反復関数の共役性および準共役性によるSakaki-Kakei方程式の解の構成

近藤, 弘一
同志社大学理工学部電気工学科

https://doi.org/10.15017/23464

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (18), pp.127-134, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 18 (pp. 127 - 134)

反復関数の共役性および準共役性によるSakaki-Kakei方程式の解の構成

近藤　弘一（KONDO Koichi）

（Received 15 January 2012; accepted 27 February 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

反復関数の共役性および準共役性による Sakaki-Kakei 方程式の解の構成

同志社大学理工学部電気工学科　近藤弘一　(KONDO Koichi)

概　要　Sakaki-Kakei 方程式は超幾何関数で表される保存量をもつ 12 種類の 2 次元非可逆離散力学系である．本論文では，Sakaki-Kakei 方程式の解の構成法を解説する．保存量を求め，方程式を 1 次元化し，その反復関数がもつ共役性または準共役性を利用し一般解または特殊解を構成する．

1　はじめに

算術幾何平均アルゴリズム（AGM）は，2 次元離散方程式 $a_{n+1}=(a_n+b_n)/2, b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ であり，Gauss により詳細に調べられた（参照 [1]）．a_n, b_n はある初期値のとき，単調減少で第 1 種完全楕円積分 $K(k)$ に関連する値に 2 次収束する．AGM は $K(k)$ の値の計算に応用される．文献 [6] において Nakamura は，算術調和平均方程式

$$\text{AHM:}\quad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{1.1}$$

を解析した．AHM は初期値により解の挙動が大きく変化する．単調減少で 2 次収束，振動的に収束，可解カオスの場合である．また，これらの特殊解を含む一般解も導出されている [3].

文献 [7] において Sakaki-Kakei は，12 種類の 2 次元非可逆離散力学系

$$\text{SK1:}\quad a_{n+1}=a_n-b_n,\qquad b_{n+1}=\frac{-4a_nb_n}{a_n-b_n},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.2}$$

$$\text{SK2:}\quad a_{n+1}=a_n+b_n,\qquad b_{n+1}=\frac{4a_nb_n}{a_n+b_n},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

$$\text{SK3:}\quad a_{n+1}=\frac{(a_n+b_n)^2}{a_n-b_n},\qquad b_{n+1}=\frac{4a_nb_n}{a_n-b_n},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.4}$$

$$\text{SK4:}\quad a_{n+1}=\frac{a_n^2(a_n+b_n)^3}{(a_n-b_n)^4},\qquad b_{n+1}=\frac{-4a_n^3b_n(a_n+b_n)^3}{(a_n-b_n)^6},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.5}$$

$$\text{SK5:}\quad a_{n+1}=\frac{(2a_n-b_n)^2}{4a_n},\qquad b_{n+1}=\frac{{b_n}^2}{4a_n},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.6}$$

$$\text{SK6:}\quad a_{n+1}=\frac{4a_n(a_n-b_n)^2}{(2a_n-b_n)^2},\qquad b_{n+1}=\frac{-{b_n}^2(a_n-b_n)}{(2a_n-b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.7}$$

$$\text{SK7:}\quad a_{n+1}=\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n-b_n}}{2},\qquad b_{n+1}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_n-b_n}}{2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.8}$$

$$\text{SK8:}\quad a_{n+1}=a_n-4b_n,\qquad b_{n+1}=\frac{-27{a_n}^2b_n}{(a_n-4b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.9}$$

$$\text{SK9:}\quad a_{n+1}=\frac{a_n(9b_n-a_n)^2}{(a_n+3b_n)^2},\qquad b_{n+1}=\frac{-27b_n(a_n-b_n)^2}{(a_n+3b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.10}$$

$$\text{SK10:}\quad a_{n+1}=\frac{9a_n(a_n-b_n)^2}{(3a_n+b_n)^2},\qquad b_{n+1}=\frac{-b_n(9a_n-b_n)^2}{3(3a_n+b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.11}$$

$$\text{SK11:}\quad a_{n+1}=\frac{a_n(a_n+8b_n)}{(a_n-b_n)},\qquad b_{n+1}=\frac{64b_n(a_n-b_n)^2}{(a_n+8b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.12}$$

$$\text{SK12:}\qquad a_{n+1}=\frac{(a_n+b_n)^2}{a_n-b_n},\qquad b_{n+1}=\frac{16a_nb_n(a_n-b_n)}{(a_n+b_n)^2},\qquad n=0,1,2,\dots \tag{1.13}$$

を導出した．彼らは AGM, AHM の漸化式が超幾何関数の恒等式から導出されることに着目し，他のさまざまな恒等式から (1.2)–(1.13) を構成した．その結果，Sakai-Kakei 方程式は超幾何関数で表される保存則をもつ．しかし，[7] では解についての議論はない．著者は，[4], [5] において，Sakaki-Kakei 方程式の解についての様々な成果を得た．本論文では，その得られた解の導出方法を解説し，現状で残された課題を明示することを目的とする．

