二項係数とSierpinski三角形

岩尾, 慎介
立教大学理学部

増田, 哲
青山学院大学理工学部

https://doi.org/10.15017/23447

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (1), pp.1-6, 2012-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 1 (pp. 1 - 6)

二項係数と Sierpinski 三角形

岩尾　慎介（IWAO Shinsuke），増田　哲（MASUDA Tetsu）

（Received 12 December 2011; accepted 30 January 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

二項係数と Sierpinski 三角形

立教大学 理学部　岩尾 慎介　(IWAO Shinsuke)
青山学院大学 理工学部　増田 哲　(MASUDA Tetsu)

概　要　よく知られているように，Pascal の三角形を 2 を法として読み替えると，フラクタル図形のひとつである Sierpinski 三角形が得られる．本稿では，任意の素数冪 p^q を法とした Pascal の三角形を考察し，0 でない各文字が成す部分図形のハウスドルフ次元が $\dfrac{\log p(p+1)/2}{\log p}$ であることを示す.

1　はじめに

二項係数を平面に配列した Pascal の三角形を 2 を法として読み替えると，Sierpinski 三角形が得られることはよく知られている [3, 4]．これは，自己相似構造を持ち，ハウスドルフ次元が $\log 3/\log 2$ の典型的なフラクタル図形である．法が一般の素数 p の場合にも，0 でない文字全体が成す図形はハウスドルフ次元が $\dfrac{\log p(p+1)/2}{\log p}$ のフラクタル図形になることが知られている [3, 4]．本稿では，任意の素数冪 p^q を法とした Pascal の三角形を考察し，0 でない各文字が成す部分図形のハウスドルフ次元が $\dfrac{\log p(p+1)/2}{\log p}$ であることを示す.

後の議論のため，法が素数 p の場合の，0 でない文字全体が成す図形についての証明の概略を与えておこう.

補題 1.1. 二項係数 $\dbinom{n-1}{k}$ を素数 p を法として配列した Pascal の三角形を考える．$n = p^r$ $(r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき，かつそのときに限り，第 n 行には，

$$1, p-1, 1, p-1, \cdots 1, p-1, 1$$

と，1 と $p-1$ とが交互に並ぶ.

証明　簡単のため，$p = 3$ の場合について帰納的に示そう（一般の場合も同様）．第 3^r 行に 1 と 2 とが交互に並んでいるとする．二項係数が満たす漸化式から，第 3^r+1 行は，両端が 1 で残りは全て 0 である．第 3^r+1 行から第 $2\cdot 3^r$ 行までに注目すると，第 3^r+1 行の両端の 1 を頂点とし，第 1 行から第 3^r 行と同じ配列の三角形（T_r と呼ぶ）が 2 つ並び，両者に挟まれる形で，成分が全て 0 の逆三角形（O_r と呼ぶ）が並ぶ.

$$\begin{array}{c} 100\cdots001 \\ 11\ 0\cdots0\ 11 \\ \\ \\ \underbrace{12\cdots21}_{3^r\text{ 個}}\ \underbrace{12\cdots21}_{3^r\text{ 個}} \end{array}$$

第 $2\cdot 3^r$ 行は，$0 \leq k \leq 3^r-1$ の範囲で $12\cdots21$ と 1 と 2 とが交互に並び，$3^r \leq k \leq 2\cdot 3^r - 1$ の範囲でも $12\cdots21$ と 1 と 2 とが交互に並ぶことがわかる．よって，第 $2\cdot 3^r+1$ 行は，両端が 1，中央すなわち $k = 3^r$ のとき 2 で，残りは全て 0 となる．0 を除いた 121 という配列は，第 3 行のそれと一致していることに注意しよう．続いて，第 $2\cdot 3^r+1$ 行から第 $3\cdot 3^r = 3^{r+1}$ 行までの配列について

考える．第 $2\cdot 3^r+1$ 行の両端の 1 をそれぞれ頂点として T_r が 2 つ並び，$k=3^r$ の 2 を頂点として，T_r の成分を全て 2 倍した三角形がその間に挟まれる．また，これら 3 つの三角形の間に逆三角形 O_r が挟まれる．

$$\begin{array}{c} 100\cdots00200\cdots001 \\ 11\ 0\cdots0\ 22\ 0\cdots0\ 11 \end{array}$$

$$\underbrace{12\cdots21}_{3^r\text{ 個}}\ \underbrace{21\cdots12}_{3^r\text{ 個}}\ \underbrace{12\cdots21}_{3^r\text{ 個}}$$

