P_n(x)P_m(x)] = h_n\delta_{n,m}, \quad h_n \neq 0, \quad n,m = 0,1,2,\dots \tag{2}$$

を与える線形汎関数 $\mathscr{L} : \pi(x) \to \mathbb{C}$ およびモーメント列 $\{\mu_n\}_n$:

$$\mu_n = \mathscr{L}[x^n], \quad n = 0,1,2,\dots \tag{3}$$

が定まる．ここで $\delta_{n,m}$ はクロネッカーのデルタ関数であり, $\pi(x)$ は x の多項式全体の空間を表す. 直交多項式と可積分系との関連について議論する場合は，$P_n(x)$ の行列式表示を通じて廣田のタウ関数を導入し，線形汎関数に連続変形パラメータを導入することで戸田格子方程式，あるいは離散的な変形パラメータを導入することで離散戸田格子方程式について議論をすすめていく.

次に，古典直交多項式の特徴付けを与える．古典直交多項式は議論によって定義が異なり，大まかにいって，Jacobi 多項式とその特殊化で得られる多項式に限る場合と，いわゆる選点直交多項式や q-直交多項式を含む場合とがある．前者の狭義な定義での古典直交多項式は，2 階の微分方程式で表される

$$A(x)P_n''(x) + B(x)P_n'(x) + C(x)P_n(x) = \lambda_nP_n(x), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{4}$$

を満足する直交多項式 $P_n(x)$ を指し，古くから知られる Jacobi 多項式，Laguerre 多項式，Hermite 多項式, Legendre 多項式などが例としてあげられる．この場合，対応する線形汎関数は実軸上の積分で与えることができる.

表 1: 古典直交多項式の例 (Askey-Scheme)

Askey-Wilson	q-Racah	Wilson	Racah
Big q-Jacobi	q-Hahn	Hahn	Hahn
Little q-Jacobi	q-Krawtchouk	Jacobi	Krawtchouk
q-Laguerre		Laguerre	
Stieltjes-Wigert		Hermite	

以下では，広義の定義を採用し，(4) 式の微分方程式に限定せず，x に関する 2 階の差分あるいは q-差分方程式をみたす直交多項式のクラスも含めて考える．この定義に含まれる古典直交多項式は Askey-Wilson 多項式とその特殊化の観点から統一的に扱うができ，この枠組みを Askey-Scheme と呼ぶ．この Askey-Scheme に含まれる古典直交多項式の具体例については，表 1. および文献 [1] を参照していただきたい．

1984 年の著書 [2] において坂内・伊藤は，代数的組合せ論に表れる双対性を有する多項式列として，Askey-Wilson 多項式とその特殊化に関する分類を与えるなかで，以下の多項式列 $\{B_n\}_n$ を導入した．この多項式 B_n は，Bannai-Ito 多項式と呼ばれ，多項式次数の偶奇性に依存する超幾何関数表示を持つ：偶数次数 ($n = 2,4,\dots$) の場合，

$$\frac{B_n(x)}{A_{n0}} = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1+\rho_1+\rho_2-r_1-r_2, x-r_1+1/2, -x+r_1+1/2 \\ 1-r_1-r_2, 1/2+\rho_1-r_1, 1/2+\rho_2-r_1 \end{matrix};1\right) +$$
$$\xi_n(x-r_1+1/2)\,{}_4F_3\left(\begin{matrix} 1-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1+\rho_1+\rho_2-r_1-r_2, x-r_1+3/2, -x+r_1+1/2 \\ 1-r_1-r_2, 3/2+\rho_1-r_1, 3/2+\rho_2-r_1 \end{matrix};1\right)$$

また，奇数次数 ($n = 1,3,\dots$) の場合，

$$\frac{B_n(x)}{A_{n0}} = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}+\rho_1+\rho_2-r_1-r_2, x-r_1+1/2, -x+r_1+1/2 \\ 1-r_1-r_2, 1/2+\rho_1-r_1, 1/2+\rho_2-r_1 \end{matrix};1\right) -$$
$$\eta_n\,(x-r_1+1/2)\,{}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}+\rho_1+\rho_2-r_1-r_2, x-r_1+3/2, -x+r_1+1/2 \\ 1-r_1-r_2, 3/2+\rho_1-r_1, 3/2+\rho_2-r_1 \end{matrix};1\right)$$