2 保存量と方程式の 1 次元化

Sakaki-Kakei 方程式は，超幾何関数 ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma|x)$ で表される保存則をもつ [7]．そのうち，SK3, SK5, SK6 の保存則はすべて $I_n=(a_n-b_n)^{-1/2}$ と簡単な式に変形できる [4]．しかし，これら以外の方程式の保存則を単純化することは容易ではない．そこで，別の方法で保存則の具体的な表示を求める．SK1 の方程式 (1.2) より，$a_{n+1}b_{n+1}=-4a_nb_n$ を得る．ここで，$a_0b_0=c$ とおくと，$a_nb_n=(-4)^nc$ が成り立つ．$c=a_nb_n/(-4)^n$ は初期値により定まる定数であり，SK1 の保存量となる．同様にして，AHM, SK1, SK2, SK3, SK5, …, SK12 の保存量はそれぞれ

$$c=a_nb_n,\quad c=\frac{a_nb_n}{(-4)^n},\quad c=\frac{a_nb_n}{4^n},\quad c=a_n-b_n,\quad c=a_n-b_n,\quad c=a_n-b_n, \tag{2.1}$$

$$c=4^na_nb_n,\quad c=\frac{{a_n}^2b_n}{(-27)^n},\quad c=\frac{b_n(a_n-b_n)^2}{(-27)^n},\quad c=a_n(a_n-b_n)^2,\quad c=\frac{{a_n}^2b_n}{64^n},\quad c=\frac{a_nb_n}{16^n} \tag{2.2}$$

と得られる．ただし，SK4 の保存量の単純化はまだ成功していない．(2.1)–(2.2) の保存量 c のうち，SK1, SK2, SK7, SK8, SK9, SK11, SK12 に関する保存量 c には n が陽に現れていることに注意する．また，(2.1)–(2.2) で得られた保存量 c と，[7] で示された超幾何関数で表される保存則 I_n との間の関係については，上記の SK3, SK5, SK6 を除いていまだ不明であり課題として残されている．

保存量 (2.1)–(2.2) を用いて，方程式 (1.1), (1.2)–(1.13) の変数の a_n または b_n のどちらか一方を消去し，2 次元から 1 次元の方程式へと変換する．AHM, SK1, SK2, SK3, SK5, …, SK12 の順に，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right),\qquad a_{n+1}=a_n-\frac{(-4)^nc}{a_n},\qquad a_{n+1}=a_n+\frac{4^nc}{a_n}, \tag{2.3}$$

$$a_{n+1}=\frac{(2a_n-c)^2}{c},\qquad a_{n+1}=\frac{(a_n+c)^2}{4a_n},\qquad a_{n+1}=\frac{4c^2a_n}{(a_n+c)^2}, \tag{2.4}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{{a_n}^2-\frac{c}{4^n}}}{2},\qquad a_{n+1}=a_n-4\frac{(-27)^nc}{{a_n}^2},\qquad b_{n+1}=\frac{(-27)^{n+1}c}{\left(4b_n+\sqrt{\frac{(-27)^nc}{b_n}}\right)^2}, \tag{2.5}$$

$$a_{n+1}=\frac{9c}{\left(4a_n-\sqrt{\frac{c}{a_n}}\right)^2},\qquad a_{n+1}=\frac{a_n({a_n}^3+8\cdot 64^nc)}{{a_n}^3-64^nc},\qquad a_{n+1}=\frac{({a_n}^2+16^nc)^2}{a_n({a_n}^2-16^nc)} \tag{2.6}$$

と変換される．(2.3)–(2.6) のうち，SK1, SK2, SK7, SK8, SK9, SK11, SK12 に関する方程式は非自励であることに注意する．これらをそれぞれ，従属変数変換 $a_n=2^n\tilde{a}_n$, $a_n=2^n\tilde{a}_n$, $a_n=\tilde{a}_n/2^n$, $a_n=3^n\tilde{a}_n$, $b_n=3^n/\tilde{b}_n$, $a_n=4^n\tilde{a}_n$, $a_n=4^n\tilde{a}_n$ により変形すると，それぞれ

$$\tilde{a}_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n-\frac{(-1)^nc}{\tilde{a}_n}\right),\qquad \tilde{a}_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n+\frac{c}{\tilde{a}_n}\right),\qquad \tilde{a}_{n+1}=\tilde{a}_n+\sqrt{{\tilde{a}_n}^2-c}, \tag{2.7}$$