このとき，第 3^{r+1} 行には，$121\cdots121$ と，1 と 2 とが交互に 3^{r+1} 個並ぶ．以上により，$n=3^r\,(r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき，第 n 行には 1 と 2 とが交互に $n=3^r$ 個並ぶことが示せた．また，上の議論から，$n\neq 3^r, 2\cdot 3^r$ のときは，第 n 行には 0 が少なくともひとつ存在する．$n=2\cdot 3^r$ のときの配列は上で示した通りだから，1 と 2 とが交互に並ぶのは，$n=3^r\,(r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ のときに限る．□

補題の証明から，Pascal の三角形を素数 p を法として読み替えた図形が自己相似構造を持つことは明らかであろう．さて三角形 T_r に含まれる 0 でない文字（すなわち，$1,2,\dots,p-1$）の個数を N_r と記すと，

$$N_{r+1}=(1+2+\cdots+p)N_r=\frac{p(p+1)}{2}N_r$$

となる．

$$p=5\text{ の場合}\qquad \begin{array}{c} T_{1,r} \\ T_{1,r}\,O_r\,T_{1,r} \\ T_{1,r}\,O_r\,T_{2,r}\,O_r\,T_{1,r} \\ T_{1,r}\,O_r\,T_{3,r}\,O_r\,T_{3,r}\,O_r\,T_{1,r} \\ T_{1,r}\,O_r\,T_{4,r}\,O_r\,T_{1,r}\,O_r\,T_{4,r}\,O_r\,T_{1,r} \end{array} = T_{1,r+1}, \qquad T_{1,1}= \begin{array}{c} 1 \\ 11 \\ 121 \\ 1331 \\ 14141 \end{array}$$

（ここで，$T_{1,r}=T_r$ であり，$T_{i,r}$ は $T_{1,r}$ の各文字を i 倍した三角形を表す.）

つまり，高さを p 倍したとき「面積」が $p(p+1)/2$ 倍となるので，0 でない文字全体が成す部分図形集合のハウスドルフ次元は，$\dfrac{\log p(p+1)/2}{\log p}$ となる．

2 各部分図形のハウスドルフ次元

前節では，0 でない文字全体が成す部分集合のハウスドルフ次元を求めた．本節では，$i\in\mathbb{F}_p^\times=\{1,2,\dots,p-1\}$ に対し，各文字 i が成す部分図形のハウスドルフ次元を求めよう．

まず，$\eta\in\mathbb{F}_p^\times$ を $\mathbb{F}_p^\times$ の原始元のひとつとし，

$$N_r^{(i)}=(T_r\text{ に含まれる }i\text{ の個数}),\quad \vec{N}_r={}^t[N_r^{(1)},N_r^{(\eta)},\dots,N_r^{(\eta^{p-2})}]$$

とする．このとき，$\vec{N}_r$ は漸化式 $\vec{N}_{r+1}=A_p\vec{N}_r$ を満たすことがわかる（初期条件は，$\vec{N}_0={}^t[1,0,\dots,0]$）．ここで，係数行列 A_p は巡回行列，すなわち

$$A_p=\left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^{p-1},\quad a_{i,j}=a_{i+1,j+1}\ (i,j\in\mathbb{F}_p^\times)$$

であり，$a_{i,j}=(T_1$ に含まれる η^{i-j} の個数$)$ で与えられる．例えば，$p=5$ の場合は（$\eta=2$ とおくと），$\vec{N}_r={}^t[N_r^{(1)},N_r^{(2)},N_r^{(4)},N_r^{(3)}]$ および

$$\vec{N}_{r+1}=\begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}\vec{N}_r$$

である．

補題 2.1. C を n 次巡回行列 $C=\left[c_{j-i}\right]_{i,j=1}^{n}$ とする（添字 i,j は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元と読む）．このとき，C の固有値 λ_i および対応する固有ベクトル v_i は，ζ を原始 n 乗根として，

$$\lambda_i=\sum_{j=0}^{n-1}\zeta^{ij}c_j,\quad v_i={}^t\,[1,\zeta^i,\zeta^{2i},\cdots,\zeta^{(n-1)i}]\qquad(i=0,1,\cdots,n-1)$$