で表される．ただし，

$$\xi_n = \frac{n}{2(1/2+\rho_1-r_1)(1/2+\rho_2-r_1)}, \quad \eta_n = \frac{(n+1)/2+\rho_1+\rho_2-r_1-r_2}{(1/2+\rho_1-r_1)(1/2+\rho_2-r_1)}$$

である．しかしながら，Bannai-Ito 多項式に対して双対性からの議論はなされたが直交性などの議論がなされることはなかった．

本稿では，Bannai-Ito 多項式 [6, 7, 8, 9] およびその特殊化で得られる Big -1 Jacobi 多項式 [3, 4, 5] に関して，古典直交多項式としての性質および直交性について紹介する．さらに，Askey-Wilson 多項式を頂点とする Askey-Shceme における位置づけについても解説を加える．

2. Big -1 Jacobi 多項式

Bannai-Ito 多項式を扱う前に，その特殊化から得られる Big -1 Jacobi 多項式について議論する．まず，微分作用素と鏡映変換作用素

$$Rf(x) = f(-x) \tag{1}$$

を用いて表される作用素

$$L = F_0(x) + F_1(x)R + G_0(x)\partial_x + G_1(x)\partial_x R$$

について考える．Big -1 Jacobi 多項式列は，この L の多項式固有関数

$$LP_n = \lambda_n P_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\lambda_n \neq \lambda_m$ $(n \neq m)$ として特徴付けられる．ここで，L が多項式固有関数をもつための必要条件から，L は

$$\begin{aligned} &L = F(x)(1-R) + G(x)\partial_x R \\ &F(x) = -\frac{c}{x^2} + \frac{\beta - ac}{x} - \alpha - \beta - 1, \qquad G(x) = \frac{2(x-1)(x+c)}{x} \end{aligned} \tag{2}$$

に制限される．この L が n 次多項式を n 次多項式にうつすことが,

$$\begin{aligned} &Lx^n = \lambda_n x^n + O(x^{n-1}) \\ &\lambda_n = \begin{cases} 2n & n \text{ even} \\ -2(\alpha+\beta+n+1) & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

によって確かめられ，L の固有関数となる多項式列 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)\}_n$ が得られる．

次に，$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)$ の超幾何関数表示を導く．多項式空間 $\pi(x)$ の基底として，$\{x^n\}_n$ の代わりに

$$\phi_{2n}(x) = (x^2-1)^n, \quad \phi_{2n+1}(x) = (x-1)(x^2-1)^n$$

を選ぶと，L の基底 $\{\phi_n\}_n$ への作用は，固有値 λ_n を用いて

$$\begin{aligned} &L\phi_n = \lambda_n \phi_n(x) + \eta_n \phi_{n-1}(x) \\ &\eta_n = \begin{cases} 2n(c-1) & n \text{ even} \\ -2(c+1)(\alpha+n) & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

と表される．これにより，n 次の多項式である $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)$ の基底 $\{\phi_n\}_n$ よる展開

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c) = \sum_{s=0}^{n} A_{ns}\phi_s(x)$$

と，固有方程式 $LP_n^{(\alpha,\beta)}(x;c) = \lambda_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)$ を用いることにより，展開係数に関する漸化式

$$A_{n,s+1} = A_{n,s}\left(\frac{\lambda_n - \lambda_s}{\eta_{s+1}}\right)$$

が得られる．上記の議論から，n が偶数の場合,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c) = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{n+\alpha+\beta+2}{2} \\ \frac{\alpha+1}{2} \end{matrix}\right| \frac{1-x^2}{1-c^2}\right) + \frac{n(1-x)}{(1+c)(\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 1-\frac{n}{2}, \frac{n+\alpha+\beta+2}{2} \\ \frac{\alpha+3}{2} \end{matrix}\right| \frac{1-x^2}{1-c^2}\right)$$

n が奇数の場合

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{n-1}{2}, \frac{n+\alpha+\beta+1}{2} \\ \frac{\alpha+1}{2}\end{matrix}\middle|\frac{1-x^2}{1-c^2}\right) - \frac{(\alpha+\beta+n+1)(1-x)}{(1+c)(\alpha+1)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{n-1}{2}, \frac{n+\alpha+\beta+3}{2} \\ \frac{\alpha+3}{2}\end{matrix}\middle|\frac{1-x^2}{1-c^2}\right)$$

