

## KPZ普遍クラスにおける厳密解

今村, 卓史  
東京大学先端科学技術研究センター

<https://doi.org/10.15017/23463>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (17), pp.115-126, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7  
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)  
共催 九州大学グローバル COE プログラム  
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

*Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and  
mathematical aspects*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by  
*Kyushu University Global COE Program*  
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 17 (pp. 115 - 126)

# KPZ 普遍クラスにおける厳密解

今村 卓史 (IMAMURA Takashi)

(Received 15 January 2012; accepted 24 January 2012)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2012

# KPZ 普遍クラスにおける厳密解

東京大学先端科学技術研究センター 今村 卓史 (IMAMURA Takashi)

**概要** KPZ 普遍クラスは界面成長等の非平衡系に現れ、その物理量 (界面の高さ等) の揺らぎは、自己アフィンのであり、いくつかの臨界指数で特徴づけられる。Kardar, Parisi, Zhang は 1986 年に非線形の確率微分方程式 (KPZ 方程式) を提唱し、臨界指数を解析的に導出した。

KPZ 普遍クラスの数理的な理解は最近急速な進展を見せている。2000 年に非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, 略して ASEP) と呼ばれる粒子模型において、カレント分布の厳密解が得られた。2010 年からは、KPZ 方程式の厳密解も得られ注目されている。これらの厳密解は Fredholm 行列式を用いて表わされ、長時間極限においてランダム行列理論における最大固有値分布 (Tracy-Widom 分布) に等しくなる。本稿では KPZ 方程式における数理的な進展を、著者の最近の研究を中心に解説する。

## 1 はじめに

界面成長は、紙の燃焼、バクテリアコロニーの成長、山火事の伝播等、自然界に広く現れる現象である。それらの共通の性質として、界面の形状が不規則であることが挙げられる。このような粗い界面の性質を議論するために、Eden モデル、RSOS モデル等多くの数理モデルが提案された [1, 2]。これらのモデルは確率的な時間発展によって記述され、確率に起因するランダム性によって粗い界面が生成される。この界面のゆらぎに関して、多くのモデルに共通する著しい性質が知られている。 $h(x, t)$  を位置  $x$ 、時刻  $t$  における界面の高さとする。界面の粗さの指標として、標準偏差 (ゆらぎ)  $w = \sqrt{\langle (h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle)^2 \rangle}$  を導入すると、 $w$  は系のサイズ  $L$  と時刻  $t$  が大きいときに

$$w \sim \begin{cases} t^\beta, & t < t_c, \\ L^\alpha, & t > t_c, \end{cases} \quad t_c \sim L^z \quad (1.1)$$

のように振舞うのである。(動的スケーリングとか Family-Viscek スケーリングと呼ばれる。) さらに指数  $\alpha, \beta, z$  の値は、多くの数理モデルで、空間が 1 次元の場合

$$\alpha = 1/2, \beta = 1/3, z = 3/2 \quad (1.2)$$

をとる [1, 2]。(1.1) 式によると高さ  $h$  のゆらぎは時刻が  $t_c$  に達するまでは  $t^\beta$  で成長する。 $\beta$  は成長指数と呼ばれる。 $t_c$  以降はゆらぎの時間的な成長はとまり一定値となる。これは系が定常状態に達したことを表しているが、その際の粗さは指数  $\alpha$  で特徴付けられる ( $\alpha$  は粗さ指数と呼ばれる)。(1.2) 式で  $\alpha = 1/2$  であり、定常界面のゆらぎは空間方向についてブラウン運動的な自己アフィンの界面であることを示している。動的指数と呼ばれる  $z$  はスケーリングの議論より  $z = \alpha/\beta$  であることが知られている。

(1.2) 式の指数は、当初数理モデルの数値シミュレーションによって得られた。これを理論的に説明するために、Kardar, Parisi, Zhang は 1986 年に以下の非線形確率偏微分方程式を導入した。空間が 1 次元の場合、

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \sqrt{D} \eta(x, t). \quad (1.3)$$

と書かれる。ただし  $h(x, t)$  は位置  $x \in \mathbb{R}$ 、時刻  $t \geq 0$  における高さを表す。右辺第一項目は非線形性を表し、界面に対して垂直方向に等方的に成長するという要請から出てくる。二項目は界面をなめらかにする線形の効果、三項目の  $\eta$  はランダム性の効果であり、平均 0 で共分散が  $\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$  のガウス型白色ノイズとする。[3] では、動的くりこみ群によって (1.2) 式の指数を解析的に導出している。これらの指数で特徴づけられる普遍クラスは KPZ 普遍クラスと呼ばれている。

KPZ 普遍クラスの数理的、物理的な理解は近年急速に進んでいる。まず 2000 年に非対称単純排除過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP) と呼ばれる可解モデルで、カレントゆらぎのスケール指数  $\beta = 1/3$  だけではなく、カレント分布関数のスケール極限の厳密解が得られた [4, 5]。その結果ガウス型ユニタリ集団 (Gaussian Unitary Ensemble, GUE) と呼ばれるランダム行列の最大固有値分布 (GUE Tracy-Widom 分布) と等しいことが分かったのである。この結果はステップ初期条件におけるものであったが、その後様々な初期条件においてカレント分布関数の厳密解が得られ、スケール指数  $\beta$  は  $1/3$  で変わらないが、分布関数の形が初期条件に依存することが明らかにされた [6]。