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\tilde{a}_n - 4\frac{(-1)^n c}{\tilde{a}_n{}^2}\right), \qquad \tilde{b}_{n+1} = \frac{\left(\frac{4}{\tilde{b}_n} + \sqrt{(-1)^n c\tilde{b}_n}\right)^2}{9(-1)^{n+1}c}, \qquad \tilde{a}_{n+1} = \frac{\tilde{a}_n(\tilde{a}_n{}^3+8c)}{4(\tilde{a}_n{}^3-c)}, \tag{2.8}$$

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{(\tilde{a}_n{}^2+c)^2}{4\tilde{a}_n(\tilde{a}_n{}^2-c)} \tag{2.9}$$

と変換される．(2.7)–(2.9) のうち，SK2, SK7, SK11, SK12 に関する方程式は自励化されるが，SK1, SK8, SK9 に関する方程式は，符号の反転の項 $(-1)^n$ が含まれており，自励化はされない．

3　AHM の一般解と SK2 の一般解

Sakaki-Kakei 方程式のうち SK2, SK3, SK5, SK6, SK7 の一般解は，AHM の一般解より導出される [4, 5]．AHM の一般解は，[3] において初めて構成されたが，この解は行列式を用いており，解の 1 価性の議論には不向きである．そこで，1 次元カオス力学系の理論で利用される写像の共役性を用いて，AHM の一般解を再構成する [4]．方程式 (2.3) の第 1 式より，反復関数を

$$\Phi_c(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \tag{3.1}$$

と定義すると，1 次元化された AHM は $a_{n+1} = \Phi_c(a_n)$ と表される．このとき，Φ_c は

$$\Phi_c = \phi_c^{-1} \circ x^2 \circ \phi_c, \quad \phi_c(x) = \frac{x-\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}, \quad \phi_c^{-1}(x) = \sqrt{c}\frac{1+x}{1-x} \tag{3.2}$$

をみたす．ただし，$c<0$ のとき，$\sqrt{c}$ は $\sqrt{c} = i\sqrt{-c}$ として 1 価関数として扱う．ここで，i は虚数単位である．関係式 (3.2) において，$\phi_c : X \to Y$ が同相写像のとき，写像 $\Phi_c : X \to X$ は写像 $x^2 : Y \to Y$ と共役であるという（参照 [2, p. 172]）．無限遠点を加えた実数の集合 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, 純虚数の集合 $T = \{z \in \mathbb{C} | z = iy, y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$, 複素平面上の単位円 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ を導入すると，次の定理を得る．ただし，$c = \pm 1$ の場合の結果は，古くから知られている（Cayley, 1879）．

定理 1．（Kondo, [4]）写像 $\Phi_c : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ は，$c>0$ のとき，$x^2 : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ と共役であり，$c<0$ のとき，$x^2 : S^1 \to S^1$ と共役である．また，写像 $\Phi_c : T \to T$ は，$c>0$ のとき，$x^2 : S^1 \to S^1$ と共役であり，$c<0$ のとき，$x^2 : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ と共役である．

定理 1 と関係式 (3.2) より，AHM の一般解は

$$a_n = (\underbrace{\Phi_c \circ \Phi_c \circ \cdots \circ \Phi_c}_{n})(a_0) = (\phi_c^{-1} \circ \underbrace{x^2 \circ x^2 \circ \cdots \circ x^2}_{n} \circ \phi_c)(a_0) = (\phi_c^{-1} \circ x^{2^n} \circ \phi_c)(a_0) \tag{3.3}$$

と求まる．さらに，(2.1) の第 1 式の $b_n = c/a_n$ を用いると，次の定理を得る．

定理 2．（Kondo, [4]）$n = 0, 1, 2, \ldots$ において，AHM の一般解は

$$a_n = \sqrt{c}\frac{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}, \quad b_n = \sqrt{c}\frac{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}, \quad \lambda_1 = a_0 + \sqrt{c}, \quad \lambda_2 = a_0 - \sqrt{c}, \quad c = a_0 b_0. \tag{3.4}$$

また，解 a_n の挙動は，(3.3) を用いると，初期値 a_0 の値により分類できる．$\mu = \phi_c(a_0)$ とおくと，$|\mu| < 1$ のとき収束，$|\mu| > 1$ のとき発散，μ が負の実数のとき振動，μ が虚数かつ $|\mu| = 1$ のときカオス，$\mu = 0, 1$ のとき不動点となる．

SK2 の一般解を求める．1 次元化された SK2 である (2.7) の第 2 式は，$\tilde{a}_{n+1} = \Phi_c(\tilde{a}_n)$ と表される．よって，定理 2 と $a_n = 2^n \tilde{a}_n$ と (2.1) の第 3 式の $b_n = 4^n c/a_n$ より，次の定理を得る．

定理 3．（Kondo, [5]）$n = 0, 1, 2, \ldots$ において，SK2 の一般解は

$$a_n = 2^n\sqrt{c}\frac{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}, \quad b_n = 2^n\sqrt{c}\frac{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}, \quad \lambda_1 = a_0 + \sqrt{c}, \quad \lambda_2 = a_0 - \sqrt{c}, \quad c = a_0 b_0. \tag{3.5}$$

