

R_格子と対応する箱玉系について

前田, 一貴
京都大学大学院情報学研究科

辻本, 諭
京都大学大学院情報学研究科

<https://doi.org/10.15017/23455>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (9), pp.60-67, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 9 (pp. 60 - 67)

R_{II} 格子と対応する箱玉系について

前田 一貴 (MAEDA Kazuki), 辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)

(Received 15 January 2012; accepted 28 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

R_{II} 格子と対応する箱玉系について

京都大学大学院情報学研究科 前田一貴 (MAEDA Kazuki)

京都大学大学院情報学研究科 辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)

概要 これまでの研究により、直交多項式のスペクトル変形の両立条件として非自励離散戸田格子が導出され、それを超離散化して有限格子境界条件を課すことで運搬車付き箱玉系の時間発展方程式が得られることがわかっている。本稿では R_{II} 有理関数と呼ばれる双直交関数に対して同様にスペクトル変形の両立条件を考え、導出される非自励離散可積分系に対してその超離散化を考える。さらに対応して現れる箱玉系について考察を行う。

1 はじめに

箱玉系は離散 KdV 方程式の超離散化として得られるソリトン・セルオートマトンである。箱玉系についてはいくつかの拡張が知られており、そのうちの 1 つである運搬車付き拡張と呼ばれるものの時間発展方程式は次で与えられる [5]:

$$U_n^{(t+1)} = \min \left(1 - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)}) \right) + \max \left(0, \sum_{j=-\infty}^n U_j^{(t)} - \sum_{j=-\infty}^{n-1} U_j^{(t+1)} - M_{t+1} \right), \quad (1.1)$$

ここで $U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$ は時刻 t における n 番目の箱に入っている玉の数、 M_{t+1} は時刻 t から $t+1$ への時間発展における玉の運搬車の容量である。(1.1) は途中で補助変数 $\bar{U}_n^{(t)}, \bar{Z}_n^{(t)}$ を差し挟むことで、次のように書くこともできる [1]:

$$\bar{U}_n^{(t+1)} = \min(1 - U_n^{(t)}, \bar{Z}_n^{(t+1)}), \quad (1.2a)$$

$$\bar{Z}_n^{(t+1)} = \min(\bar{Z}_{n-1}^{(t+1)} + U_{n-1}^{(t)}, M_{t+1}) - \bar{U}_{n-1}^{(t+1)}, \quad (1.2b)$$

$$U_n^{(t+1)} = U_n^{(t)} + \bar{Z}_n^{(t+1)} - \bar{Z}_{n+1}^{(t+1)}. \quad (1.2c)$$

ここで導入した補助変数 $\bar{U}_n^{(t)}$ は、通常の運搬車付き箱玉系のルールである「運搬車容量を超えた玉は元の箱に戻す」を変更し、「運搬車容量を超えた玉は消滅する」というルールで時間発展させた時の各箱に入っている玉の数を表し、 $\bar{Z}_n^{(t+1)}$ はこのルールの下での運搬車に積まれている玉の数を表す。

筆者らはこれまでに、箱玉系とその拡張系について、有限超離散戸田格子とその拡張系をそれらの時間発展方程式とみなす観点からの研究を行ってきた。運搬車付き箱玉系については、次の方程式がその「有限戸田表現」を与えることがわかっている [2]:

$$\bar{Q}_n^{(t+1)} = \min(E_{n+1}^{(t)}, \bar{D}_n^{(t+1)}), \quad (1.3a)$$

$$E_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, \quad (1.3b)$$

$$\bar{D}_n^{(t+1)} = \min(\bar{D}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, M_{t+1}), \quad (1.3c)$$

$$Q_n^{(t+1)} = \bar{Q}_n^{(t+1)} + \bar{D}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - \bar{D}_n^{(t+1)}, \quad (1.3d)$$

$$E_n^{(t+1)} = \bar{E}_n^{(t+1)} - \bar{D}_{n-1}^{(t+1)} + \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} - Q_n^{(t)} + \bar{D}_n^{(t+1)}, \quad (1.3e)$$

ただし境界条件は

$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = \bar{E}_0^{(t)} = \bar{E}_N^{(t)} = +\infty, \quad \bar{D}_0^{(t+1)} = \min(Q_0^{(t)}, M_{t+1}) \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (1.3f)$$

各変数は次の量を表す:

- N : ソリトンの数;
- $Q_n^{(t)}$: 時刻 t における n 番目のソリトンの長さ ($n = 0, 1, \dots, N-1$);
- $E_n^{(t)}$: 時刻 t における n 番目の空き箱列の長さ ($n-1$ 番目と n 番目のソリトン間の距離) ($n = 1, 2, \dots, N-1$);
- $\overline{D}_n^{(t+1)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展において $Q_n^{(t+1)}$ の玉を入れる直前に 運搬車に積まれている玉の数 ($n = 0, 1, \dots, N-1$);
- $\overline{Q}_n^{(t)}, \overline{E}_n^{(t)}$: それぞれ $Q_n^{(t)}, E_n^{(t)}$ と同じであるが, (1.2) における $\overline{U}_n^{(t)}$ の状態に対応する.