で与えられる．

いま，係数行列 A_p の成分は全て非負整数であるから，$\lambda_0>|\lambda_i|\geq 0\,(i\neq 0)$ が成り立つ．ところで，$\eta^{i-1}\in\mathbb{F}_p^{\times}=\{1,\ldots,p-1\}$ の個数の増大度は,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N_{r+1}^{(\eta^{i-1})}}{N_r^{(\eta^{i-1})}}=\lambda_0=\sum_{j=1}^{p-1}a_{1j}=(T_1\text{ に含まれる文字の個数})=\frac{p(p+1)}{2}$$

で与えられるから，各部分図形のハウスドルフ次元は，i に依らず $\dfrac{\log p(p+1)/2}{\log p}$ であることがわかる．

3 法が素数冪の場合

続いて，法が素数冪 $p^q\,(q\geq 2)$ の場合を考察しよう．ここでは便宜上，p^q を法とした二項係数を四角形状に（左上から右下へ）並べることにする．証明の詳細は紙数の都合で割愛する．

3.1 Pascal の三角形の構成法

法が 2^2 の場合を例に説明しよう．最初の 4×4 の配列を S_0 とする．

$$S_0=\begin{matrix}1111\\1230\\1322\\1020\end{matrix}$$

これを更に，2×2 の 4 つの小部分に分け,

$$S_0=\begin{matrix}S_0^{(0,0)}\,S_0^{(0,1)}\\S_0^{(1,0)}\,S_0^{(1,1)}\end{matrix}\qquad S_0^{(0,0)}=\begin{matrix}11\\12\end{matrix}\ ,\quad S_0^{(0,1)}=\begin{matrix}11\\30\end{matrix}\ ,\quad S_0^{(1,0)}=\begin{matrix}13\\10\end{matrix}\ ,\quad S_0^{(1,1)}=\begin{matrix}22\\20\end{matrix}$$

と書こう．同様に，最初の 8×8 の配列を S_1 とすれば,

$$S_1=\begin{matrix}1111\,1111\\1230\,1230\\1322\,3100\\1020\,3000\\1133\,2222\\1210\,2020\\1300\,2200\\1000\,2000\end{matrix}$$

である．これも，4×4 の 4 つの小部分に分け,

$$S_1=\begin{matrix}S_1^{(0,0)}\,S_1^{(0,1)}\\S_1^{(1,0)}\,S_1^{(1,1)}\end{matrix}$$

と書くことにする．

配列 S_0 から S_1 を構成する手続きは，以下のように与えられる．まず，$S_1^{(0,0)}$ を，

$$S_1^{(0,0)} = \begin{array}{cc} S_0^{(0,0)} \times 1 & S_0^{(0,1)} \times 1 \\ S_0^{(1,0)} \times 1 & S_0^{(1,1)} \times 1 \end{array}$$

と解釈する．ここで，$S_0^{(0,0)} \times 1$ は，$S_0^{(0,0)}$ の 4 つの数にそれぞれ 1 を掛けて得られる 2×2 の配列を表す．これを簡潔に

$$S_1^{(0,0)} = S_0 \odot \begin{array}{c} 11 \\ 11 \end{array}$$

と記そう．この記法を用いると，

$$S_1^{(1,0)} = S_0 \odot \begin{array}{c} 13 \\ 10 \end{array} \;, \quad S_1^{(0,1)} = S_0 \odot \begin{array}{c} 11 \\ 30 \end{array} \;, \quad S_1^{(1,1)} = S_0 \odot \begin{array}{c} 22 \\ 20 \end{array}$$

と表せる．各小部分 $S_1^{(i,j)}$ を導出するのに用いた 4 つの 2×2 の配列をまとめて，

$$M = \begin{array}{cc} 11 & 11 \\ 11 & 30 \\ 13 & 22 \\ 10 & 20 \end{array} = \begin{array}{cc} M^{(0,0)} & M^{(0,1)} \\ M^{(1,0)} & M^{(1,1)} \end{array}$$

とし，簡潔に，$S_1 = S_0 \odot M$ と書いてしまおう（厳密にいえば，同じ記号 $\odot$ を割り当てるのはよくない）．以上により，S_0 と M との情報から，S_1 が構成できることがわかる．一般に，以下が成り立つ．

命題 3.1. 素数冪 p^q を法とする Pascal の三角形の最初の $p^{q+r} \times p^{q+r}$ の部分を S_r とする．このとき，適当な $p^q \times p^q$ 補助配列 M が存在して，$S_{r+1} = S_r \odot M$ が成り立つ．