4 SK3, SK5, SK6 の一般解

SK3, SK5, SK6 の一般解を求める．(2.4) の 3 つの方程式は，反復関数を

$$\Phi_c^{(3)}(x) = \frac{(2x-c)^2}{c}, \qquad \Phi_c^{(5)}(x) = \frac{(x+c)^2}{4x}, \qquad \Phi_c^{(6)}(x) = \frac{4c^2x}{(x+c)^2}, \tag{4.1}$$

と定義すると，それぞれ $a_{n+1} = \Phi_c^{(3)}(a_n), a_{n+1} = \Phi_c^{(5)}(a_n), a_{n+1} = \Phi_c^{(6)}(a_n)$ と表される．(3.1) の AHM の反復関数 Φ_c と (4.1) の SK3, SK5, SK6 の反復関数は，関数 $\eta_c^{(3)}(x) = cx^2/(x^2-1), \eta^{(5)}(x) = x^2$, $\eta^{(6)}(x) = 1/x^2$ を導入すると，関係式

$$\eta_c^{(3)} \circ \Phi_1 = \Phi_c^{(3)} \circ \eta_c^{(3)}, \quad \eta^{(5)} \circ \Phi_c = \Phi_c^{(5)} \circ \eta^{(5)}, \quad \eta^{(6)} \circ \Phi_{1/c} = \Phi_c^{(6)} \circ \eta^{(6)} \tag{4.2}$$

をみたす．関係式 (4.2) において，写像 $\eta_c^{(j)} : Y \to X$ が連続で，かつ高々m 対 1 の上への写像であるとき，写像 $\Phi_c : X \to X$ は写像 $\Phi_c^{(j)} : Y \to Y$ と準共役であるという（参照 [2, p. 125]）．集合 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} \cup \{\infty\}, \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\} \cup \{\infty\}, U_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \geq 1\} \cup \{\infty\}, D_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x < +\infty\} \cup \{\infty\}, D_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}, cD = \{cx \in \mathbb{R} \,|\, x \in D\}$ を導入すると，次の定理を得る．

定理 4．（Kondo, [4]）(i) 写像 $\Phi_1 : U_1 \to U_1$ は写像 $\Phi_c^{(3)} : cD_1 \to cD_1$ と準共役であり，写像 $\Phi_1 : T \to T$ は写像 $\Phi_c^{(3)} : cD_2 \to cD_2$ と準共役である．(ii) 写像 $\Phi_c : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ は写像 $\Phi_c^{(5)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ と準共役であり，写像 $\Phi_c : T \to T$ は写像 $\Phi_c^{(5)} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ と準共役である．(iii) 写像 $\Phi_{1/c} : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ は写像 $\Phi_c^{(6)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ と準共役であり，写像 $\Phi_{1/c} : T \to T$ は写像 $\Phi_c^{(6)} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ と準共役である．

SK3 の一般解を求める．まず定理 2 より，$\hat{a}_n$ を $c = 1$ の場合の AHM の一般解とすると，$\hat{a}_{n+1} = \Phi_1(\hat{a}_n)$ が成り立つ．両辺に $\eta_c^{(3)}$ を作用させ，$\eta_c^{(3)}(\hat{a}_{n+1}) = \eta_c^{(3)}(\Phi_1(\hat{a}_n))$ を得る．(4.2) の第 1 式より，$\eta_c^{(3)}(\hat{a}_{n+1}) = \Phi_c^{(3)}(\eta_c^{(3)}(\hat{a}_n))$ となる．$a_n = \eta_c^{(3)}(\hat{a}_n)$ とおくと，$a_{n+1} = \Phi_c^{(3)}(a_n)$ が成り立つ．よって，a_n は SK3 の解となる．ここで，SK3 の初期値 a_0 に対し AHM の初期値 $\hat{a}_0$ は，$a_0 = \eta_c^{(3)}(\hat{a}_0)$ をみたす定数である．写像 $\eta_c^{(3)}$ は 2 対 1 写像なので，$\hat{a}_0$ の取り得る値は 2 価となるが，定理 4 より a_n は必ず 1 価となる．SK5, SK6 も同様に一般解が求められる．(2.1) の第 4–6 式の $b_n = a_n - c$ を用いると，次の定理を得る．

