q離散ドリンフェルト・ソコロフ階層とqパンルヴェ方程式

鈴木, 貴雄
大阪府立大学高等教育推進機構

https://doi.org/10.15017/23465

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (19), pp.135-140, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 19 (pp. 135 - 140)

q離散ドリンフェルト・ソコロフ階層と qパンルヴェ方程式

鈴木　貴雄（SUZUKI Takao）

（Received 8 January 2012; accepted 31 January 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

q 離散ドリンフェルト・ソコロフ階層と q パンルヴェ方程式

大阪府立大学 高等教育推進機構　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)

概 要

本研究では, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の q 離散化及びその相似簡約を考察することで, 高階の q 差分方程式系を導入する. この方程式系は $A^{(1)}_3$ の場合に神保・坂井の q-P_{VI} を含み, また q 超幾何函数 ${}_{n+1}\phi_n$ によって記述される特殊解を持つ.

1　序文

パンルヴェ方程式 P_{VI} の高階化の一つである $A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ方程式は, $2n$ 階ハミルトン系による表示を持つようなモノドロミー保存変形系であり [5, 8], 一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ によって記される特殊解を持つ [6, 9]. 本研究の目的は, この方程式系を上記の性質を保ったまま q 離散化することである.

$A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ方程式は, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層 (以下 DS 階層と記す) の相似簡約から導かれた. 本研究ではこの事実を利用して, DS 階層のある q 離散化に適切な相似簡約条件を課すことで, q 差分方程式系をラックス対の差分両立条件として導く. 具体的には, まず分割 (n^m) に付随する $A^{(1)}_{mn+1}$ 型 DS 階層の q 離散化を定式化し[1], その中から分割 $(n+1, n+1)$ に着目して[2], 相似簡約を $2n+2$ 次正方行列によるラックス形式として導く. このようにして得られる差分方程式系[3]は $n = 1$ の場合に q パンルヴェ方程式 q-P_{VI} [2] を含み, その事実はラックス対に関する q ラプラス変換 [1] を用いて示される. また n が一般の場合には, q 超幾何函数 ${}_{n+1}\phi_n$ によって記述される特殊解を持つことが, フロベニウスの方法からすぐに示される.

本稿では, q 離散ドリンフェルト・ソコロフ階層の定式化, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階 q パンルヴェ方程式の導出, そして q-P_{VI} の導出について述べる. q 超幾何函数解の詳細については [7] を参照のこと.

2　$A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階 q パンルヴェ方程式

本研究で扱う対象は, 次の高階 q パンルヴェ方程式 q-$P_{(n+1,n+1)}$ である[4]:

$$\begin{cases} x_i(t) - x_{i-1}(t) = \dfrac{a_i x_i(qt)}{1 + x_i(qt) y_{i-1}(t)} - \dfrac{b_{i-1} x_{i-1}(qt)}{1 + x_{i-1}(qt) y_{i-1}(t)} \\ y_i(qt) - y_{i-1}(qt) = \dfrac{b_i y_i(t)}{1 + x_i(qt) y_i(t)} - \dfrac{a_i y_{i-1}(t)}{1 + x_i(qt) y_{i-1}(t)} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n+1),$$

ただし

$$b_0 = \frac{b_{n+1}}{q}, \quad x_0(t) = t x_{n+1}(t), \quad y_0(t) = \frac{y_{n+1}(t)}{qt}, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i^{1/2} b_i^{-1/2} \frac{1 + x_i(qt) y_i(t)}{1 + x_i(qt) y_{i-1}(t)} = q^{-1/4}.$$

q-$P_{(n+1,n+1)}$ の重要な性質二つを以下に述べる.

定理 2.1. 双有理変換 r_j $(j = 0, \ldots, 2n+1)$ を次のように定義する:

$$r_{2j-1}(a_j) = b_j, \quad r_{2j-1}(b_j) = a_j, \quad r_{2j-1}(x_j(t)) = x_j(t) + \frac{a_j - b_j}{y_j(t) - y_{j-1}(t)},$$
$$r_{2j}(a_{j+1}) = b_j, \quad r_{2j}(b_j) = a_{j+1}, \quad r_{2j}(y_j(y)) = y_j(t) + \frac{b_j - a_{j+1}}{x_{j+1}(t) - x_j(t)}.$$

[1] 分割に対応するヤング図形が長方形にならない場合にも, 同じ方法で定式化出来るものと思われる.