と具体的な表示が得られる．この多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)$ を Big -1 Jacobi 多項式と呼ぶ．

2.1. 直交性

Big -1 Jacobi 多項式の直交性は，$\alpha > -1, \beta > -1, 0 < c < 1$ を用いて，実軸上の積分として，

$$\int_{-1}^{-c} P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)P_m^{(\alpha,\beta)}(x;c)w(x)dx + \int_c^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c)P_m^{(\alpha,\beta)}(x;c)w(x)dx = h_n\delta_{n,m}, \quad h_n > 0, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{3}$$

で与えられる．ここで，重み関数 $w(x)$ は，

$$(w(x)L)^* = w(x)L$$

によって求めることができ，

$$w(x) = \frac{x}{|x|}(x+1)(x-c)(1-x^2)^{(\alpha-1)/2}(x^2-c^2)^{(\beta-1)/2}$$

である．

3. Bannai-Ito 多項式

Big -1 Jacobi 多項式を特徴付ける作用素を，微分作用素と鏡映変換作用素によって与えたが，その差分類似を考えるのは自然であろう．前節と同様に

$$LB_n(x) = \lambda_n B_n(x), \quad n = 0,1,2,\dots$$

の固有多項式について議論するのだが，ここでは，L として，シフト演算子

$$T^+ f(x) = f(x+1)$$

と鏡映変換作用素 R を用いた

$$L = F_0(x) + F_1(x)R + G_0(x)T^+ + G_1(x)T^+R$$

について考察する．

L が多項式固有関数をもつための必要条件から，L は

$$L = F(x)(I-R) + G(x)(T^+R - I) \tag{1}$$

$$G(x) = \frac{(x-r_1+1/2)(x-r_2+1/2)}{2x+1}, \quad F(x) = \frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)}{2x}$$

と制限される．ここで，r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 は定数であり，固有値は，

$$\lambda_n = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ is even} \\ r_1 + r_2 - \rho_1 - \rho_2 - (n+1)/2 & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases} \tag{2}$$

によって与えられる．Pochhammer 記法 $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ を用いて $\pi(x)$ の基底として，

$$\phi_{2n}(x) = (x-r_1+1/2)_n(-x-r_1+1/2)_n,$$
$$\phi_{2n+1}(x) = (x-r_1+1/2)_{n+1}(-x-r_1+1/2)_n,$$

を導入する．このとき，L の ϕ_n への作用は，

$$L\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) + \nu_n\phi_{n-1}(x) \tag{3}$$
$$\nu_n = \begin{cases} n(r_1+r_2-n/2)/2 & \text{if } n \text{ is even} \\ (\rho_1-r_1+n/2)(\rho_2-r_1+n/2) & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

と表される．これらの結果を用いることにより，この多項式列の超幾何関数表示は容易に計算でき，その表示から L の固有多項式と §1. の Bannai-Ito 多項式が一致することがわかる．すなわち，Bannai-Ito 多項式に対する新しい特徴付けを与えることができた．

3.1. 直交性

Bannai-Ito 多項式の直交性は，まず，$(\phi(x)L)^* = \phi(x)L$ をみたす $\phi(x)$ を求め，L の作用で不変な実軸上の離散点集合 (Bannai-Ito 格子) を導入することより与えられる．具体的には，N が偶数の場合，$2(r_2-\rho_2) = N+1$ かつ

$$x_s = -1/4 + (-1)^s(\rho_2+1/4+s/2), \quad s = 0,1,2,\ldots,N,$$
$$\phi(x) = -2(-1)^s\frac{\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(x-r_1+1/2)\Gamma(-x-r_1+1/2)\Gamma(x+1+\rho_1)}{\Gamma(x+1-\rho_2)\Gamma(x+r_2+1/2)\Gamma(-x+r_2+1/2)\Gamma(-x-\rho_2)},$$