なお, 先に出てきた「有限戸田表現」という語は, 本稿ではこのようにソリトンと空き箱列の長さを従属変数としてとった場合の時間発展方程式のことを指すものとする. 例を図 1 に示す. ここで, 運搬車容量は次のように選んでいる:

$$M_t = \begin{cases} +\infty & \text{if } t \leq 1, \\ 4 & \text{if } 2 \leq t \leq 3, \\ 3 & \text{if } 4 \leq t. \end{cases}$$

		$Q_0^{(t)} E_1^{(t)} Q_1^{(t)} E_2^{(t)} Q_2^{(t)}$
t=0:	.11111.....1111...11.....	5 5 4 3 2
1:11111.....111..111.....	5 4 3 2 3
2:11111...11...1111.....	5 3 2 3 4
3:1111..111...1111.....	4 2 3 4 4
4:111..1111...1111.....	3 2 4 4 4
5:11...11111...1111.....	2 2 5 4 4
6:11...11111...1111.....	2 3 5 4 4

		$\overline{Q}_0^{(t)} \overline{E}_1^{(t)} \overline{Q}_1^{(t)} \overline{E}_2^{(t)} \overline{Q}_2^{(t)}$
t=0:	.11111.....1111...11.....	5 5 4 3 2
1:11111.....111..111.....	5 4 3 2 3
2:11111...11...1111.....	4 3 2 3 4
3:111..111...1111.....	3 2 3 4 4
4:11...111...111.....	2 3 3 5 3
5:11...111...111.....	2 4 3 5 3
6:11...111...111.....	2 5 3 5 3

図 1: 箱玉系の有限戸田表現の例. 左側が箱玉系の状態で, 1 が玉の入った箱, . が空き箱を表す. 右側の数字の列が対応する非自励の有限超離散戸田格子の変数の値である. 上の図でボールド体で示されている玉は運搬車容量を超過した玉. 下の図では超過した玉は消えている.

運搬車付き箱玉系の有限戸田表現 (1.3) は, 次の非自励の有限離散戸田格子

$$\overline{q}_n^{(t+1)} + \overline{e}_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)} + \mu_{t+1}, \quad \overline{q}_{n-1}^{(t+1)} \overline{e}_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} e_n^{(t)}, \quad (1.4a)$$

$$q_n^{(t+1)} + e_{n+1}^{(t+1)} = \overline{q}_n^{(t+1)} + \overline{e}_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1}, \quad q_n^{(t+1)} e_n^{(t+1)} = \overline{q}_n^{(t+1)} \overline{e}_n^{(t+1)}, \quad (1.4b)$$

$$e_0^{(t)} = e_N^{(t)} = \overline{e}_0^{(t)} = \overline{e}_N^{(t)} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1.4c)$$

に補助変数 $\overline{d}_n^{(t+1)} := \overline{q}_n^{(t+1)} - e_{n+1}^{(t)}$ を導入して減算を除去した上で超離散化することで得られる. そして非自励の有限離散戸田格子は直交多項式のスペクトル変形の両立条件として得られることが知られている [3]. ここで, 有限戸田表現からの箱玉系の拡張法の 1 つとして,

より一般の双直交関数のスペクトル変形から導出される離散可積分系を考え, それを超離散化することで得られる系を有限戸田表現として読む

という方針をとることが考えられる. 本稿では, 実際に R_{II} 有理関数と呼ばれる双直交関数, もしくはそれに関連して現れる R_{II} 多項式と呼ばれる多項式列に対するスペクトル変形から議論を始めることで, 箱玉系の新しい拡張系を導出することを試みる.

2 R_{II} 多項式とそのスペクトル変形, R_{II} 格子

(モニックな) R_{II} 多項式とは次の三項間漸化式で定められる $\phi_n(x)$ のことをいう:

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(x) &:= ((1-w_n)x + v_n)\phi_n(x) + w_n(x + \kappa_{n-1})(x + \lambda_n)\phi_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \\ \phi_{-1}(x) &:= 0, \quad \phi_0(x) := 1,\end{aligned}$$

ただし $w_n \neq 0$. 定義より $\deg \phi_n(x) = n$ である. こうして定義された $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ に対して, ある線型汎関数 \mathcal{L} で, 次のある種の直交関係式

$$\mathcal{L} \left[\frac{x^m \phi_n(x)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x + \kappa_i) \prod_{j=1}^n (x + \lambda_j)} \right] = h_n \delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