2010 年に入り、KPZ 普遍クラスの研究は新たな段階に入っている [7]。まずは液晶乱流系を用いた高精度の界面成長の実験が行われ、界面ゆらぎの指数が  $\alpha = 1/2, \beta = 1/3$  と一致するだけでなく、スケール分布関数そのものが得られ、円形成長の場合 GUE、平坦な成長の場合 GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble, ガウス型直交集団) Tracy-Widom 分布という理論的予想と一致することが分かったのである [8, 9]。

理論面の進展としては、[10, 11, 12, 13] において、KPZ 方程式そのものの厳密解が得られたことが挙げられる。ここでは narrow-wedge 型と呼ばれる初期条件において、有限の任意の時刻における高さ分布関数の厳密解が得られ、時刻無限大の極限で GUE Tracy-Widom 分布に収束することが分かった。「KPZ 方程式は KPZ 普遍クラスに属する [10]」のだ。その後現在 (2012 年 1 月) までの短い間にもかかわらず、研究は急速に進展している。分布関数は初期条件に依存することが上記の ASEP の研究で分かっていたが、KPZ 方程式においても他の興味深い初期条件について厳密解が得られ [15, 14, 16, 17]、高さの多点分布関数も議論されている [18, 19]。その急速な進展の背後には KPZ 方程式のレプリカ法による解析の進展が挙げられる。レプリカ法は、[20] によって提唱され成長指数  $\beta = 1/3$  の解析が行われていたが、最近これを用いて [10, 11, 12, 13] と同じ厳密解が得られた [21, 22]。上記の他の初期条件への拡張や多点分布の解析のほとんどはレプリカ法によって行われている。

本稿では、このような KPZ 普遍クラスにおける厳密解研究の一連の進展を、笹本智弘氏との最近の共同研究 [16] の解説を中心にお伝えしたい。本稿の構成は以下のとおりである。2 章で、ASEP のカレント分布の厳密解とその初期条件依存性の一例について概観し、3 章で、レプリカ法を用いた半ブラウン運動型初期条件における KPZ 方程式の厳密解の研究 [16] を解説する。

## 2 ASEP におけるカレント分布

ASEP は体積排除相互作用する多体ランダムウォーク模型である [5]。図 1(a) のように、両側無限に伸びた一次元格子を考える。各サイトは粒子がいるかないかの 2 状態をとる。各粒子はもし左 (右) 隣のサイトが空いていたら、微小時間  $dt$  当たり、 $qdt$  ( $pdt$ ) の確率でホップする。 ( $p > q$  とする。) ただし隣のサイトが他の粒子によって占有されていたらホップできない (体積排除相互作用)。このように ASEP は体積排除相互作用を持つ非対称多体ランダムウォーク模型であるが、図 1(a) 下の図のように、粒子のいる (いない) サイトを右下がり (右上がり) の斜線で表すと、界面成長の模型とも解釈できる。この表し方では  $q > p$  の仮定により、界面は負の方向 (下側) に成長

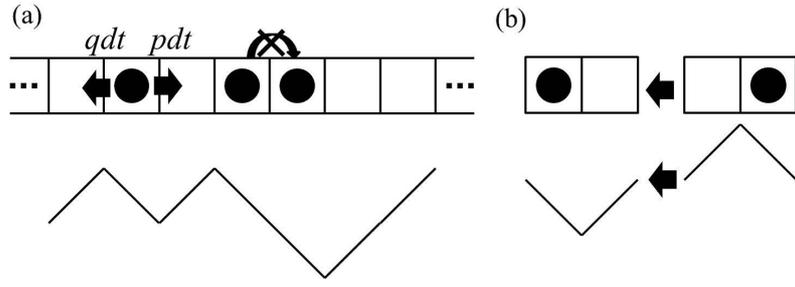


図 1: (a)ASEP とその界面成長としての解釈. $q > p$  なので界面は負の方向 (下向きに成長する。)(b) 粒子が左から右に進むと、界面は 1 単位分負の方向に動く。

していく。またこの解釈によると、粒子が左 (右) 隣にホップすると界面の高さは下側に 1 単位分増える (減る) ことに注意しよう (図 1(b))。粒子がある点を右から左へ通過すればするほど、界面の高さは下側に成長する。したがってこの界面成長モデルの位置  $x$ 、時刻  $t$  における高さに相当する物理量は

$$N_x(t) : \text{時刻 } t \text{ までに } x \text{ を右から左に横切った粒子数} - \text{時刻 } t \text{ までに } x \text{ を左から右に横切った粒子数} \quad (2.1)$$

である。これは ASEP における ( $t$  まで積分された) カレントにほかならない。

このカレントの分布関数の厳密解は 2000 年に初めて得られた [4, 5]。図 2(a) で表されるような原点より右側に粒子がいて左側にはいないという初期条件について、かつ粒子が左にしかいかない場合 ( $q = 1, p = 0$ ) を考える。このとき原点におけるカレント  $N_0(t)$  は長時間極限で以下のように表される。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob} \left( \frac{N_0(t) - t/4}{-2^{-4/3} t^{1/3}} \leq s \right) = F_2(s). \quad (2.2)$$