定理 5．（Kondo, [4]）$n = 0, 1, 2, \ldots$ において，SK3, SK3, SK6 の一般解はそれぞれ

$$a_n = \frac{c}{4}\left(\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}\right)^2, \quad b_n = \frac{c}{4}\left(\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}\right)^2, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{b_0}}{\sqrt{c}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0}}{\sqrt{c}}, \tag{4.3}$$

$$a_n = \sqrt{c}\left(\frac{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}\right)^2, \quad b_n = a_n - c, \quad \lambda_1 = \sqrt{a_0} + \sqrt{c}, \quad \lambda_2 = \sqrt{a_0} - \sqrt{c}, \tag{4.4}$$

$$a_n = \sqrt{c}\left(\frac{\lambda_1{}^{2^n} + \lambda_2{}^{2^n}}{\lambda_1{}^{2^n} - \lambda_2{}^{2^n}}\right)^{-2}, \quad b_n = a_n - c, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{c}} \tag{4.5}$$

である．ただし，すべての解で $c = a_0 - b_0$ とおく．

5 SK7 の一般解

SK7 の一般解を求める．(2.7) の第 3 式より，1 次元化された SK7 の方程式は，反復関数を $\Phi_c^{(7)}(x) = x + \sqrt{x^2 - c}$ とおくと，$\tilde{a}_{n+1} = \Phi_c^{(7)}(\tilde{a}_n)$ と表される．(3.1) の AHM の反復関数 Φ_c は 2 対 1 写像であり，その逆関数は 2 つの枝をもつ．集合 $U_c = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| > \sqrt{c}\}, U_c' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| > \sqrt{\max(0,c)}\}$, $T_c = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < \sqrt{c}\}$ と関数

$$\hat{\Phi}_c(x) = x + \mathrm{sgn}(x)\sqrt{x^2 - c}, \quad \tilde{\Phi}_c(x) = x - \mathrm{sgn}(x)\sqrt{x^2 - c}, \quad \mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} \tag{5.1}$$

を導入すると，写像 $\Phi_c : U_c \to U_c'$ の逆写像は $\hat{\Phi}_c : U_c' \to U_c$ であり，写像 $\Phi_c : T_c \to U_c'$ の逆写像は $\tilde{\Phi}_c : U_c' \to T_c$ である．よって，SK7 の反復関数 $\Phi_c^{(7)}$ は Φ_c の逆写像の枝の一つの $\hat{\Phi}_c$ と等しい．また，(3.2) より関係式 $\Phi_c^{(7)} = \phi_c^{-1} \circ \sqrt{x} \circ \phi_c$ を得る．集合 $S_m = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid -m\pi/2 < \theta < 0\}, m = 1,2$ を導入すると，$c > 0$ のとき，写像 $\Phi_c^{(7)} : (\sqrt{c}, \infty) \to (\sqrt{c}, \infty)$ は写像 $\sqrt{x} : (0,1) \to (0,1)$ と共役であり，$c < 0$ のとき，写像 $\Phi_c^{(7)} : (0,\infty) \to (\sqrt{-c}, \infty)$ は写像 $\sqrt{x} : S_2 \to S_1$ と共役であることが示される．従属変数変換 $\tilde{a}_n = 2^n a_n$ と，(2.2) の第 1 式の $b_n = 4^{-n} c / a_n$ を用いると，次の定理を得る．

定理 6．（Kondo, [5]）初期値が $a_0 \geq 0, a_0 \geq b_0$ のとき，$n = 0,1,2,\ldots$ において $a_n \geq 0, a_n - b_n \geq 0$ が成り立ち，a_n, b_n は実数である．$c = a_0 b_0$ とおく．$n = 0,1,2,\ldots$ において，SK7 の一般解は

$$a_n = 2^{-n}\sqrt{c}\frac{{\lambda_1}^{1/2^n} + {\lambda_2}^{1/2^n}}{{\lambda_1}^{1/2^n} - {\lambda_2}^{1/2^n}}, \quad b_n = 2^{-n}\sqrt{c}\frac{{\lambda_1}^{1/2^n} - {\lambda_2}^{1/2^n}}{{\lambda_1}^{1/2^n} + {\lambda_2}^{1/2^n}}, \quad \lambda_1 = a_0 + \sqrt{c}, \quad \lambda_2 = a_0 - \sqrt{c}. \tag{5.2}$$

6 SK12, SK1, SK11 の特殊解

SK12 の特殊解を求める．いま，可解カオス系として提案された Umeno 方程式 [8],

$$x_{n+1} = \frac{4x_n(1-x_n)(1-\ell x_n)(1-mx_n)}{1 + A{x_n}^2 + B{x_n}^3 + C{x_n}^4} \tag{6.1}$$

を考える．ただし，$A = -2(\ell + m + \ell m), B = 8\ell m, C = \ell^2 + m^2 - 2\ell m - 2\ell^2 m - 2\ell m^2 + \ell^2 m^2, -\infty < m \leq \ell < 1$ である．Umeno 方程式は初期値が $0 \leq x_0 \leq 1$ のとき，特殊解

$$x_n = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2(2^n\sigma; k)}{\ell - m \operatorname{dn}^2(2^n\sigma; k)}, \quad k = \sqrt{\frac{\ell - m}{1 - m}} \tag{6.2}$$