を満たすものが存在することを示すことができる. ただし $h_n \neq 0$ で, $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである. ここで, 有理関数列 $\{R_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}, \{S_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ を

$$R_n(x) := \frac{\phi_n(x)}{\prod_{j=0}^{n-1} (x + \kappa_j)}, \quad S_n(x) := \frac{w_{n+1} \phi_{n+1}(x)}{\prod_{j=1}^{n+1} w_j (x + \lambda_j)} - \frac{(1-w_n) \phi_n(x)}{\prod_{j=1}^n w_j (x + \lambda_j)} - \frac{\phi_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^{n-1} w_j (x + \lambda_j)}$$

で導入すると, (2.1) で定めた線型汎関数について次の双直交関係式

$$\mathcal{L}[R_m(x)S_n(x)] = (h_1 - (1-w_0)h_0)\delta_{m,n}$$

が成立する. このように, R_{II} 多項式が与えられればそれから双直交関数 (R_{II} 有理関数) を作り出すことができる.

以下では, 時間変数 $t \in \mathbb{Z}$ を独立変数として加えた 2 系列のモニックな R_{II} 多項式を考える:

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}^{(t)}(x) &:= ((1-w_n^{(t)})x + v_n^{(t)})\phi_n^{(t)}(x) + w_n^{(t)}(x + \kappa_{n-1}^{(t)})(x + \lambda_n^{(t)})\phi_{n-1}^{(t)}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \\ \bar{\phi}_{n+1}^{(t)}(x) &:= ((1-\bar{w}_n^{(t)})x + \bar{v}_n^{(t)})\bar{\phi}_n^{(t)}(x) + \bar{w}_n^{(t)}(x + \kappa_{n-1}^{(t)})(x + \lambda_n^{(t)})\bar{\phi}_{n-1}^{(t)}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \\ \phi_{-1}^{(t)}(x) &= \bar{\phi}_{-1}^{(t)}(x) = 0, \quad \phi_0^{(t)}(x) = \bar{\phi}_0^{(t)}(x) = 1.\end{aligned}$$

ただし, $\kappa_n^{(t)}, \lambda_n^{(t)}$ には次の関係が成り立つことを要請しておく:

$$\kappa_{n-1}^{(t+1)} = \lambda_n^{(t)}, \quad \lambda_n^{(t+1)} = \kappa_n^{(t)}. \quad (2.2)$$

2 つの系列では, 一般に t が等しくても $v_n^{(t)} \neq \bar{v}_n^{(t)}, w_n^{(t)} \neq \bar{w}_n^{(t)}$ であるが, $\kappa_n^{(t)}, \lambda_n^{(t)}$ は共通であることに注意する. そして, これらの多項式の間以下関係式 (スペクトル変形) が成立していると仮定する:

$$x \bar{\phi}_n^{(t+1)}(x) = \frac{1}{1 + (\kappa_n^{(t)})^{-1} q_n^{(t)}} \phi_{n+1}^{(t)}(x) + \frac{(\kappa_n^{(t)})^{-1} q_n^{(t)}}{1 + (\kappa_n^{(t)})^{-1} q_n^{(t)}} (x + \kappa_n^{(t)}) \phi_n^{(t)}(x), \quad (2.3a)$$

$$\phi_n^{(t)}(x) = \frac{1}{1 + (\lambda_n^{(t)})^{-1} e_n^{(t)}} \bar{\phi}_n^{(t+1)}(x) + \frac{(\lambda_n^{(t)})^{-1} e_n^{(t)}}{1 + (\lambda_n^{(t)})^{-1} e_n^{(t)}} (x + \lambda_n^{(t)}) \bar{\phi}_{n-1}^{(t+1)}(x), \quad (2.3b)$$

$$(x + \mu_t) \bar{\phi}_n^{(t+1)}(x) = \frac{1}{1 + (\kappa_n^{(t)} - \mu_t)^{-1} \bar{q}_n^{(t)}} \bar{\phi}_{n+1}^{(t)}(x) + \frac{(\kappa_n^{(t)} - \mu_t)^{-1} \bar{q}_n^{(t)}}{1 + (\kappa_n^{(t)} - \mu_t)^{-1} \bar{q}_n^{(t)}} (x + \kappa_n^{(t)}) \bar{\phi}_n^{(t)}(x), \quad (2.3c)$$

$$\bar{\phi}_n^{(t)}(x) = \frac{1}{1 + (\kappa_n^{(t)} - \mu_t)(\kappa_n^{(t)} \lambda_n^{(t)})^{-1} \bar{e}_n^{(t)}} \bar{\phi}_n^{(t+1)}(x) + \frac{(\kappa_n^{(t)} - \mu_t)(\kappa_n^{(t)} \lambda_n^{(t)})^{-1} \bar{e}_n^{(t)}}{1 + (\kappa_n^{(t)} - \mu_t)(\kappa_n^{(t)} \lambda_n^{(t)})^{-1} \bar{e}_n^{(t)}} (x + \lambda_n^{(t)}) \bar{\phi}_{n-1}^{(t+1)}(x). \quad (2.3d)$$