ここで上式の左辺のスケーリングは、カレント  $N_0(t)$  は平均的に  $t$  に比例していて、平均周りのゆらぎのスケールは  $t^{1/3}$  であることから決まる。ゆらぎの指数  $1/3$  は (1.2) 式の成長指数  $\beta$  と対応している。(2.2) 式右辺の  $F_2(s)$  が前述の GUE Tracy-Widom 分布であり、Fredholm 行列式

$$F_2(s) = \det(1 - K) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^k \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_l \right) \det (P_s(x_m) K(x_m, x_n) P_s(x_n))_{m,n=1}^k \quad (2.3)$$

で表示される。ただし積分核  $K(x, y)$  はエアリー関数を用いて

$$K(x, y) = \int_0^{\infty} d\lambda \text{Ai}(x + \lambda) \text{Ai}(y + \lambda) \quad (2.4)$$

また  $P_s(x)$  は  $(s, \infty)$  への射影演算子である。GUE Tracy-Widom 分布はランダム行列理論において初めて現れた [23, 24]。GUE とは  $N \times N$  エルミート行列

$$H_{\text{GUE}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \sqrt{-1}b_{12} & \cdots & a_{1N} + \sqrt{-1}b_{1N} \\ a_{12} - \sqrt{-1}b_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2N} + \sqrt{-1}b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} - \sqrt{-1}b_{1N} & a_{2N} - \sqrt{-1}b_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

であり、 $a_{ii} (1 \leq i \leq N)$  が平均 0 分散 1 の、 $a_{ij}, b_{ij} (1 \leq i < j \leq N)$  が平均 0 分散 2 の各々独立な正規分布に従う乱数であるランダム行列の集団のことである。我々は GUE の固有値の統計的性質に着目す

る。(2.5)の各行列要素は正規分布に従っている独立な乱数であるのに対して、固有値  $E_i (1 \leq i \leq N)$  は

$$e^{-\sum_{j=1}^N E_j^2} \prod_{i < j} (E_i - E_j)^2 \quad (2.6)$$

という確率密度関数に従うことが知られている [24]。(2.6)式には差積の項を含み、固有値は反発の相互作用をする乱数であることがわかる。GUE Tracy-Widom 分布関数は最大固有値  $E_1$  の行列サイズ  $N$  無限大の極限分布として現れる。

$$F_2(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left( (E_1 - \sqrt{2N})\sqrt{2N}^{1/6} \leq s \right) \quad (2.7)$$

さて、上の結果は図 2(a) のステップ初期条件についてのものである。この初期条件を少し一般化し、図 2(b) のような正の領域で密度  $\rho_+$  ( $0 \leq \rho_+ \leq 1$ ) で粒子がランダムに分布している状態を考える (ステップ Bernoulli 初期条件と呼ぶ)。 $\rho_+ = 1$  の時が、ステップ初期条件でありカレント分布は長時間極限で GUE Tracy-Widom 分布となる。一方  $\rho_+$  が 0 に近いときは粒子同士の間隔が大きくなるので各粒子はほぼ独立に振舞い、カレント分布はガウス分布に従うことが期待される。そこで  $0 < \rho_+ < 1$  の場合カレント分布はどうなっているのだろうかという疑問が湧く。実は  $\rho_+ = 1/2$  のところで転移が起きることが知られている [25]。すなわち  $\rho_+ < 1/2$  ではガウス分布、 $\rho_+ > 1/2$  では GUE Tracy-Widom 分布である。ちょうど  $\rho_+ = 1/2$  の時ガウス型統計と Tracy-Widom 統計が競合し以下の結果が得られている。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob} \left( \frac{N(t) - t/4}{-2^{-4/3} t^{1/3}} \leq s \right) = F_{12}(s). \quad (2.8)$$

ここで  $F_{12}(s)$  は (2.3) 式で定義された Fredholm 行列式で書かれるのであるが積分核  $K(x, y)$  が GUE Tracy-Widom 分布の場合と異なり

$$K(x, y) = \left( \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(x + \lambda) \text{Ai}(y + \lambda) + \left( 1 - \int_0^\infty dv \text{Ai}(v + x) \right) \text{Ai}(y) \right) \quad (2.9)$$

となる [26]。分布関数  $F_{12}(s)$  は 2 つの独立な GOE (実対称行列のランダム行列) の最大固有値分布という解釈があることが指摘され、 $\text{GOE}^2$  と呼ばれることもある [27]。その後、外場の付いた  $\text{GUE}(H_{\text{GUE}} + \text{diag}(a, 0, \dots, 0))$  で  $a$  は定数の最大固有値分布関数として解釈できることも分かった [28]。こちらの解釈では  $\rho_+$  が  $1/2$  付近のガウス-GUE Tracy-Widom 分布のクロスオーバーも記述できるという点でより自然なものである。

(2.2) 式と (2.8) 式を見ると、ゆらぎの指数  $1/3$  は共通であることがわかる。初期条件の違いは分布関数の違いとなって現れる。その意味で、分布関数の厳密解は KPZ 普遍クラスにおけるより詳細な視点を提供しているのである。ASEP のカレント分布の研究はその後、多点、多時刻相関などが厳密に解析され大きく発展している [29]。また上記の結果は粒子が左にしかいかない状況 (図 1(a) で  $p = 0$ ) であったが、最近の研究によって  $q > p > 0$  という状況にも拡張されている [30, 31, 32]。