[2] これは微分の場合と同様で, 2 成分変形 KP 階層の $(n+1, n+1)$ 周期簡約に対応している.

[3] この方程式系は, 見かけ上の階数が $2n+2$ で更に関係式を一つ含む. 従って微分の場合には変数分離法によって $2n$ 階のハミルトン系になるが, 差分の場合は現時点では $2n+1$ 階の方程式系となっている.

[4] この方程式系が連続極限 $q \to 1$ によって $A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ方程式に帰着することは, ラックス形式のレベルで確認済み.

また, 双有理変換 π を次のように定義する:

$$\pi(a_i)=b_i,\quad \pi(b_i)=a_{i+1},\quad \pi(x_i(t))=y_i(qt),\quad \pi(y_i(t))=x_{i+1}(qt)\quad (i\neq n+1),$$
$$\pi(a_{n+1})=b_{n+1},\quad \pi(b_{n+1})=qa_1,\quad \pi(x_{n+1}(t))=y_{n+1}(qt),\quad \pi(y_{n+1}(t))=\frac{x_1(qt)}{qt},\quad \pi(t)=\frac{1}{q^2t}.$$

この時, q-$P_{(n+1,n+1)}$ は $r_0,\dots,r_{2n+1},\pi$ の作用の下で不変であり, 更に双有理変換群 $\langle r_0,\dots,r_{2n+1},\pi\rangle$ は $A^{(1)}_{2n+1}$ 型拡大アフィン・ワイル群と同型である[5].

定理 2.2 ([7]). q-$P_{(n+1,n+1)}$ の下で次の特殊化を考える:

$$y_j(t)=0\quad (j=1,\dots,n+1),\qquad \prod_{i=1}^{n+1}a_i^{1/2}b_i^{-1/2}=q^{-1/4}.$$

この時, $\mathbf{x}(t)={}^t[x_1(t),\dots,x_{n+1}(t)]$ は次の線形差分方程式系[6]を満たす:

$$\mathbf{x}(q^{-1}t)=\left(A_0+\frac{A_1}{1-q^{-1}t}\right)\mathbf{x}(t),$$
$$A_0=\sum_{j=1}^{n}b_jE_{j,j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(b_j-a_j)E_{i,j},\quad A_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j-b_j)E_{i,j}.$$

次の定理により, q-$P_{(n+1,n+1)}$ は q-P_{VI} の高階化とみなすことが出来る.

定理 2.3. q-$P_{(2,2)}$ の下で, 従属変数 $x(t),y(t)$ を次のように与える[7]:

$$x(t)=\frac{t(x_2(t)-x_1(t))\xi_1(t)}{\xi_2(t)},\quad y(t)=\frac{x_2(qt)(qt+x_1(qt)y_2(t))\psi_1(t)}{(1+x_2(qt)y_2(t))\psi_2(t)},$$

ただし

$$\begin{aligned}
\xi_1(t)&=qtx_1(t)y_1(t)-x_1(t)y_2(t)-qtx_2(t)y_1(t)+x_2(t)y_2(t)-(b_1-a_1)qt,\\
\xi_2(t)&=(tx_2(t)-x_1(t))(x_2(t)-x_1(t))(y_2(t)-qty_1(t))\\
&\quad+(b_1-a_1)qtx_1(t)+\{(a_2-b_1)t-(a_2-a_1)\}qtx_2(t),\\
\psi_1(t)&=(1-\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{3/4}t)x_2(qt)y_2(t)+(1-\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{-1/4})qt,\\
\psi_2(t)&=a_2(1-\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{3/4}t)x_1(qt)x_2(qt)y_2(t)+(a_1-a_2\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{-1/4})qtx_1(qt)+(a_2-a_1)qtx_2(qt).
\end{aligned}$$

この時, $x(t),y(t)$ は q-P_{VI} を満たす.