をもつ．ただし，$\operatorname{sn}(x;k), \operatorname{dn}(x;k)$ は Jacobi の楕円関数であり，σ は初期値により定まる定数である．(6.1) と (6.2) において $\ell = 0, m = -1$ とおくと，

$$x_{n+1} = \frac{4x_n(1-{x_n}^2)}{(1+{x_n}^2)^2}, \quad x_n = \frac{\operatorname{sn}^2(2^n\sigma; 2^{-1/2})}{2\operatorname{dn}^2(2^n\sigma; 2^{-1/2})} \tag{6.3}$$

となる．ここで，1 次元化された SK12 の方程式 (2.9) は，$c > 0$ かつ $\tilde{a}_0 \geq \sqrt{c}$ のとき，$\tilde{a}_n = \sqrt{c}/x_n$ とおくと，(6.3) の第 1 式と一致する．このとき，SK12 の特殊解は (6.3) の第 2 式より

$$\tilde{a}_n = \frac{\sqrt{c}}{x_n} = \frac{\sqrt{c}}{\operatorname{sl}^2(2^n\sigma)} = F_c(n, \tilde{a}_0), \quad F_c(n,\alpha) = \frac{\sqrt{c}}{\operatorname{sl}^2(2^n\mu_c(\alpha))}, \quad \mu_c(\alpha) = \operatorname{sl}^{-1}\frac{c^{1/4}}{|\alpha|^{1/2}} \tag{6.4}$$

と表される．ここで，$\operatorname{sl}(x)$ はレムニスケートの楕円関数であり，

$$\operatorname{sl}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad \operatorname{sl}(x) = \operatorname{sn}(x,i) = \frac{\operatorname{sn}(\sqrt{2}x, 2^{-1/2})}{\sqrt{2}\operatorname{dn}(\sqrt{2}x, 2^{-1/2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sd}\left(\sqrt{2}x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{6.5}$$

などの性質をもつ．

他の初期条件の特殊解を求める．(2.9) の 1 次元化された SK12 は，反復関数を

$$\Psi_c(x) = \frac{(x^2+c)^2}{4x(x^2-c)} \tag{6.6}$$

とおくと，$\tilde{a}_{n+1} = \Psi_c(\tilde{a}_n)$ と表される．このとき，Ψ_c は関係式

$$\Psi_c = \Phi_c \circ \Phi_{-c} \tag{6.7}$$

表 1: 本論文のまとめ

方程式	(i) 保存量	(ii) 1 次元化	(iii) 解	(iv) 解の型	(v) 共役／準共役な方程式
SK1	○	非自励	○	sl	Umeno with $l=0$, $m=-1$
SK2	○	非自励	◎	cot, coth	AHM
SK3	◎	自励	◎	sin	AHM with $c=1$, logistic
SK4	—	—	—	—	—
SK5	◎	自励	◎	cot, coth	AHM
SK6	◎	自励	◎	cot, coth	AHM with $1/c$
SK7	○	非自励	◎	coth	inverse of AHM
SK8	○	非自励	—	—	—
SK9	○	非自励	—	—	—
SK10	○	自励	—	—	—
SK11	○	非自励	△	楕円関数	formaly Umeno
SK12	○	非自励	○	sl	Umeno with $l=0$, $m=-1$

をみたす．ただし，Φ_c は (3.1) の AHM の反復関数である．(6.7) は任意の c で成立するので，$\Psi_{-c}=\Phi_{-c}\circ\Phi_c$ と書ける．両辺に Φ_c を作用させると，$\Phi_c\circ\Psi_{-c}=\Phi_c\circ\Phi_{-c}\circ\Phi_c$ となり，(6.7) を用いると，

$$\Phi_c\circ\Psi_{-c}=\Psi_c\circ\Phi_c \tag{6.8}$$

を得る．写像 Φ_c は 2 対 1 かつ連続な写像であるから，次の定理を得る．

定理 7．（Kondo, [5]）$c\neq 0$ のとき，写像 $\Psi_{-c}:\bar{\mathbb{R}}\to\bar{\mathbb{R}}$ は写像 $\Psi_c:\bar{\mathbb{R}}\to\bar{\mathbb{R}}$ と準共役である．