### 3 KPZ 方程式の厳密解

#### 3.1 ASEP と KPZ

前章では、KPZ 普遍クラスに属するモデルである ASEP のカレント分布に関する結果を紹介した。本章への導入として、まず ASEP と KPZ 方程式との関係について考えてみたい。KPZ 方程式

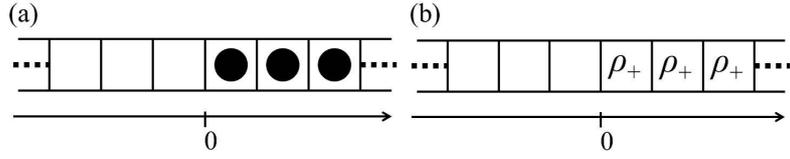


図 2: (a) ステップ初期条件 (b) ステップ Bernoulli 初期条件

は  $u(x,t) := \partial h(x,t)/\partial x$  を従属変数と考えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \lambda u(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \sqrt{D} \frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) \quad (3.1)$$

と書き換えられる。これはノイズ項 (右辺第 3 項) を除けば Burgers 方程式にほかならない。Burgers 方程式と ASEP の関連は以前から知られている。代表的なものとして、ノイズのない ASEP すなわち、粒子が左にしかいかない離散時間 ASEP でホップ確率を常に 1 にとる (左隣が空いていれば常にホップする) ルール 184 セルオートマトンと、超離散 Burgers 方程式との関係が明らかにされている [33]。また ASEP の粒子密度の期待値のマクロな挙動が Burgers 方程式に従うことも知られている [5]。したがって感覚としては、KPZ 方程式は ASEP のある種の連続極限とみなせる。

実はこの「感覚」を、数学的に厳密に定式化することができる [34]。ASEP の左右のホッピングレートの違いを  $p - q = \sqrt{\varepsilon}$  とし、ASEP のサイト  $x$ 、時刻  $t$  について

$$x = x'/\varepsilon, t' = t/\varepsilon^2, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

という拡散スケール極限を考える。この極限の下、カレント  $N_x(t)$  は KPZ 方程式に従う高さ  $h(x', t')$  に収束する。(より正確に言うと、 $N_x(t)$  の指数関数が、KPZ 方程式の Cole-Hopf 解と呼ばれる、確率的熱方程式に収束する。詳しくは [34, 35] をご参照ください。)

KPZ 方程式の厳密解の最初のブレイクスルー [10, 11, 12, 13] は、ステップ初期条件の ASEP のカレント分布に関する知見 [30, 31] を (3.2) 式によって KPZ 方程式に導入することによってもたらされた。ASEP のステップ初期条件は (3.2) 式の極限によって、KPZ 方程式では narrow wedge 型  $h(x,0) = |x|/\delta$ ,  $\delta \rightarrow 0$  に対応していることに注意しよう (図 3(a)). [10, 11, 12, 13] ではこの場合の高さ分布の厳密解が得られている。一方  $\rho_+ = 1/2$  の step Bernoulli 初期条件について、(3.2) 式の極限を考えると、

$$h(x,0) = \begin{cases} x/\delta, & \delta \rightarrow 0, \quad x < 0, \\ B(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

となる。ただし  $B(x)$  は  $B(0) = 0$  である標準ブラウン運動である。この半ブラウン運動型の初期条件に対応する KPZ 方程式の高さ分布を調べるのがこの章の目的である。[10, 11, 12, 13] の場合と同様、ASEP の知見を利用して得るという方法は [14] で研究されている。我々は、より直接的なアプローチであるレプリカ法による解析を行う [16]。

### 3.2 半ブラウン運動型初期条件における厳密解

我々は [16] で (3.3) 式の半ブラウン運動型初期条件における KPZ 方程式の高さ分布の厳密解を得た。まず  $\gamma = (\alpha^4 vt)^{1/3}$ ,  $\alpha = (2v)^{-3/2} \lambda D^{1/2}$  とし、KPZ のスケーリングに基づいて  $x$  を  $t^{2/3}$  で

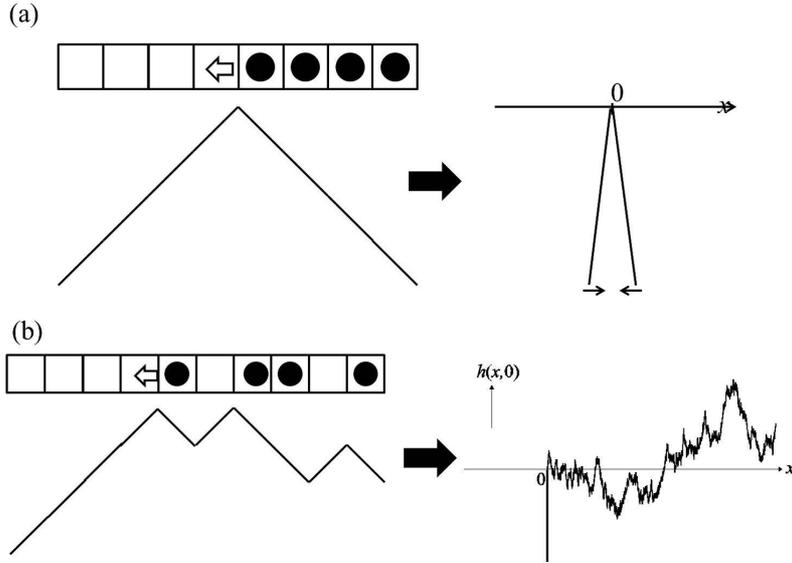


図 3: (a)ASEP のステップ初期条件 (左) と KPZ 方程式の narrow wedge 初期条件 (右)(b)ASEP のステップ Bernoulli 初期条件 (左) と KPZ 方程式の半ブラウン運動初期条件 (右)