$\mathcal{L}^{(t)}, \bar{\mathcal{L}}^{(t)}$ をそれぞれ $\{\phi_n^{(t)}(x)\}_{n=0}^{+\infty}, \{\bar{\phi}_n^{(t)}(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ に対応する線型汎関数であるとする, 相互の関係は

$$\bar{\mathcal{L}}^{(t+1)}[\bullet] = \mathcal{L}^{(t)} \left[\frac{x}{x + \kappa_0^{(t)}} \bullet \right] = \bar{\mathcal{L}}^{(t)} \left[\frac{x + \mu_t}{x + \kappa_0^{(t)}} \bullet \right]$$

で与えられる。(2.3)の両立条件(無矛盾であるための条件)として導出されるのが R_{II} 格子 [4] であり,

$$\begin{aligned} \bar{q}_n^{(t+1)} + \frac{(\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\lambda_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})}{\kappa_n^{(t+1)} \lambda_n^{(t+1)}} \bar{e}_n^{(t+1)} \frac{1 + (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})^{-1} \bar{q}_n^{(t+1)}}{1 + (\kappa_{n-1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})^{-1} \bar{q}_{n-1}^{(t+1)}} \\ = \frac{\lambda_n^{(t+1)} - \mu_{t+1}}{\lambda_n^{(t+1)}} q_n^{(t)} \frac{1 + (\lambda_{n+1}^{(t)})^{-1} e_{n+1}^{(t)}}{1 + (\lambda_n^{(t)})^{-1} e_n^{(t)}} + \frac{\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1}}{\kappa_n^{(t+1)}} e_{n+1}^{(t)} + \mu_{t+1} (1 + (\kappa_n^{(t)})^{-1} q_n^{(t)}) (1 + (\lambda_{n+1}^{(t)})^{-1} e_{n+1}^{(t)}), \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\frac{(\kappa_n^{(t+1)})^{-1} (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})}{(\kappa_{n-1}^{(t+1)})^{-1} (\kappa_{n-1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})} \frac{\bar{q}_{n-1}^{(t+1)} \bar{e}_n^{(t+1)}}{\bar{q}_{n-1}^{(t+1)}} \frac{1 + (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})^{-1} \bar{q}_n^{(t+1)}}{1 + (\kappa_{n-1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})^{-1} \bar{q}_{n-1}^{(t+1)}} = q_n^{(t)} e_n^{(t)} \frac{1 + (\lambda_{n+1}^{(t)})^{-1} e_{n+1}^{(t)}}{1 + (\lambda_n^{(t)})^{-1} e_n^{(t)}}, \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1}}{\kappa_n^{(t+1)}} q_n^{(t+1)} \frac{1 + (\lambda_{n+1}^{(t+1)})^{-1} e_{n+1}^{(t+1)}}{1 + (\lambda_n^{(t+1)})^{-1} e_n^{(t+1)}} + \frac{\lambda_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1}}{\lambda_{n+1}^{(t+1)}} e_{n+1}^{(t+1)} \\ = \bar{q}_n^{(t+1)} \frac{1 + (\kappa_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\kappa_{n+1}^{(t+1)} \lambda_{n+1}^{(t+1)})^{-1} \bar{e}_{n+1}^{(t+1)}}{1 + (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\kappa_n^{(t+1)} \lambda_n^{(t+1)})^{-1} \bar{e}_n^{(t+1)}} + \frac{(\kappa_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\lambda_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})}{\kappa_{n+1}^{(t+1)} \lambda_{n+1}^{(t+1)}} \bar{e}_{n+1}^{(t+1)} \\ - \mu_{t+1} (1 + (\kappa_n^{(t+1)})^{-1} q_n^{(t+1)}) (1 + (\lambda_{n+1}^{(t+1)})^{-1} e_{n+1}^{(t+1)}), \end{aligned} \quad (2.4c)$$

$$q_n^{(t+1)} e_n^{(t+1)} \frac{1 + (\lambda_{n+1}^{(t+1)})^{-1} e_{n+1}^{(t+1)}}{1 + (\lambda_n^{(t+1)})^{-1} e_n^{(t+1)}} = \bar{q}_n^{(t+1)} \bar{e}_n^{(t+1)} \frac{1 + (\kappa_{n+1}^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\kappa_{n+1}^{(t+1)} \lambda_{n+1}^{(t+1)})^{-1} \bar{e}_{n+1}^{(t+1)}}{1 + (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\kappa_n^{(t+1)} \lambda_n^{(t+1)})^{-1} \bar{e}_n^{(t+1)}} \quad (2.4d)$$

