固有値分解のための超平面制約法に対する理論解析

吉武, 奈緒美
京都府立大学生命環境学部

岩崎, 雅史
京都府立大学生命環境学部

近藤, 弘一
同志社大学理工学部

https://doi.org/10.15017/23417

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (33), pp.214-219, 2011-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 33 (pp. 214 - 219)

固有値分解のための超平面制約法に対する理論解析

吉武　奈緒美（YOSHITAKE Naomi），岩崎　雅史（IWASAKI Masashi），近藤　弘一（KONDO Koichi）

（Received 16 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

固有値分解のための超平面制約法に対する理論解析

京都府立大学生命環境学部　吉武 奈緒美　(YOSHITAKE Naomi)
京都府立大学生命環境学部　岩崎 雅史　(IWASAKI Masashi)
同志社大学理工学部　近藤 弘一　(KONDO Koichi)

概　要　行列の固有値分解を求めるためのアルゴリズムとして超平面制約法が提案されている [2]．特異値分解用の超平面制約法については数値安定性，収束性，計算精度などの解析が [4, 5, 6] において進められているが，固有値分解用に関してはアルゴリズムが定式化された段階で未解明な部分が少なくない．本報告では，固有値分解用の超平面制約法に関するいくつかの性質を明らかにする．

1　はじめに

行列 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ およびスカラー $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ が存在するならば，λ が A の固有値，$\boldsymbol{x}$ が A の固有ベクトルとなる．固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ は A の固有対と呼ばれる．本報告では，n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ として，固有対 $(\lambda_1, \boldsymbol{x}_1), (\lambda_2, \boldsymbol{x}_2), \ldots (\lambda_n, \boldsymbol{x}_n)$ を求める固有値分解について考える．

固有値分解の応用分野は多岐にわたるため，高速かつ高精度に固有値分解を求めるためのアルゴリズム開発は重要課題といえる．固有値分解のためのアルゴリズムとして，ハウスホルダー QR 法，分割統治法，ヤコビ法などがあるが，応用分野の要求を完全には満たせていないのが現状である [1, 3]．著者らは，[2] において高精度に固有値分解を求めるためのアルゴリズムとして超平面制約法を提案した．超平面制約法では，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の存在範囲を超平面に制約して $\boldsymbol{x}$ に関する非線形 2 次方程式を導き，それをニュートン型反復によって解く．[2] では超平面制約法が高精度に固有値分解できることを数値的に示しているが，超平面制約法の性質に関する理論的な考察はなされていない．本報告では，超平面制約法におけるニュートン型反復について再検討し，その収束性について明らかにする．2 節では，まず固有値分解用の超平面制約法について概説する．3 節では，考え得るニュートン型反復をすべて挙げ，そのうち有効なニュートン型反復がどれになるかを調べる．4 節で有効なニュートン型反復の収束性について証明する．まとめと今後の課題は 5 節で述べる．

2　固有値分解のための超平面制約法

例えば，(1.1) を満たす A の固有対 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ を求める際に，制約条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ を付加した

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$$

を解いてもよい．また，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha \boldsymbol{x}$ も A の固有ベクトルとなるので，$\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ の代わりに $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = C (\neq 0)$ を課してもよい．つまり，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \quad (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = C \tag{2.1}$$

から A の固有対 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ を求めてもよい．ただし，$\boldsymbol{z}$ は超平面 $P = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = C$ の法線ベクトルであり，設定方法については [2] を参照されたい．

以下に，(2.1) の解 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ に関する定理を示す．

定理 2.1 $\boldsymbol{z}$ が $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_k) \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$ を満たすならば，(2.1) の解は

$$(\lambda, \boldsymbol{x}) = (\lambda_k, \alpha_k \boldsymbol{x}_k), \quad \alpha_k = \frac{C}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

となる．

証明 (2.1) の第 1 式に $\lambda = \lambda_k,\ \boldsymbol{x} = \alpha_k \boldsymbol{x}_k$ を代入すると，$A\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ なので $(\lambda_k, \alpha_k \boldsymbol{x}_k)$ は A の固有対である．(2.1) の第 2 式に $\boldsymbol{x} = \alpha_k \boldsymbol{x}_k$ を代入すると $(\boldsymbol{z}, \alpha_k \boldsymbol{x}_k) = C$ であり，α_k はスカラーなので $\alpha_k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_k) = C$ となる．よって，α_k について整理すると $\alpha_k = C/(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_k)$ を得られる． □