定理 7 より，SK12 の反復関数 Ψ_c は自己準共役性をもつ．準共役性は，別の方程式から解の構成を可能とする．いま，$c<0$ のとき，方程式 $\tilde{a}_{n+1}=\Psi_c(\tilde{a}_n)$ の特殊解を求める．まず，別の方程式 $\hat{a}_{n+1}=\Psi_{-c}(\hat{a}_n)$, $-c>0$ の解を (6.4) より $\hat{a}_n=F_{-c}(n,\hat{a}_0)$ と導入する．ただし，初期値の条件は $|\hat{a}_0|>\sqrt{-c}$ である．方程式の両辺に Φ_c を作用させ，(6.8) を用いると，$\Phi_c(\hat{a}_{n+1})=\Phi_c(\Psi_{-c}(\hat{a}_n))=\Psi_c(\Phi_c(\hat{a}_n))$ となる．$\tilde{a}_n=\Phi_c(\hat{a}_n)$ とおくと，$\tilde{a}_{n+1}=\Psi_c(\tilde{a}_n)$ が成り立つ．よって，$\tilde{a}_n$ は $c<0$ のときの特殊解である．ただし，$\hat{a}_0$ は $\tilde{a}_0=\Phi_c(\hat{a}_0)$ をみたす定数である．Φ_c の逆写像は 2 つの枝をもつが，定理 7 より，どちらの枝でも解 $\tilde{a}_n$ は 1 価に定まる．そこで，(5.1) の第 1 式を用いて $\hat{a}_0=\hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0)$ とする．初期値の条件は $|\hat{a}_0|>\sqrt{-c}$ より $\tilde{a}_0\neq 0$ となる．よって，解は $\tilde{a}_n=\Phi_c(F_{-c}(n,\hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0)))$ と求まる．以上をまとめると，次の定理を得る．

定理 8．（Kondo, [5]）$c=a_0b_0$, $s=\mathrm{sgn}(a_0)$, $f_1(x)=\mathrm{sl}^2(x)$, $f_2(x)=2\,\mathrm{sl}^2(x)/(1-\mathrm{sl}^4(x))$ とおく．$n=0,1,2,\ldots$ において，SK12 の特殊解は，初期値が $a_0b_0>0$, $|a_0|\geq|b_0|>0$ のとき，

$$a_n=s\frac{4^n\sqrt{c}}{f_1(2^n\sigma)},\quad b_n=s4^n\sqrt{c}f_1(2^n\sigma),\quad \sigma=\mathrm{sl}^{-1}\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{1/4}, \tag{6.9}$$

初期値が $a_0b_0<0$ のとき，

$$a_n=s\frac{4^n\sqrt{-c}}{f_2(2^n\sigma)},\quad b_n=-s4^n\sqrt{-c}f_2(2^n\sigma),\quad \sigma=\mathrm{sl}^{-1}\sqrt{\sqrt{1-\frac{a_0}{b_0}}-\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}}. \tag{6.10}$$

SK1 の特殊解を求める．1 次元化された SK1 は (2.7) の第 1 式である．従属変数変換によっても符号の反転の項 $(-1)^n$ は消去されず，自励化はされない．(3.1) の AHM の反復関数 Φ_c を用いると，1

次元化されたSK1は$\tilde{a}_{n+1} = \Phi_{c_n}(\tilde{a}_n), c_n = (-1)^{n+1}c$と表される．ここで，写像$\tilde{a}_{2n} \mapsto \tilde{a}_{2n+2}$を考える．このとき，(6.7)より$\Psi_c = \Phi_c \circ \Phi_{-c}$であるから，$\tilde{a}_{2n+n} = \Phi_c(\Phi_{-c}(\tilde{a}_{2n})) = \Psi_c(\tilde{a}_{2n})$が成り立つ．解$\tilde{a}_{2n}$は定理8のSK12の特殊解から求まり，解$\tilde{a}_{2n+1}$は$\tilde{a}_{2n+1} = \Phi_{-c}(\tilde{a}_{2n})$から求まる．よって，$c>0$かつ$|\tilde{a}_0| \geq \sqrt{c}$のときは，(6.4)より$\tilde{a}_{2n} = F_c(n, \tilde{a}_0), \tilde{a}_{2n+1} = \Phi_{-c}(F_c(n, \tilde{a}_0))$である．$c<0$かつ$\tilde{a}_0 \neq 0$のときは，定理8より$\tilde{a}_{2n} = \Phi_c(F_{-c}(n, \hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0))), \tilde{a}_{2n+1} = \Phi_{-c}(\Phi_c(F_{-c}(n, \hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0))))$である．(6.7)と$\Psi_{-c}(F_{-c}(n, \alpha)) = F_{-c}(n+1, \alpha)$を用いると，$\tilde{a}_{2n+1} = \Psi_{-c}(F_{-c}(n, \hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0))) = F_{-c}(n+1, \hat{\Phi}_c(\tilde{a}_0))$と変形される．以上をまとめると次の定理を得る．