第 5 節では, この定理をラックス対に対する q ラプラス変換を用いることで示す.

3 q 離散ドリンフェルト・ソコロフ階層とその相似簡約

ここでは, 分割 (n^m) に付随する $A^{(1)}_{mn-1}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の q 類似[8]を定式化する. なお, ここでの定式化は先行研究 [3, 4] に基づく.

[5] ただし, q-$P_{(n+1,n+1)}$ の対称性はまだ他にも存在する可能性が高い. 実際, この変換だけではフックス系のシュレジンガー変換から得られると推測される対称性の全てを作ることは出来ない.
[6] これは, q 超幾何函数 ${}_{n+1}\phi_n$ の満たす単独高階型方程式を一階連立型に変形したものと等価である.
[7] 方程式の対称性を上手く使えば, 実際にはもっと簡単な形で従属変数が与えられるものと期待される.
[8] 以下, これを単に q-DS 階層と呼ぶ.

まず, 次のような $mn \times mn$ 行列 Λ_i $(i=1,\ldots,m)$ を考える[9]:

$$\Lambda_i = \begin{array}{c} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ n \end{array} \overset{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array}}{\begin{pmatrix} O & \lambda E_i & O & \cdots & O \\ O & O & \lambda E_i & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \lambda E_i \\ \lambda E_i & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}}, \quad E_i = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \overset{\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & m \end{array}}{\begin{pmatrix} 0 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & 0 \end{pmatrix}}.$$

各 Λ_i に対応させて, 独立変数 t_i とその q 差分作用素 T_i を与える. この時, 行列値函数

$$G = G(t_1,\ldots,t_m)[\lambda,\lambda^{-1}] = \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{\infty}(I - q^{-k-1}\varepsilon t_i\Lambda_i)\right) G(0,\ldots,0)[\lambda,\lambda^{-1}],$$

は次の線形差分方程式系を満たす:

$$T_i(G) = (I - \varepsilon t_i \Lambda_i)G \quad (i=1,\ldots,m),$$

ただし $\varepsilon = 1-q$ とする. ここで, λ に関するバーコフ分解 $G = W^{-1}Z$ を行うと[10], 次の線形差分方程式系が得られる:

$$T_i(Z) = B_i Z, \quad B_i = T_i(W)(I - \varepsilon t_i\Lambda_i)W^{-1} \quad (i=1,\ldots,m).$$

これの差分両立条件から q-DS 階層が次の形で得られる:

$$T_i(B_j)B_i = T_j(B_i)B_j \quad (i,j=1,\ldots,m).$$

q-DS 階層の下で, 重み付け変数 λ についての次の条件を課す:

$$T_\lambda(W) = q^\rho T_1T_2\ldots T_m(W)q^{-\rho}, \quad \rho = \mathrm{diag}[\rho_1,\ldots,\rho_m,\rho_1,\ldots,\rho_m,\ldots,\rho_1,\ldots,\rho_m],$$

ただし $\rho_1+\ldots+\rho_m=0$, 行列 ρ は $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m$ の全てと可換となる. ここで波動函数を次のように定める:

$$\Psi = W\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{\infty}(I - q^{-k-1}\varepsilon t_i\Lambda_i)\right)\lambda^\rho.$$

この時, 次のラックス対が得られる:

$$T_\lambda(\Psi) = M\Psi, \quad T_i(\Psi) = B_i\Psi \quad (i=1,\ldots,m),$$

ただし

$$M = T_\lambda(W)q^\rho(1-\varepsilon t_1\Lambda_1)\ldots(1-\varepsilon t_m\Lambda_m)W^{-1}.$$

これの差分両立条件から, q-DS 階層の相似簡約が次の形で得られる:

$$T_i(M)B_i = T_\lambda(B_i)M \quad (i=1,\ldots,m).$$

[9] ここでの行列 Λ_i の選び方 (重み付け変数 λ の入れ方も含む) は, アフィン・リー代数の表現論に由来するものである. 具体的には, Λ_i がアフィン・リー代数のハイゼンベルグ部分代数の基底を構成する.