ここで，(2.1) の第 1 式の両辺に左側から $\boldsymbol{z}^H$ をかける．ただし，上付き添え字の H は共役転置を表す．λ はスカラーなので $(A^H \boldsymbol{z})^H \boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ となる．$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = C$ を踏まえて λ について整理すると，$\lambda = (A^H \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})/C$ が得られる．λ は $\boldsymbol{x}$ の関数とみなせるので，改めて

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})}{C}, \quad \boldsymbol{x} = A^H \boldsymbol{z}$$

と書くことにする．このとき，A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が解となる非線形方程式

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.2}$$

が導かれる．超平面制約法では，(2.2) を解くためにニュートン型反復を使用する．具体的な漸化式の 1 つは，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(\ell+1)} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}}^{(\ell+1)}}{(\boldsymbol{z}, \hat{\boldsymbol{x}}^{(\ell+1)})}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, \ell_{\max}, \\ \hat{\boldsymbol{x}}^{(\ell+1)} = \boldsymbol{x}^{(\ell)} - J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})^{-1} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}), \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) I - \dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)} \boldsymbol{w}^H}{C}, \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{C}. \end{cases} \tag{2.3}$$

である．ここで，$J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ は $F(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ のヤコビ行列，I は $n \times n$ の単位行列である．適当な $\boldsymbol{x}^{(0)}$ に対して，数列 $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\ldots}$ が極限 $\ell \to \infty$ で収束するならば，$\lim_{\ell \to \infty} \boldsymbol{x}^{(\ell)}$ は (2.2) の解となる．

3 最適なニュートン型反復の選択

(2.2) を解くために (2.3) では $F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}), J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}), \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ を

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) \boldsymbol{x}^{(\ell)}, \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) I - \dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)} \boldsymbol{w}^H}{C}, \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{C} \end{cases} \tag{3.1}$$

としている．ここで，$F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}), J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}), \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ の定め方は (3.1) 以外に考え得ることに注意したい．(3.1) と異なる 4 つの候補を以下に示す．

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A \dfrac{C\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})} - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) \dfrac{C\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}, \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{C}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})} \left(A - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) I - \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})} \right), \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{C}. \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})\boldsymbol{x}^{(\ell)}, \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})I + \left(\dfrac{\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})\boldsymbol{z}}{C} - \dfrac{\boldsymbol{w}}{C}\right)^H \boldsymbol{x}^{(\ell)}, \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}. \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A\dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|} - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})\dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|}, \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|}(A - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})I), \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}. \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = A\dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|} - \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})\dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|}, \\ J(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{A}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|} - \dfrac{A\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(l)}\|^3}\boldsymbol{x}^H + \dfrac{\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|^3}\boldsymbol{x}^H - \dfrac{(A\boldsymbol{x}^{(\ell)})^H}{(\boldsymbol{x}^{(\ell)}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}\dfrac{\boldsymbol{x}^{(\ell)}}{\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}\|}, \\ \lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}) = \dfrac{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}^{(\ell)})}{(\boldsymbol{x}^{(\ell)}, \boldsymbol{x}^{(\ell)})}. \end{cases} \tag{3.5}$$

以降，(3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) のように $F(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$, $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$, $\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ を定めたニュートン型反復をそれぞれタイプ 1，タイプ 2，タイプ 3，タイプ 4，タイプ 5 と呼ぶことにする．タイプ 1 では固定された超平面上に，タイプ 2 では固定された任意の超平面上に固有ベクトルの存在範囲が制約される．タイプ 3 では固有ベクトルの存在範囲が超平面上に制約されるが，超平面は反復ごとに変化する．タイプ 4 では固有ベクトルが球面に，タイプ 5 では固有対が球面に制約される．

各タイプにおいてヤコビ行列 $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ が正則と仮定すると，タイプ 3，タイプ 4，タイプ 5 は 2 回目の反復で $\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$ となる．よって，少なくともタイプ 3，タイプ 4，タイプ 5 ではすべての固有対を求めることはできない．ゆえに，タイプ 1，タイプ 2 が有効なニュートン型反復と結論づけられる．タイプ 1，タイプ 2 における $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\ldots}$ の存在範囲に関する定理は以下のとおりである．

定理 3.1 $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ が $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell)}) = C$ を満たすとする．ヤコビ行列 $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ が正則ならば，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}$ はまた $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(\ell+1)}) = C$ を満たす．つまり，$J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ が超平面上に存在するならば，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}$ も超平面上に存在する．

4 ニュートン型反復の収束性

ニュートン型反復に含まれるヤコビ行列 $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ を正則と仮定すると，以下の定理が得られる．

定理 4.1 ヤコビ行列 $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ が正則ならば，$\|J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})^{-1}\| \le M_1$ となる正の定数 M_1 が存在する．