定理 9．（Kondo, [5]）$c = a_0b_0$, $s = \mathrm{sgn}(a_0)$, $f_1(x) = \mathrm{sl}^2(x)$, $f_2(x) = 2\,\mathrm{sl}^2(x)/(1 - \mathrm{sl}^4(x))$とおく．$n = 0, 1, 2, \ldots$において，SK1の特殊解は，初期値が$a_0b_0 > 0, |a_0| \geq |b_0| > 0$のとき，

$$a_{2n} = s\frac{4^n\sqrt{c}}{f_1(2^n\sigma)}, \quad b_{2n} = s4^n\sqrt{c}f_1(2^n\sigma), \quad a_{2n+1} = s\frac{2^{2n+1}\sqrt{c}}{f_2(2^n\sigma)}, \quad b_{2n+1} = -s2^{2n+1}\sqrt{c}f_2(2^n\sigma) \tag{6.11}$$

である．ただし，σは(6.9)の第3式と等しい．初期値が，$a_0b_0 < 0$のとき，

$$a_{2n} = s\frac{4^n\sqrt{-c}}{f_2(2^n\sigma)}, \qquad b_{2n} = -s4^n\sqrt{-c}f_2(2^n\sigma), \tag{6.12}$$

$$a_{2n+1} = s\frac{2^{2n+1}\sqrt{-c}}{f_1(2^{n+1}\sigma)}, \qquad b_{2n+1} = s2^{2n+1}\sqrt{-c}f_1(2^{n+1}\sigma) \tag{6.13}$$

である．ただし，σは(6.10)の第3式と等しい．

定理8，定理9では，初期値が$a_0b_0 > 0, |a_0| < |b_0|$のときの特殊解が含まれないことに注意する．また，SK12, SK1のそれぞれにおいて，特殊解をすべて含む一般解を求めることが課題となる．

SK11についての課題を述べる．(2.8)の第3式は1次元化されたSK11である．$c>0$のとき，

$$\tilde{a}_n = \frac{\sqrt{c}}{x_n}, \quad x_{n+1} = \frac{4x_n(1 - {x_n}^3)}{1 + 8{x_n}^3} \tag{6.14}$$

が成り立つ．(6.14)の第2式は，(6.1)において，$\ell = (1 - \sqrt{3}i)/2, m = (1 + \sqrt{3}i)/2$とおいた方程式と一致し，楕円関数解(6.2)の母数が$k = ((3 - \sqrt{3}i)/2)^{1/2}$の場合が形式的には解となる．しかし，$x_n$の値域は実数区間$[0,1]$とはならない．値域を詳細に調べ特殊解を求めることが課題となる．

7　まとめ

本論文では[4], [5]で示されたSakaki-Kakei方程式の解の構成方法を示すとともに，いまだ残された課題を総括することを目的とした．すべての結果の概観を表1にまとめる．(i) Sakaki-Kakei方程式の保存量I_nは超幾何関数で表される．そのうち，SK3, KS5, SK6の保存量I_nは簡単な表示に変形可能である．それ以外はSK4を除いて，方程式より直接的に保存量cが求まる．しかしながら，得られた保存量cと超幾何関数で表された保存量I_nとの関係は不明であり課題となる．(ii) 保存量cにより方程式の1次元化が可能である．1次元化された方程式は自励系と非自励系に分かれる．(iii) SK2, SK3, SK5, SK6, SK7に関しては一般解が得られた．SK1, SK12に関しては特定の初期条件における特殊解が得られた．SK11に関しては形式的には特殊解が得られた．特殊解が得られた方程式に関しても一般解を求めることが残された課題である．また，SK4, SK8, SK9, SK10に関しては解を求める糸口が見つかっていない．何らかの新たなアプローチが必要である．(iv) 特殊解が得れた結果，方程式ごとに解の型が異なることが示された．(v) 様々な変数変換を介して，既知の可解な方程式との関係が示された．以上の結果より，方程式の可解性と超幾何関数の関数等式との関係を明らかにし，方程式相互の関係を明白にすることが発展課題となる．

参考文献

[1] D. A. Cox: “The arithmetic-geometric mean of Gauss”, L’Enseignement Mathématique **30** (1984), 275–330.

[2] R. L. Devaney: A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1992.

[3] K. Kondo, Y. Nakamura: “Determinantal solutions of solvable chaotic systems”, J. of Comput. and Appl. Math. **145** (2002), 361–372.

[4] K. Kondo: “Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 3, 5 and 6”, JSIAM Letters **2** (2010), 73–76.

[5] K. Kondo: “Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 1, 2, 7 and 12”, JSIAM Letters **3** (2011), 45–48.

[6] Y. Nakamura: “Algorithms associated with arithmetic, geometric and harmonic means and integrable systems”, J. of Comp. and Appl. Math. **131** (2001) 161–174.

[7] 榊 武史，筧三郎: “超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式”, 日本応用数理学会論文誌 **17** (2007), 455–462.

[8] K. Umeno: “Method of constructing exactly solvable chaos”, Phys. Rev. E **55** (1997), 5280–5284.