という形で与えられる。

3 R_{II} 格子の減算除去と超離散化

R_{II} 格子 (2.4) には時間発展方程式の形に書き直しても減算が含まれるために、このままでは超離散化することはできない。そこで、非自励の離散戸田格子 (1.4) を超離散化するときと同様に、補助変数を導入することで減算を除去する。実際に、

$$\bar{d}_n^{(t+1)} := \frac{\bar{q}_n^{(t+1)} - (\kappa_n^{(t+1)} - \mu_{t+1})(\kappa_n^{(t+1)})^{-1} e_{n+1}^{(t)}}{1 + (\lambda_{n+1}^{(t)})^{-1} e_{n+1}^{(t)}}, \quad \bar{c}_n^{(t+1)} := \bar{d}_n^{(t+1)} - \mu_{t+1}$$

を導入し、パラメータの条件 (2.2) に注意して計算することで、(2.4) は次のように書き換えられる:

$$\bar{q}_n^{(t+1)} = e_{n+1}^{(t)} (1 + (\kappa_n^{(t+1)})^{-1} \bar{c}_n^{(t+1)}) + \bar{d}_n^{(t+1)}, \quad (3.1a)$$

$$\bar{e}_n^{(t+1)} = e_n^{(t)} \frac{q_n^{(t)}}{\bar{q}_{n-1}^{(t+1)}} \frac{1 + (\kappa_{n-1}^{(t+1)})^{-1} \bar{c}_{n-1}^{(t+1)}}{1 + (\kappa_n^{(t+1)})^{-1} \bar{c}_n^{(t+1)}}, \quad (3.1b)$$

$$\bar{c}_n^{(t+1)} = \left(\bar{d}_{n-1}^{(t+1)} + \frac{\mu_{t+1}}{\kappa_n^{(t)}} e_n^{(t)} (1 + (\kappa_{n-1}^{(t+1)})^{-1} \bar{c}_{n-1}^{(t+1)}) \right) \frac{q_n^{(t)}}{\bar{q}_{n-1}^{(t+1)}}, \quad (3.1c)$$

$$\bar{d}_n^{(t+1)} = \bar{c}_n^{(t+1)} + \mu_{t+1}, \quad (3.1d)$$

$$q_n^{(t+1)} = q_{n+1}^{(t)} \frac{\bar{c}_n^{(t+1)}}{\bar{c}_{n+1}^{(t+1)}}, \quad e_n^{(t+1)} = \bar{e}_n^{(t+1)} \frac{\bar{d}_n^{(t+1)} \bar{q}_{n-1}^{(t+1)}}{\bar{d}_{n-1}^{(t+1)} q_n^{(t)}}. \quad (3.1e)$$

ここでは $\kappa_n^{(t)}$ だけを用いて書いたので、以降パラメータは $\kappa_{n-1}^{(t+2)} = \kappa_n^{(t)}$ を満たすように選ばばよく、 $\lambda_n^{(t)}$ のことは忘れてもよい。次に

$$\begin{aligned} q_n^{(t)} = e^{-Q_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad e_n^{(t)} = e^{-E_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad \bar{q}_n^{(t)} = e^{-\bar{Q}_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad \bar{e}_n^{(t)} = e^{-\bar{E}_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad \bar{c}_n^{(t)} = e^{-\bar{C}_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad \bar{d}_n^{(t)} = e^{-\bar{D}_n^{(t)}/\varepsilon}, \\ \kappa_n^{(t)} = e^{-K_n^{(t)}/\varepsilon}, \quad \mu_t = e^{-M_t/\varepsilon} \end{aligned}$$

と変数変換し、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を取ることで (3.1) は超離散化され、

$$\bar{Q}_n^{(t+1)} = \min \left(E_{n+1}^{(t)} - \max(0, K_n^{(t+1)} - \bar{C}_n^{(t+1)}), \bar{D}_n^{(t+1)} \right), \quad (3.2a)$$

$$\overline{E}_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - \max(0, K_{n-1}^{(t+1)} - \overline{C}_{n-1}^{(t+1)}) + \max(0, K_n^{(t+1)} - \overline{C}_n^{(t+1)}), \quad (3.2b)$$

$$\overline{C}_n^{(t+1)} = \min\left(\overline{D}_{n-1}^{(t+1)}, E_n^{(t)} - \max(0, K_{n-1}^{(t+1)} - \overline{C}_{n-1}^{(t+1)}) + M_{t+1} - K_n^{(t)}\right) - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, \quad (3.2c)$$

$$\overline{D}_n^{(t+1)} = \min(\overline{C}_n^{(t+1)}, M_{t+1}), \quad (3.2d)$$

$$Q_n^{(t+1)} = Q_{n+1}^{(t)} + \overline{C}_n^{(t+1)} - \overline{C}_{n+1}^{(t)}, \quad (3.2e)$$

$$E_n^{(t+1)} = \overline{E}_n^{(t+1)} - \overline{D}_{n-1}^{(t+1)} + \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} - Q_n^{(t)} + \overline{D}_n^{(t+1)} \quad (3.2f)$$