$h$  を  $t^{1/3}$  でスケールした変数

$$X = \frac{x}{2\gamma t^2}, \quad \tilde{h}_t(X) = \frac{h(2\gamma t^2 X, t) + \gamma^3/12 + X^2}{\gamma} \quad (3.4)$$

を定義する。このとき

$$\text{Prob}(\tilde{h}_t(X) \leq s) = F_\gamma(s; X) \quad (3.5)$$

を得た。  $F_\gamma(s; X)$  は Fredholm 行列式 (2.3) 式を用いて

$$F_\gamma(s; X) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-e^{\tilde{h}(s-u)}} g_\gamma(u; X), \quad (3.6)$$

$$g_\gamma(u; X) = \det(1 - P_u(B_\gamma^\Gamma - P_{\text{Ai}}^\Gamma)P_u) - \det(1 - P_u B_\gamma^\Gamma P_u). \quad (3.7)$$

と書かれる。また積分核  $P_{\text{Ai}}^\Gamma(\xi_1, \xi_2), B_\gamma^\Gamma(\xi_1, \xi_2)$  は変形された Airy 関数

$$\text{Ai}^\Gamma(a, b, c) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i\frac{c}{b}}} dz e^{iaz + iz^3/3} \Gamma(ibz + c), \quad (3.8)$$

$$\text{Ai}_\Gamma(a, b, c) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iaz + iz^3/3} \frac{1}{\Gamma(ibz + c)}. \quad (3.9)$$

を用いて、

$$P_{\text{Ai}}^\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \text{Ai}^\Gamma\left(\xi_1, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right) \text{Ai}_\Gamma\left(\xi_2, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right),$$

$$B_\gamma^\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \int_0^\infty dy \frac{e^{\gamma y}}{e^{\gamma y} - 1} \text{Ai}^\Gamma\left(\xi_1 + y, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right) \text{Ai}_\Gamma\left(\xi_2 + y, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right) \quad (3.10)$$

と表される。(3.6) 式は一見複雑な式に見えるが、数値積分によって密度関数のグラフを書いたり (図 4)、統計量の数値的な評価が可能である。また  $t \rightarrow \infty$  で (3.6) 式は (2.8) 式の  $F_{12}(s)$  に収束することもわかる [16]。

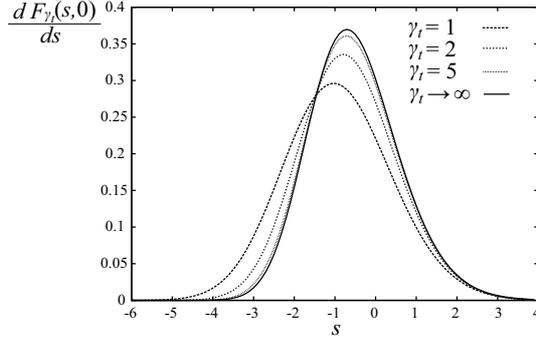


図 4:  $t = 1, 2, 5, \infty$  における確率密度関数  $dF_\gamma(s)/ds$

$F_\gamma(x)$  は若干複雑な式である。これを考えるかわりに我々は、

$$Z(x, t) = \exp\left(\frac{\lambda}{2\nu} h(x, t)\right) \quad (3.11)$$

という量に着目し (これは KPZ 方程式の Cole-Hopf 変換である)、 $Z(x, t)$  の母関数

$$G_\gamma(s; X) := \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-e^{-\gamma s})^N}{N!} \langle Z^N(2\gamma^2 X, t) \rangle e^{N\frac{\lambda^2}{12} + N\gamma X^2} = \langle e^{-e^{\gamma(\bar{h}(X)-s)}} \rangle. \quad (3.12)$$

を考察することにする。この量は単一の Fredholm 行列式

$$G_\gamma(s; X) = \det(1 - P_0 \bar{K}_X P_0), \quad (3.13)$$

$$\bar{K}_X(\xi_j, \xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}\Gamma\left(\xi_j + y, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right) \text{Ai}\Gamma\left(\xi_k + y, \frac{1}{\gamma}, -\frac{X}{\gamma}\right) \frac{e^{\gamma y}}{e^{\gamma y} + e^{\gamma s}}. \quad (3.14)$$

で表示され数学的に扱いやすい。また  $G(x, t)$  を Laplace 変換することで、容易に高さ分布  $F_\gamma(x)$  を得ることができる。我々は次節で、レプリカ法に基づいて式の導出を議論する。