[10] ここでは 0 次の項の対角部分及び上三角部分が Z に, 下三角部分が W にそれぞれ含まれるとする. これは λ による重み付けとは少しだけ異なり, いわゆるプリンシパルグラデーションの場合と同じになっている.

分割 $(n+1,n+1)$ に対して上記の定式化を行うことで, q-$P_{(n+1,n+1)}$ が導かれる. その概要を以下に述べる. 行列 W は具体的に次のように与えられる:

$$W = I + \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & w_{2n+2}\lambda^{-1} \\ w_1 & 0 & & & & & & & \\ & w_2\lambda^{-1} & 0 & & & & & & \\ & & w_3 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & w_{2n}\lambda^{-1} & 0 & & \\ & & & & & & w_{2n+1} & 0 & \end{bmatrix} + \cdots.$$

このような W を用いて行列 M は

$$M = T_\lambda(W) q^\rho (1-\varepsilon t_1 \Lambda_1)(1-\varepsilon t_2 \Lambda_2) W^{-1}, \quad \rho = \mathrm{diag}[\rho_1, -\rho_1, \ldots, \rho_1, -\rho_1],$$

と与えられるので, これを計算すると行列 M は具体的に次のように表される:

$$M = I - \varepsilon \begin{bmatrix} \kappa_1 & \varphi_1 & q^{\rho_1}t_1\lambda & & & & & \\ & \kappa_2 & \varphi_2\lambda & q^{-\rho_1}t_2\lambda & & & & \\ & & \kappa_3 & \varphi_4 & & & & \\ & & & \kappa_4 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \kappa_{2n} & \varphi_{2n}\lambda & q^{-\rho_1}t_2\lambda \\ q^{\rho_1}t_1\lambda & & & & & & \kappa_{2n+1} & \varphi_{2n+1} \\ \varphi_{2n+2}\lambda & q^{-\rho_1}t_2\lambda & & & & & & \kappa_{2n+2} \end{bmatrix},$$

ただし, 対角成分 $\kappa_1, \ldots, \kappa_{2n+2}$ は定数パラメータとなり

$$\varphi_{2j-1} = q^{-\rho_1-1}t_2 w_{2j-2} - q^{\rho_1}t_1 w_{2j}; \quad w_0 = w_{2n+2}, \quad \varphi_{2j} = q^{\rho_1}t_1 w_{2j-1} - q^{-\rho_1}t_2 w_{2j+1}.$$

行列 B_1, B_2 は, 行列 W によって与えられる定義式

$$B_1 = T_1(W)(I-\varepsilon t_1\Lambda_1)W^{-1}, \quad B_2 = T_2(W)(I-\varepsilon t_2\Lambda_2)W^{-1}, \quad M = q^\rho T_2(B_1)B_2,$$

と従属変数についての相似簡約条件[11]

$$T_1T_2(w_{2j-1}) = q^{2\rho_1}w_{2j-1}, \quad T_1T_2(w_{2j}) = q^{-2\rho_1-1}w_{2j} \quad (j=1,\ldots,n+1),$$

を上手く組み合わせることで, 従属変数 $w_1, \ldots, w_{2n+2}$ とパラメータ $\kappa_1, \ldots, \kappa_{2n+2}$ との有理式として表すことが出来る[12].

ここで $t_2 = 1$ と特殊化し, 更に変数とパラメータのスケール変換

$$\begin{aligned} &t = q^{2n\rho_1}t_1^n, \quad a_j = q^{-\rho_1+j-1}(1-\varepsilon\kappa_{2j-1}), \quad b_j = q^{-\rho_1+j-1}(1-\varepsilon\kappa_{2j}), \\ &x_j(t) = q^{-2(j-1)\rho_1}t_1^{-j+1}w_{2j-1}, \quad y_j(t) = q^{(j-1)(2\rho_1+1)}t_1^j \varepsilon w_{2j}, \end{aligned}$$

及び差分間隔パラメータの置き換え $q^n \to q$ を行うことで, q-$P_{(n+1,n+1)}$ が導かれる.