となる。ただし、パラメータの条件は $K_{n-1}^{(t+2)} = K_n^{(t)}$ 。箱玉系と対応させるために、以下では有限格子境界条件

$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = \overline{E}_0^{(t)} = \overline{E}_N^{(t)} = +\infty, \quad \overline{C}_0^{(t+1)} = Q_0^{(t)} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (3.2g)$$

を課す。

4 有限超離散 R_{II} 格子によって記述される箱玉系

まずは (3.2) を有限戸田表現として見たときに箱玉系がどのような振る舞いを示すかを観察してみよう。

		$Q_0^{(t)}$	$E_1^{(t)}$	$Q_1^{(t)}$	$E_2^{(t)}$	$Q_2^{(t)}$
t=0:	.111111.....1111.....11.....	6	6	4	6	2
1:111111.....1111.....11.....	6	4	4	5	2
2:1111.....111111.....111.....	4	4	5	4	3
3:1111.....1111.....1111.....	4	5	4	3	4
4:1111.....11.....111111.....	4	5	2	4	6
5:1111.....1111.....11.....111111.....	4	4	2	7	6
6:111.....111.....111111.....	3	4	3	8	6
7:111.....111.....111111.....	3	4	3	11	6
8:11.....1111.....111111.....	2	4	4	12	6

図 2: 有限超離散 R_{II} 格子が記述する箱玉系: $M_t = +\infty$ 。

		$Q_0^{(t)}$	$E_1^{(t)}$	$Q_1^{(t)}$	$E_2^{(t)}$	$Q_2^{(t)}$
t=0:	.111111.....1111.....11.....	6	6	4	6	2
1:111111.....1111.....11.....	6	6	4	5	2
2:111111.....1111.....11.....	6	7	4	5	2
3:111111.....1111.....11.....	6	7	4	4	2
4:111111.....111.....111.....	6	8	3	4	3
5:111111.....111111.....111.....111.....	6	7	3	4	3
6:111111.....11.....1111.....	6	8	2	4	4
7:111111.....11.....1111.....	6	7	2	5	4
8:111111.....11.....1111.....	6	8	2	5	4

図 3: 有限超離散 R_{II} 格子が記述する箱玉系: $M_t = 4$ 。

		$Q_0^{(t)}$	$E_1^{(t)}$	$Q_1^{(t)}$	$E_2^{(t)}$	$Q_2^{(t)}$
t=0:	.111111.....1111.....11.....	6	6	4	6	2
1:111111.....1111.....11.....	6	6	4	7	2
2:111111.....1111.....11.....	6	7	4	9	2
3:111111.....1111.....11.....	6	7	4	10	2
4:111111.....1111.....11.....	6	8	4	12	2
5:111111.....1111.....11.....	6	8	4	13	2
6:111111.....1111.....11.....	6	9	4	15	2
7:111111.....1111.....11.....	6	9	4	16	2

図 4: 有限超離散 R_{II} 格子が記述する箱玉系: $M_t = 2$ 。

図 2–4 は実際に適当な初期値から有限超離散 R_{II} 格子の時間発展を計算し、それを有限戸田表現として読ん

だ時に対応する箱玉系の状態を描いたものである。ここで、パラメータ $K_n^{(t)}$ は制約を満たすように

$$K_n^{(t)} = \begin{cases} 3 & \text{if } t+2n \text{ is odd,} \\ 5 & \text{if } t+2n \text{ is even,} \end{cases}$$

と選び、 M_t は各図で変えている（同じ図中では t に依らず一定値）。

- 図2では $M_t = +\infty$ としている。このとき、時刻 t の n 番目のソリトンの長さが $K_n^{(t+1)}$ 未満ならば、そのソリトンの速度が $K_n^{(t+1)}$ となっていることがわかる。一方、長さが $K_n^{(t+1)}$ 以上の場合は通常の箱玉系と同じく長さや速度が一致している。
- 図3では $M_t = 4$ としている。長さ6のソリトンを見ると、非自励の有限超離散戸田格子の場合と同じく M_t が運搬車容量として働いていることがわかる。
- 図4では $M_t = 2$ としている。長さ4のソリトンに注目すると、 $K_n^{(t)}$ が $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ と変わると、対応して速度が $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ と変わっていることがわかる。つまり、ソリトンの長さが $K_n^{(t+1)}$ 未満かつ M_{t+1} より大きいときは、これらのパラメータとソリトンの長さから定まるある速度で動いていると考えられる。