### 3.3 レプリカ法

以後我々は KPZ 方程式を扱うが、実は (1.3) 式そのものは数学的に well-defined ではない。相関が  $\delta$  関数の特異性を持つノイズ  $\eta(x, t)$  及び非線形項が  $h(x, t)$  の発散を引き起こすのである。したがって我々は、修正された KPZ 方程式

$$\frac{\partial h_\kappa(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial h_\kappa(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 h_\kappa(x, t)}{\partial x^2} + \sqrt{D} \eta_\kappa(x, t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda \sqrt{D}}{2\nu} \right)^2 C_\kappa(0). \quad (3.15)$$

から出発する。ただし  $\eta_\kappa(x, t)$  は空間相関がなめらかなノイズであり、その相関は、 $\int_{-\infty}^{\infty} C_\kappa(x) = 1$  を満たすなめらかな正の偶関数  $C_\kappa(x)$  を用いて、 $\langle \eta_\kappa(x, t) \eta_\kappa(x', t') \rangle = C_\kappa(x - x') \delta(t - t')$  を表されるとする。ここで  $\kappa \rightarrow \infty$  の極限を取ると、 $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} C_\kappa(x) = \delta(x)$  となるが、(3.15) 式は、この極限においても well-defined な式となる。右辺最後の項が  $\delta$  関数の特異性から来る  $h(x, t)$  の発散を打ち消すのである [16]。

以後簡単のため  $\nu = 1/2, \lambda = 1, D = 1$  の場合を考察する。Cole-Hopf 変換  $Z_\kappa(x, t) = \exp(h_\kappa(x, t))$  により、(3.15) 式は、線形の確率的熱方程式

$$\frac{\partial Z_\kappa(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_\kappa(x, t)}{\partial x^2} + \eta(x, t) Z_\kappa(x, t), \quad (3.16)$$

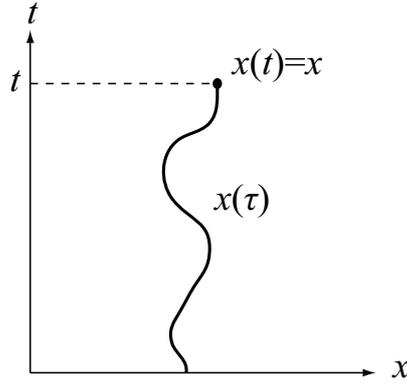


図 5: (3.18) 式はポリマーの分配関数として解釈できる。

に変換される。ただし右辺 2 項目は伊藤型である。Feynman-Kac 公式によって、 $Z_\kappa$  は

$$Z_\kappa(x, t) = \int^{x(t)=x} D[x(\tau)] \exp\left(-S[x(\tau)] - \frac{C_\kappa(0)t}{2}\right), \quad (3.17)$$

$$S[x(\tau)] = \int_0^t d\tau \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 - \eta(x(\tau), \tau) \right). \quad (3.18)$$

という経路積分で表示できる。したがって  $Z_\kappa(x, t)$  は 2 次元空間  $(x, t)$  上におけるランダム媒質  $\eta_\kappa(x, t)$  中のポリマー  $x(t)$  の分配関数と解釈できる (図 5)。

(3.17) 式を用いると、 $Z_\kappa(x, t)$  の  $N$  次モーメントの期待値は

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^N Z(x_j, t) \right\rangle &:= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left\langle \prod_{j=1}^N Z_\kappa(x_j, t) \right\rangle = \prod_{j=1}^N \int^{x_j(t)=x_j} D[x_j(\tau)] \exp\left[-S^{(N)}[x(\tau)]\right], \\ S^{(N)}[x(\tau)] &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{dx_j}{d\tau} \right)^2 - \sum_{j \neq k} \delta(x_j(\tau) - x_k(\tau)) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

とかける。(ここで我々は  $\kappa \rightarrow \infty$  の極限をとった。) 上の式は  $\langle \eta_\kappa(x, \tau) \eta_\kappa(x', \tau') \rangle = C_\kappa(x - x') \delta(\tau - \tau')$  を用いると容易に得られる。また (3.19) 右辺第 2 項における和で  $j = k$  の寄与が取り除かれていることに注意しよう。この寄与は  $\kappa \rightarrow \infty$  で発散を引き起こす。これは上述の KPZ 方程式 ((1.3) 式) における発散に起因しているが、この寄与が我々が (3.15) 式で付加した  $C_\kappa(0)$  の項によって打ち消されるのである。

(3.19) 式を微分方程式で書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \prod_{j=1}^N Z(x_j, t) \right\rangle = -H_N \left\langle \prod_{j=1}^N Z(x_j, t) \right\rangle, \quad (3.20)$$

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \delta(x_j - x_k) \quad (3.21)$$

となる。この式は虚時間の Schrödinger 方程式の形をしていて、かつ  $H_N$  は引力型  $\delta$ -Bose 気体のハミルトニアンとなっている。また半ブラウン型初期条件 (3.3) 式は

$$\left\langle \prod_{j=1}^N Z(x_j, 0) \right\rangle = \prod_{j=1}^N e^{\frac{1}{2}(2N-2j+1)x_j} \quad (3.22)$$