実は，補助配列 M 自身が，S_0 から構成できる．

命題 3.2. 補助配列 M は，$S_0 = S_0^{(0,0)} \odot M$ により構成できる．

例　法が 3^2 の場合

$$S_0 = \begin{array}{c:c:c} 111 & 111 & 111 \\ 123 & 456 & 780 \\ 136 & 163 & 100 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 141 & 282 & 333 \\ 156 & 870 & 360 \\ 163 & 200 & 300 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 171 & 333 & 666 \\ 180 & 360 & 630 \\ 100 & 300 & 600 \end{array} \;, \qquad M = \begin{array}{c:c:c} 111 & 111 & 111 \\ 111 & 472 & 740 \\ 111 & 122 & 100 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 141 & 282 & 333 \\ 172 & 880 & 330 \\ 122 & 200 & 300 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 171 & 333 & 666 \\ 140 & 330 & 660 \\ 100 & 300 & 600 \end{array}$$

注釈 3.3. 上では煩雑さを避けるため，同じ記号 $\odot$ を異なる意味で用いている．気になる読者のために，演算 $\odot$ の正確な定義を与えておこう．N^2 個の $u \times u$ 配列 $X^{(n,m)}\,(n,m = 0,1,2,\ldots,N-1)$ に対して，$X^{(n,m)}$ を並べた $Nu \times Nu$ 配列

$$\begin{array}{cccc} X^{(0,0)} & X^{(0,1)} & \cdots & X^{(0,N-1)} \\ X^{(1,0)} & X^{(1,1)} & \cdots & X^{(1,N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{(N-1,0)} & X^{(N-1,1)} & \cdots & X^{(N-1,N-1)} \end{array}$$

を，$X = \left(X^{(n,m)}\right)_{n,m=0,1,\ldots,N-1}$ と書くことにする．配列 X および $N \times N$ 配列 $Y = (y_{n,m})_{n,m=0,1,\ldots,N-1}$ に対して，演算 $\odot$ を

$$X \odot Y := \left(y_{n,m} \cdot X^{(n,m)}\right)_{n,m=0,1,\ldots,N-1}$$

で定める．このとき，命題 3.1, 3.2 は，$S_0 = (S_0^{(0,0)} \odot M^{(n,m)})_{n,m=0,1,\ldots,p-1}$ を満たす $p^{q-1} \times p^{q-1}$ 配列 $M^{(n,m)}$ $(n,m = 0,1,\ldots,p-1)$ が存在し，$S_{r+1} = (S_r \odot M^{(n,m)})_{n,m=0,1,\ldots,p-1}$ が任意の自然数 r に対して成立することを主張している．

3.2 個数に関する漸化式

配列 $D_r := S_{(q-1)r}$ に含まれる各文字の個数を数え上げよう．配列 $D_r^{(i,j)}$ $(i,j = 0,1,\ldots,p^{q-1}-1)$ にある二項係数であって，p で l 回だけ割り切れ，l 回割った値が（p^q を法として）$k \in (\mathbb{Z}/p^q\mathbb{Z})^\times$ に等しいものの個数を，$N_{r,(i,j)}^{(k;l)}$ とする．多項式 $f_{r,(i,j)}^{(k)} = f_{r,(i,j)}^{(k)}(z)$ を

$$f_{r,(i,j)}^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} N_{r,(i,j)}^{(k;l)} z^l$$

で定めよう．次に，適当な全単射 $\phi : \{(i,j) \mid i,j = 0,1,\ldots,p^{q-1}-1\} \to \{1,2,\ldots,p^{2(q-1)}\}$ により，配列 D_r の各小部分 $D_r^{(i,j)}$ に番号を付ける．この ϕ および $(\mathbb{Z}/p^q\mathbb{Z})^\times$ の原始元 η を用いて，ベクトル f_r を

$$f_r^{(k)} = {}^t\left[f_{r,\phi^{-1}(1)}^{(k)}, f_{r,\phi^{-1}(2)}^{(k)}, \ldots, f_{r,\phi^{-1}(p^{2(q-1)})}^{(k)}\right], \quad f_r = {}^t\left[f_r^{(\eta^0)}, f_r^{(\eta)}, \ldots, f_r^{(\eta^{p^{q-1}(p-1)})}\right]$$