[11] これにより, 相似簡約に含まれる独立変数は実質 t_1 のみとなる.
[12] 具体形についてはここでは省略する.

4 q-P_{VI} の導出

q-$P_{(2,2)}$ は次のラックス対[13]の差分両立条件として与えられる:

$$\Psi_4(qz,t) = M_4(z,t)\Psi_4(z,t), \quad \Psi_4(z,qt) = B_4(z,t)\Psi_4(z,t),$$

ただし

$$M_4(z,t) = \begin{bmatrix} a_1 & y_1(t)-y_0(t) & -1 & 0 \\ 0 & b_1 & x_2(t)-x_1(t) & -1 \\ -tz & 0 & a_2 & y_2(t)-y_1(t) \\ \{x_1(t)-x_0(t)\}z & -z & 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$B_4(z,t) = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{1+x_1(qt)y_0(t)} & y_1(t) & -1 & 0 \\ 0 & 1+x_1(qt)y_1(t) & -x_1(qt) & 0 \\ -tz & 0 & \frac{a_2}{1+x_2(qt)y_1(t)} & y_2(t) \\ -tx_2(qt)z & 0 & 0 & 1+x_2(qt)y_2(t) \end{bmatrix}.$$

このラックス対から, 神保・坂井によって与えられた q-P_{VI} のラックス対が導かれることを以下で示す.

まずゲージ変換 $\Psi(z,t) \to \Psi^*(z,t)$ によって係数行列を

$$\frac{1}{qa_1}M_4(z,t) = M^*_{4,0}(t) + zM^*_{4,1}(t), \quad \frac{1+x_1(qt)y_0(t)}{a_1}B_4(z,t) = B^*_{4,0}(t) + zB^*_{4,1}(t).$$

と変換する[14]. 次に q ラプラス変換

$$z\Psi^*_4(z) \to \frac{\Phi_4(\zeta)-\Phi_4(q^{-1}\zeta)}{\varepsilon\zeta}, \quad \Psi^*_4(qz) \to q^{-1}\Phi_4(q^{-1}\zeta),$$

及び変数変換 $\zeta \to z^{-1}$ を行うと, 最終的には次のように変換される:

$$\Phi_4(qz,t) = N_4(z,t)\Phi_4(z,t), \quad \Phi_4(z,qt) = C_4(z,t)\Phi_4(z,t),$$

ただし

$$\begin{aligned} N_4(z,t) &= I_4 - (I_4 + \varepsilon^{-1}qzM^*_{4,1}(t))^{-1}(I_4 - qM^*_{4,0}(t)), \\ C_4(z,t) &= B^*_{4,0}(t) + \varepsilon^{-1}zB^*_{4,1}(t)(I_4 - N_4(z,t)). \end{aligned}$$

この時次の補題が成り立つ[15].

補題 4.1. *$N_4(z,t)$ と $C_4(z,t)$ の第 1 列は基本ベクトル ${}^t[1,0,0,0]$ となる.*

これにより, 行列サイズを一つ落とした次のラックス対[16]が得られる:

$$\Psi_3(qz,t) = M_3(z,t)\Psi_3(z,t), \quad \Psi_3(z,qt) = B_3(z,t)\Psi_3(z,t),$$

ただし

$$M_3(z,t) = \frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} b_1 & x_2(t)-x_1(t) & -1 \\ m_{21}z & a_2 - \frac{t}{\varepsilon a_1}z & y_2(t)-y_1(t) \\ m_{31}z & m_{32}z & b_2 - \frac{1}{\varepsilon a_1}z \end{bmatrix},$$

$$B_3(z,t) = \frac{1+x_1(qt)y_0(t)}{a_1}\begin{bmatrix} 1+x_1(qt)y_1(t) & -x_1(qt) & 0 \\ b_{21}z & \frac{a_2}{1+x_2(qt)y_1(t)} - \frac{t}{\varepsilon a_1}z & y_2(t) \\ b_{31}z & b_{32}z & 1+x_2(qt)y_2(t) \end{bmatrix}.$$

[13] これは前節までで与えられたラックス対に, 更に適当なゲージ変換及び重み付け変数の変換 $z = q^{(1-4\rho_1)/2}(\epsilon\lambda)^2$ を行うことで得られる.