と表される。我々は初期条件 (3.22) 式の下で (3.20) 式を解きたい。\$H\_N\$ は可積分なハミルトニアンであり、Bethe 仮説によって \$H\_N\$ の固有値、固有状態が知られている [36]。さらにこれらの完全性も最近明らかにされている [37]。我々は \$H\_N\$ の固有値、固有状態の寄与を足しあげることによって \$\langle Z(x,t)^N \rangle\$ の行列式表示を得た。(議論の詳細は [16] をご参照ください。)

$$\begin{aligned} \langle Z^N(x,t) \rangle &= \sum_{M=1}^N \frac{N!}{M!} \prod_{\alpha=1}^M \left( \int_0^\infty d\omega_\alpha \sum_{n_\alpha=1}^\infty \right) \delta_{\sum_{\beta=1}^M n_\beta, N} \\ &\quad \times \det \left( \int_{\mathbb{R}-ic} \frac{dq}{\pi} \frac{e^{in_j q x + n_j \frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2} n_j q^2 + \frac{t}{24} n_j^3 - n_j(\omega_j + \omega_k) - 2iq(\omega_j - \omega_k)}}{\prod_{r=1}^{n_j} iq + \frac{1}{2}(n_j - 2r)} \right)_{j,k=1}^M. \end{aligned} \quad (3.23)$$

上の式より \$\langle Z(x,t)^N \rangle\$ の母関数 \$G\_\gamma(s; X)\$ は

$$G_\gamma(s; X) := \sum_{N=0}^\infty \frac{(-e^{-\gamma s})^N}{N!} \langle Z^N(2\gamma^2 X, t) \rangle e^{N \frac{\gamma^2}{12} + N\gamma X^2} = \sum_{M=0}^\infty \frac{(-1)^M}{M!} \prod_{k=1}^M \int_0^\infty d\omega_k \det(K(\omega_j, \omega_k))_{j,k=1}^M. \quad (3.24)$$

という Fredholm 行列式で表示され、積分核は

$$K(\omega_j, \omega_k) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}-ic_n} \frac{dq}{\pi} \frac{e^{-n(\omega_j + \omega_k) - 2iq(\omega_j - \omega_k) - \gamma^3 n q^2 + \frac{\gamma^3}{12} n^3 - \gamma n s}}{\prod_{r=1}^n (iq - \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{2}(n - 2r))}. \quad (3.25)$$

となることが分かる。上式に 2 つの公式

$$\frac{\Gamma(iq + a - \frac{n}{2})}{\Gamma(iq + a + \frac{n}{2})} e^{\frac{m^2 n^3}{3}} = \int_{-\infty}^\infty dy \text{Ai}_\Gamma \left( y, \frac{1}{2m}, iq + a \right) e^{mny}, \text{ for } a \in \mathbb{R}, m, n \geq 0, \text{Im } q < -n/2 + a \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \text{Ai}_\Gamma(p^2 + v, w, iwp + u) e^{ipx} &= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \text{Ai}_\Gamma \left( 2^{-\frac{2}{3}}(v+x), 2^{\frac{1}{3}}w, u \right) \text{Ai}_\Gamma \left( 2^{-\frac{2}{3}}(v-x), 2^{\frac{1}{3}}w, u \right), \\ \text{for } u, v, x \in \mathbb{R}, w \geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

ただし \$\text{Ai}\_\Gamma^\Gamma(a, b, c) = \frac{1}{2\pi} \int\_{\Gamma\_i \zeta} dz e^{iaz + iz^3/3} \frac{\Gamma(ibz+c)}{\Gamma(-ibz+c)}\$、を適用すると (3.2) 式が得られる。

#### 4 おわりに

本稿では KPZ 普遍クラスにおける、厳密解研究の最近の進展を紹介してきた。昨年後半から現在 (2012 年 1 月) までの間に、いくつかの研究の進展があった。まずレプリカ法を用いた進展としては、定常状態における KPZ 方程式の高さ分布の厳密な解析があげられる [17]。本稿ではある初期条件から定常へ緩和していく動的な過程に注目していたが、KPZ 方程式の非平衡定常状態の理解も重要である。さらにこの高さ分布の厳密解を用いて、物理的に重要な高さの 2 点 2 時刻相関関数も厳密に得られる。

また、本稿 (3.17) 式で議論したような有限温度のランダムポリマーの数理的理解も進展している。トロピカル RSK 対応 [38] や量子戸田格子の構造 [39, 40, 41] が背後にある離散空間上の有限温度のランダムポリマーモデルが活発に研究されている。さらに [42] では、Macdonald プロセスと呼ばれる KPZ 方程式を含むより広い可解模型のクラスが提唱され、その数理構造特に Fredholm 行列式の構造がどのように現れるかを考察している。このクラスの数理構造の全貌を明らかにすべく、スケールング極限の考察も早速行われ始めている [43]。

このように KPZ 方程式に関する研究は、著しく進展している。今後も非平衡統計物理学の実験、理論の物理的側面と厳密解の背後にある数理構造を解明する数理的側面とが相互に関連しあいながら、理解が深まっていくものと期待している。