N が奇数の場合，$2(r_1+r_2) = N+1$ かつ

$$x_s = -1/4 + (-1)^s(r_1-1/4-s/2), \quad s = 0,1,2,\ldots,N$$
$$\phi(x) = (-1)^s\frac{\Gamma(\rho_1-x)\Gamma(\rho_1+1+x)\Gamma(\rho_2-x)\Gamma(x+1+\rho_2)}{\Gamma(x+1/2+r_2)\Gamma(-x+r_2+1/2)\Gamma(x+r_1+1/2)\Gamma(-x+r_1+1/2)}$$

として，

$$\sum_{s=0}^{N}\phi(x_s)P_n(x_s)P_m(x_s) = \kappa_n^2\delta_{n,m}$$

が与えられる．ここで導入した Bannai-Ito 格子 $\{x_s\}_s$ は

$$-x_{2s} = x_{2s-1}, \quad -1-x_{2s} = x_{2s+1}, \quad s = 0,\pm1,\pm2,\cdots$$

をみたしており，$\{x_{2s}\}_s$ と $\{x_{2s+1}\}_s$ の２つの離散点集合の合併である．

4. 結言

最後に，Bannai-Ito 多項式の Askey-Scheme における位置づけについて簡単に述べておく．Bannai-Ito 多項式および Big -1 Jacobi 多項式は，Askey-Scheme に属する q 古典直交多項式の $q \to -1$ の極限によって導くこともできる．具体的には，Bannai-Ito 多項式および Big -1 Jacobi 多項式は，それぞれ q-Racah 多項式および Big q-Jacobi 多項式の $q \to -1$ 極限から得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{q\text{-Racah}} \arrow[rr, "q \to -1"] \arrow[d, "N \to \infty"'] & & \boxed{\text{Bannai-Ito}} \arrow[d, "N \to \infty"] \\
\boxed{\text{Big } q\text{-Jacobi}} \arrow[rr, "q \to -1"'] & & \boxed{\text{Big } -1 \text{ Jacobi}}
\end{tikzcd}
$$

Big q-Jacobi 多項式の $q \to -1$ 極限は，Big q-Jacobi 多項式の q-超幾何関数表示

$$p_n(x;a,b,c) = \kappa_n\,{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq, cq \end{matrix} \middle| q;q \right)$$

に $q = -\exp(\varepsilon)$, $a = -\exp(\varepsilon\alpha)$, $b = -\exp(\varepsilon\beta)$ を代入することで

$$P_n(x;\alpha,\beta,c) = \lim_{q\to -1} p_n(x;a,b,c)$$

を容易に示すことができる．q-Racah 多項式の $q \to -1$ 極限についても同様である．

また，本稿で紹介した Bannai-Ito 多項式および Big -1 Jacobi 多項式を固有関数とする作用素は，鏡映変換作用素が表れる点が他の古典直交多項式にない特徴である．本稿で触れることのできなかった Jordan 代数などの話題については参考文献 [6, 7, 8, 9] を参照していただきたい．

参考文献

[1] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their Q-analogues*, Springer-Verlag, 2010

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, 1984, Benjamin & Cummings, Mento Park, CA.

[3] L.Vinet and A.Zhedanov, *A “missing“ family of classical orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 085201. arXiv:1011.1669v2.

[4] L.Vinet and A.Zhedanov, *A limit $q = -1$ for big q-Jacobi polynomials*, arXiv:1011.1429v3 (to be published in Trans.Amer.Math.Soc.)

[5] L.Vinet and A.Zhedanov, *A Bochner theorem for Dunkl polynomials*, SIGMA, **7** (2011), 020; arXiv:1011.1457v3.

[6] S.Tsujimoto, L.Vinet and A.Zhedanov, *Dunkl shift operators and Bannai-Ito polynomials*, arXiv:1106.33512v2

[7] S.Tsujimoto, L.Vinet and A.Zhedanov, *Jordan algebras and orthogonal polynomials*, J. Math. Phys. **52** (2011), 103512, 8pp, arXiv:1108.3531

[8] S.Tsujimoto, L.Vinet and A.Zhedanov, *Dual -1 Hahn polynomials: “classical” polynomials beyond the Leonard duality*, arXiv:1108.0132v1

[9] S.Tsujimoto, L.Vinet and A.Zhedanov, *From $sl_q(2)$ to a parabosonic Hopf algebra*, SIGMA, **7** (2011), 093, 13pp, arXiv:1108.1603