以下では、有限超離散 R_{II} 格子によって記述される箱玉系の時間発展ルールの理解を目指そう。そのために、

$$\tilde{K}_n^{(t)} := K_n^{(t)} - \left(E_n^{(t)} - \max(0, K_{n-1}^{(t+1)} - \bar{C}_{n-1}^{(t+1)}) - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} \right) \quad (4.1)$$

という量を導入し、(3.2c) を次のように書き換えてみよう：

$$\begin{aligned} \bar{C}_n^{(t+1)} &= \min(\bar{D}_{n-1}^{(t+1)}, M_{t+1} - \tilde{K}_n^{(t)} + \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)}) - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)} \\ &= \min(\bar{D}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} + \tilde{K}_n^{(t)}, M_{t+1}) + Q_n^{(t)} - \tilde{K}_n^{(t)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

この書き換えにより、まず $(\{Q_n^{(t)}\}_{n=0}^{N-1}, \{E_n^{(t)}\}_{n=1}^{N-1}) \mapsto (\{\bar{Q}_n^{(t+1)}\}_{n=0}^{N-1}, \{E_n^{(t+1)}\}_{n=1}^{N-1})$ の時間発展ルールを次のように理解することができる（図5も参照）。

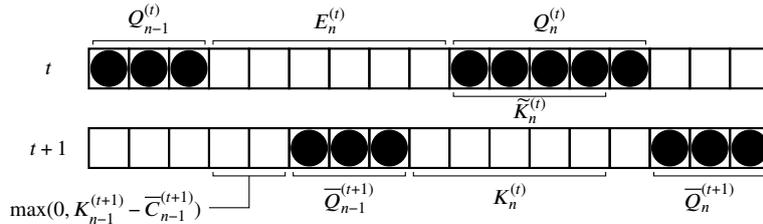


図5: 有限超離散 R_{II} 格子が記述する箱玉系の時間発展ルール。

1. 時刻 t から $t+1$ への時間発展において、玉の運搬車が時刻 t の $n-1$ 番目のソリトンの玉までを取り、運搬車容量制限をかけた直後の状況を考える。ここでは、運搬車容量を超過した玉は消滅するルールで考える。したがって、この時点での運搬車に積まれている玉の数を $\bar{D}_{n-1}^{(t+1)}$ とすれば、その値は高々 M_{t+1} である。
2. 通常ならば運搬車は続く空き箱に玉を入れていくが、今回の場合は最初の $\max(0, K_{n-1}^{(t+1)} - \bar{C}_{n-1}^{(t+1)})$ 個の空き箱には蓋がされており、入れることができない。ここで、 $\bar{C}_{n-1}^{(t+1)}$ はある時点で運搬車に積まれている玉の数である（後述）。蓋がされた空き箱を通過したあとは、通常通り空き箱に玉を入れていく。これが (3.2a), (3.2b) の式の意味である。

3. 運搬車は空き箱列に玉を入れられるだけ入れ、積まれた玉が無くなるか玉が入った箱（次のソリトンの先頭）のところまで来たら、まずはそこから数えて $K_n^{(t)}$ 個の箱に入っている玉を取り、その時点で一旦運搬車容量制限をかける。このとき取る玉の数は、(4.1) で定義された $\tilde{K}_n^{(t)}$ で与えられる。運搬車容量制限をかけた後、残る $Q_n^{(t)} - \tilde{K}_n^{(t)}$ 個の玉を取り、この時点で運搬車に積まれている玉の数を $\bar{C}_n^{(t+1)}$ とする。そしてもう一度運搬車容量制限をかけ、運搬車に積まれている玉の数を $\bar{D}_n^{(t+1)}$ とする。これが (4.2), (3.2d) の式の意味である。以降は 1 に戻って同様のルールで玉の運搬車を動かしていく。