## 参考文献

- [1] A.L. Barabási and H.E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth* (Cambridge University Press, 1995).
- [2] 本田勝也, フラクタル, 朝倉書店, 2002.
- [3] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, 56: 889–892, 1986.
- [4] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Commun. Math. Phys.*, 209: 437–476, 2000.
- [5] 笹本智弘, 1次元非対称単純排他過程の厳密解, 物性研究, 79, 881–925, 2003.
- [6] M. Prähofer and H. Spohn, Universal distributions for growth processes in 1+1 dimensions and random matrices, *Phys. Rev. Lett.*, 84: 4882–4885, 2000.
- [7] 田崎 晴明, 「ゆらぐ界面」をめぐる実験と理論, 日本物理学会誌, 65, No.10. 760, 2010.
- [8] K. Takeuchi, M. Sano, Universal Fluctuations of Growing Interfaces: Evidence in Turbulent Liquid Crystals, *Phys. Rev. Lett.* 104, 230601, 2010.
- [9] K. A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto and H. Spohn, Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invariance. *Sci. Rep.* 1, 34 (2011).
- [10] T. Sasamoto and H. Spohn, One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality, *Phys. Rev. Lett.*, 104: 230602, 2010.
- [11] T. Sasamoto and H. Spohn, Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition, *Nuc. Phys. B*, 834: 523–542, 2010.
- [12] T. Sasamoto and H. Spohn, The Crossover Regime for the Weakly Asymmetric Simple Exclusion Process, *J. Stat. Phys.*, 140: 209–231, 2010.
- [13] G. Amir, I. Corwin and J. Quastel, Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in 1 + 1 dimensions, *Com. Pure. Appl. Math.*, 64: 466-537, 2011.
- [14] I. Corwin and J. Quastel, Universal distribution of fluctuations at the edge of the rarefaction fan, arXiv:1006.1338.
- [15] P. Calabrese, P. Le Doussal, An exact solution for the KPZ equation with flat initial conditions. *Phys. Rev. Lett.* 106 250603, 2011.
- [16] T. Imamura and T. Sasamoto, Replica approach to the KPZ equation with half Brownian motion initial condition *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 385001, 2011.
- [17] T. Imamura and T. Sasamoto, Exact solution for the stationary KPZ equation arxiv:1111.4634.
- [18] S. Prolhac and H. Spohn, Two-point generating function of the free energy for a directed polymer in a random medium, *J. Stat. Mech.*, P01031, 2011.

- [19] S. Prolhac and H. Spohn, The one-dimensional KPZ equation and the Airy process, arXiv:1101.4622.
- [20] M. Kardar, Replica Bethe ansatz studies of two-dimensional interfaces with quenched random impurities, *Nuc. Phys. B*, 290: 582–602, 1987.
- [21] V. Dotsenko, Replica Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution of the free energy fluctuations in one-dimensional directed polymers, *J. Stat. Mech.*, P07010, 2010.
- [22] P. Calabrese, P. Le Doussal and A. Rosso, Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature, *EPL*, 90: 20002, 2010.
- [23] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Commun. Math. Phys.*, 159: 151–174, 1994.
- [24] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東大出版会, 2005.
- [25] M. Prähofer and H. Spohn, Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In V. Sidoravicius, ed., *In and out of equilibrium*, vol. 51 of *Progress in Probability*, 185–204 (2002).
- [26] T. Imamura and T. Sasamoto, Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model with external sources, *Nucl. Phys. B*, 699, 503–544, 2004.
- [27] J. Baik and E. M. Rains, Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources, *J. Stat. Phys.*, 100, 523–541, 2000.
- [28] T. Imamura and T. Sasamoto, Polynuclear growth model with external source and random matrix model with deterministic source, *Phys. Rev. E*, 71, 041696, 2005.
- [29] 今村 卓史, 笹本 智弘, 非平衡系における時間相関の厳密解 日本物理学会誌, 64, No.6, 436–440, 2009.
- [30] C. A. Tracy and H. Widom, Integral formulas for the asymmetric simple exclusion process, *Commun. Math. Phys.*, 279: 815–844, 2008.
- [31] C. A. Tracy and H. Widom, Asymptotics in ASEP with step initial condition, *Commun. Math. Phys.*, 290: 129–154, 2009.
- [32] C. A. Tracy and H. Widom, On ASEP with step Bernoulli initial condition, *J. Stat. Phys.*, 137, 825–838, 2009.
- [33] K. Nishinari and D. Takahashi, Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *J. Phys. A*, 31, 5439–5450, 1998.
- [34] L. Bertini and G. Giacomin, Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems, *Commun. Math. Phys.*, 183: 571–607, 1997.
- [35] T. Imamura, T. Sasamoto and H. Spohn, KPZ, ASEP and Delta-Bose Gas *J. Phys. Conf. Ser.* **297** 012016 (2011).

- [36] E. H. Lieb, and W. Liniger, Exact analysis of an interacting Bose gas. I. the general solution and the ground state, *Phys. Rev.*, 130: 1605–1616, 1963.
- [37] S. Prolhac and H. Spohn, The propagator of the attractive delta-Bose gas in one dimension. arXiv:1109.3404.
- [38] I. Corwin, N. O’Connell, T. Seppäläinen, N. Zygouras, Tropical Combinatorics and Whittaker functions arXiv:1110.3489
- [39] N. O’Connell, Directed polymers and the quantum Toda lattice, arXiv:0910.0069
- [40] M. Katori, O’Connell’s process as a vicious Brownian motion, *Phys. Rev. E*, 84, 061144, 2011.
- [41] M. Katori, Survival probability of mutually killing Brownian motions and the O’Connell process, arXiv:1112.4009
- [42] A. Borodin and I. Corwin, Macdonald processes, arXiv:1111.4408
- [43] H. Spohn, KPZ Scaling Theory and the Semi-discrete Directed Polymer Model, arXiv:1201.0645