[14] このようなゲージ変換は, ラックス対の解の $(1,1)$ 成分をゲージパラメータとして用いることで, 理論上は可能である.

[15] 証明はほぼ自明で, 最初のゲージ変換で行列の $(1,1)$ 成分を上手く変えたことが効いている.

[16] これは筧・菊地によって与えられたラックス対 [3] と等価である.

係数 $m_{21}, m_{31}, m_{32}, b_{21}, b_{31}, b_{32}$ は従属変数の多項式として記述されるが, その具体形はここでは省略する.

一連の変換を再度行うことで[17], 2×2 行列による次のラックス対が得られる:

$$\Psi_2(q^{-1}z,t) = M_2(z,t)\Psi_2(z,t), \quad \Psi_2(z,qt) = B_2(z,t)\Psi_2(z,t),$$

ただし

$$M_2(z,t) = M_{2,\infty}(t) + \frac{M_{2,1}(t)}{z-1} + \frac{M_{2,t}(t)}{z-t}, \quad B_2(z,t) = B_{2,\infty}(t) + \frac{B_{2,t}(t)}{z-t},$$
$$M_{2,\infty}(t) = \frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_2 & y_2(t)-y_1(t) \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad B_{2,\infty}(t) = \frac{1}{1+x_1(qt)y_1(t)}\begin{bmatrix} \frac{a_2}{1+x_2(qt)y_1(t)} & y_2(t) \\ 0 & 1+x_2(qt)y_2(t) \end{bmatrix}.$$

これに適当なゲージ変換[18]を施すことで, 最終的に 2 階線形差分方程式系

$$Y(q^{-1}z,t) = \mathcal{A}(z,t)Y(z,t), \quad Y(z,t) = \frac{\mathcal{B}(z,q^{-1}t)}{z}Y(z,q^{-1}t),$$

で次の条件を満たすものが得られる:

$$\mathcal{A}(z,t) = \mathcal{A}_0(t) + z\mathcal{A}_1(t) + z^2\mathcal{A}_2, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_0(t) \text{ has eigenvalues } ta_1, tb_1,$$
$$\det\mathcal{A}(z,t) = a_2b_2(z-t)(z-\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{1/4}t)(z-1)(z-\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{-1/4}),$$
$$\mathcal{B}(z,q^{-1}t) = \mathcal{B}_0(q^{-1}t) + zI_2, \quad \det\mathcal{B}(z,q^{-1}t) = (z-q^{-1}t)(z-q^{-1}\sqrt{\frac{a_1b_1}{a_2b_2}}q^{1/4}t).$$

これは q-P_{VI} のラックス対と等価であり, よって定理 2.3 がすぐに従う[19].

参考文献

[1] W. Hahn, Beiträge zur theorie der heineschen reihen Math. Nachr. **2** (1949) 340-379.

[2] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation, Let. Math. Phys. **38** (1996) 145-154.

[3] S. Kakei and T. Kikuchi, A q-analogue of $\mathfrak{gl}_3$ hierarchy and q-Painlevé VI, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 12179-12190.

[4] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, q-Painlevé systems arising from q-KP hierarchy, Lett. Math. Phys. **62** (2003) 259-268.

[5] T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, Preprint (arXiv:1002.2685).

[6] T. Suzuki, A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$, SIGMA **6** (2010) 078.

[7] T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, Preprint (arXiv:1105.4240).

[8] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, MI Preprint Series **7** (Kyushu Univ., 2010) 1-31.

[9] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math., in press.

[17] 最後の変数変換だけは $\varepsilon^2 a_1 b_1 \zeta \to z$ と変える.

[18] 具体的には, $M_{2,\infty}(t)$ を対角化し, $B_{2,\infty}(t)$ を単位行列に変換した上で, $M_2(z,t)$ の分母を掛け算して消すような変換を行う.

[19] 論文 [2] に書かれてある通りに従属変数を取れば良い.