残る式 (3.2e), (3.2f) が定める時間発展 $(\{\bar{Q}_n^{(t+1)}\}_{n=0}^{N-1}, \{\bar{E}_n^{(t+1)}\}_{n=1}^{N-1}) \mapsto (\{Q_n^{(t+1)}\}_{n=0}^{N-1}, \{E_n^{(t+1)}\}_{n=1}^{N-1})$ は、非自励の有限超離散戸田格子の場合と同じく運搬車容量制限で消えた玉を元に戻すルールである。ただし、3 の手順において、最初の $\tilde{K}_n^{(t)}$ 個の玉を取った時に消えた玉は $n-1$ 番目のソリトンの右側の箱に戻し、次の $Q_n^{(t)} - \tilde{K}_n^{(t)}$ 個の玉を取った時に消えた玉は n 番目のソリトンの左側の箱に戻す。実際に、前者で消えた玉の数は (4.2) より $\bar{D}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)}$ 、後者で消えた玉の数は (3.2d) より $\bar{C}_{n+1}^{(t+1)} - \bar{D}_n^{(t+1)}$ で与えられるから、

$$\begin{aligned} Q_n^{(t+1)} &= \bar{Q}_n^{(t+1)} + (\bar{C}_n^{(t+1)} - \bar{D}_n^{(t+1)}) + (\bar{D}_n^{(t+1)} - \bar{Q}_n^{(t+1)} - \bar{C}_{n+1}^{(t+1)} + Q_{n+1}^{(t)}) = Q_{n+1}^{(t)} + \bar{C}_n^{(t+1)} - \bar{C}_{n+1}^{(t+1)}, \\ E_n^{(t+1)} &= \bar{E}_n^{(t+1)} - (\bar{D}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} - \bar{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)}) - (\bar{C}_n^{(t+1)} - \bar{D}_n^{(t+1)}) = \bar{E}_n^{(t+1)} - \bar{D}_{n-1}^{(t+1)} + \bar{Q}_{n-1}^{(t+1)} - Q_n^{(t)} + \bar{D}_n^{(t+1)} \end{aligned}$$

と (3.2e), (3.2f) が得られる。

以上のルールが理解できれば、相互作用がない場合のソリトンの速度を定める式を与えることができる。相互作用がない場合とはソリトン間の距離が十分に離れている場合、つまり $E_n^{(t)}$ が十分に大きい場合なので、(4.1) より $\tilde{K}_n^{(t)} < 0$ であり、このとき (3.2a), (4.2), (3.2d) より $\bar{C}_n^{(t+1)} = Q_n^{(t)}$, $\bar{Q}_n^{(t+1)} = \bar{D}_n^{(t+1)} = \min(Q_n^{(t)}, M_{t+1})$ が成立する。これより、相互作用がない場合の時刻 t から $t+1$ への時間発展における n 番目のソリトンの速度は

$$\max(0, K_n^{(t+1)} - \bar{C}_n^{(t+1)}) + \bar{Q}_n^{(t+1)} = \max(0, K_n^{(t+1)} - Q_n^{(t)}) + \min(Q_n^{(t)}, M_{t+1})$$

で与えられることがわかる。この結果は本節冒頭の観察と合致している。

なお、本稿で与えたルールでは $K_n^{(t)}$ が大きい場合に箱に入っている玉の数以上に運搬車が玉を取得してしまう場合が出てくるが、この場合に M_t が小さいと $Q_n^{(t)}$ や $E_n^{(t)}$ に負の値が出てきてしまい、有限戸田表現での解釈ができなくなってしまうことがある。この点をどう捉えるかは今後の課題である。

5 結論

本稿では、箱玉系と有限超離散戸田格子、直交多項式の 3 者の関係に着目し、この観点から得られる箱玉系の拡張系について議論した。具体的には、 R_{II} 有理関数と呼ばれるある種の双直交関数に対するスペクトル変形の両立条件として R_{II} 格子なる戸田型の非自励超離散可積分系を導出し、その超離散化によって得られる系と対応する箱玉系を得た。また、得られた箱玉系に対してその時間発展ルールを調べることで、運搬車容量に加えてソリトンの速度の下限にあたるパラメータが導入された拡張系となっていることがわかった。

今後の課題としては、今回導出した箱玉系のソリトン性の証明に加えて、Euler 表現、すなわち運搬車付き箱玉系に対する (1.2) のように各箱に入った玉の数を従属変数としてとったときの時間発展方程式を与える問題がある。通常の箱玉系のレベルでも Euler 表現と有限戸田表現の間を行き来する系統的な方法は確立されておらず、有限超離散 R_{II} 格子に対応する箱玉系の Euler 表現を与えることができれば、Euler 表現と有限戸田表現の関係を理解するための一助となると期待される。

謝辞 本研究は科研費（特別研究員奨励費 23・4105）の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] K. Maeda, *A finite Toda representation of the box-ball system with box capacity*, J. Phys. A: Math. Theor., accepted; arXiv:1109.2266v1 [math-ph].
- [2] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Letters, **2** (2010), 95–98.
- [3] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal., **2** (1995), 369–398.
- [4] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Commun. Math. Phys., **210** (2000), 49–83.
- [5] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen., **30** (1997), L733–739.