で導入する．大雑把にいえば，$f_r^{(k)}$ は，p で l 回割った余りが k であるものの個数の母函数である．

例　法が 3^2 の場合，$(\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z})^\times = \{1,2,4,5,7,8\}$ であり，$\eta = 2$ と選んで

$$f_r = {}^t\left[f_r^{(1)}, f_r^{(2)}, f_r^{(4)}, f_r^{(8)}, f_r^{(7)}, f_r^{(5)}\right]$$

とできる．

前小節で論じた，補助配列 M による配列 S_r の生成（漸化式）を，f_r に関する漸化式に読み替える．詳細は省くが，漸化式を $f_{r+1} = K f_r$ と書くと，係数行列 K は，ブロック巡回行列

$$K = \sum_{i=0}^{p^{q-1}(p-1)-1} A_i \otimes C^i, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

であることがわかる．ここで，C の次数は $p^{q-1}(p-1)$ であり，これは $(\mathbb{Z}/p^q\mathbb{Z})^\times$ の位数に等しい．各 A_i は 0,1 および z の単項式を成分とする $p^{q-1} \times p^{q-1}$ 行列である．巡回行列に対する補題 2.1 より，係数行列 K はブロック対角化され，我々の問題は，行列 $\Lambda_i = \sum_{j=0}^{p^{q-1}(p-1)-1} \zeta^{ij} A_j$ $(i = 0,1,\ldots,p^{q-1}(p-1)-1)$ の絶対値最大の固有値を探す問題に帰着する（ζ は原始 $p^{q-1}(p-1)$ 乗根）．

これも詳細は省くが，実際には，行列 $\Lambda_0(z) = \sum_{j=0}^{p^{q-1}(p-1)-1} A_j(z)$ の絶対値最大の固有値 $\lambda_0 = \lambda_0(z)$ を求めればよいことがわかる．更には，$\lim_{z \to +0} \lambda_0(z)$ が 0 以外の各文字の個数の増大度を決めることがわかる．すなわち，初めから $\Lambda_0(0)$ の絶対値最大の固有値を求めればよい．

例　法が 3^2 の場合,

$$\Lambda_0(0) = \sum_{j=0}^{5} A_j(0) = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

である．従って，絶対値最大の固有値，すなわち，0 以外の各文字の個数の増大度は 6 であり，ハウスドルフ次元は $\log 6/\log 3$ であることがわかる．

一般に，$\Lambda_0(0)$ は，最初の $\dfrac{p^{q-1}(p+1)^{q-2}(p-1)}{2^{q-1}}$ 行は全ての成分が 1，次の $\dfrac{p^{q-1}(p+1)^{q-2}}{2^{q-2}}$ 行は最初の $\dfrac{p^{q-1}(p^{q-1}+1)}{2}$ 個の成分が 1 で残りの成分は全て 0 であるような行列である．この行列の 0 でない固有値は唯一つであり，その値は $[p(p+1)/2]^{q-1}$ である．従って，配列の大きさの尺度が p^{q-1} 倍になるときの 0 でない文字の個数の増大度は $[p(p+1)/2]^{q-1}$ であり，ハウスドルフ次元は

$$\frac{\log[p(p+1)/2]^{q-1}}{\log p^{q-1}} = \frac{\log p(p+1)/2}{\log p}$$

であることがわかる．

4　Lucas の定理

最後に，本稿の内容の背景にある定理を紹介しておこう [2]．

定理 4.1. p を素数とする．二項係数 $\dbinom{n}{k}$ に対し，n および k を

$$n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_r p^r, \quad k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_r p^r$$

と p 進展開する．このとき，

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{j=0}^{r} \binom{n_j}{k_j} \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

が成り立つ．ここで，$k_i > n_i$ ならば $\dbinom{n_i}{k_i} = 0$ とする．

上の定理は，法が素数冪 p^q の場合にも一般化されている [1]．本稿での議論は，これらの定理を 0 でない文字の個数に関する漸化式に読み替え，それらの増大度を具体的に計算したものである．

参考文献

[1] K. S. Davis and W. A. Webb, Lucas’ theorem for prime powers, European J. Combin. **11** (1990) 229–233.

[2] E. Lucas, Sur les congruences des nombres eulériens et les coefficients différentiels des functions trigonométriques suivant un module premier, Bull. Soc. Math. France **6** (1878) 49–54.

[3] S. Wolfram, Cellular Automata and Complexity : Collected Papers, (Westview Press, Boulder, 1994).

[4] S. Wolfram, A New Kind of Science, (Wolfram Media, Champaign, 2002)