証明 $J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ が正則なので

$$\|J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})^{-1}\| \le \frac{1}{\|\det(J(\boldsymbol{x}))\|}\|\mathrm{adj}(J(\boldsymbol{x}))\|$$

であり，$\|\det(J(\boldsymbol{x}))\|$ と $\|\mathrm{adj}(J(\boldsymbol{x}))\|$ は有界となる．よって，$\|J(\boldsymbol{x}^{(\ell)})^{-1}\| \le M_1$ である． □

一般的に，ニュートン法に含まれるヤコビ行列が正則ならば，ニュートン法は 2 次収束することが知られている．ニュートン型反復が核となる超平面制約法は，ニュートン法と同様の収束性

をもつことが予想される．本節では，$\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ から $\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}$ へ変換を 2 つの写像 Φ, Ψ にわけて，タイプ 1 のニュートン型反復の収束性を明らかにする．写像 Φ, Ψ は以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x} - J(\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x}),\\ \Psi(\boldsymbol{x}) &= \frac{C}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

まず，$F(\boldsymbol{x})$ と $J(\boldsymbol{x})$ に関する 2 つの補助定理を与える．

補助定理 4.2 $F(\boldsymbol{x}), J(\boldsymbol{x})$ に対して，

$$F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + J(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} - \lambda(\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} \tag{4.1}$$

が成り立つ．

証明 $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ より，

$$F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}) + \left(A - \lambda(\boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w}^H}{C}\right)\Delta\boldsymbol{x} - \lambda(\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}$$

なので，(4.1) が得られる． □

補助定理 4.3 $\|\Delta\boldsymbol{x}\| \to 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) &- J(\boldsymbol{x})^{-1}J'(\Delta\boldsymbol{x})J(\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x}) - J(\boldsymbol{x})^{-1}\lambda(\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}\\ &- (J(\boldsymbol{x})^{-1}J'(\Delta\boldsymbol{x}))^2 J(\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x}) + \eta(\|\boldsymbol{x}\|^3)\end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ．ただし，

$$J'(\Delta\boldsymbol{x}) = \lambda(\Delta\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{w}^H}{C}, \tag{4.3}$$

$$\eta(\|\boldsymbol{x}\|^3) = \begin{pmatrix} O(\|\boldsymbol{x}\|^3)\\ O(\|\boldsymbol{x}\|^3)\\ \vdots \\ O(\|\boldsymbol{x}\|^3)\end{pmatrix}$$

である．

証明 $J(\boldsymbol{x}) = A - \lambda(\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x})$ と (4.3) より，

$$J(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x}) + J'(\Delta\boldsymbol{x}) \tag{4.4}$$

となる．$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J(\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x})$ なので，補助定理 4.2 と (4.4) より，

$$\Phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} - \left(J(\boldsymbol{x}) + J'(\Delta\boldsymbol{x})\right)^{-1}(F(\boldsymbol{x}) + J(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} - \lambda(\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}) \tag{4.5}$$

となる．(4.5) において $(J(\boldsymbol{x}) + J'(\Delta\boldsymbol{x}))^{-1} = (I_n - J(\boldsymbol{x})^{-1}J'(\Delta\boldsymbol{x}))^{-1}J(\boldsymbol{x})^{-1}$ であり，さらに，

$$(I_n - J(\boldsymbol{x})^{-1}J'(\Delta\boldsymbol{x}))^{-1}J(\boldsymbol{x})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(J(\boldsymbol{x})^{-1}J'(\Delta\boldsymbol{x}))^i J(\boldsymbol{x})^{-1}$$

なので，(4.2) が得られる． □

次に，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)} = \Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ によって生成される $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\dots}$ の収束性に関する定理を導く．

定理 4.4 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\neq 0$ とする．$\boldsymbol{x}^{(0)}$ が $\alpha_k\boldsymbol{x}_k$ に十分近いならば，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}=\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)})$ によって生成される $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\ldots}$ は $\ell\to\infty$ において $\alpha_k\boldsymbol{x}_k$ に 2 次収束する．

証明 $\boldsymbol{x}^*=\alpha_k\boldsymbol{x}_k$ とする．補助定理 4.3 において $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*, \Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*$ とすると，$F(\boldsymbol{x}^*)=0, \Phi(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^{(\ell+1)}=\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell+1)})$ なので，

$$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}-\boldsymbol{x}^*=-J(\boldsymbol{x})^{-1}\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)+\eta(\|\boldsymbol{x}\|^3)$$

となる．ここで，定理 4.1 より $\|J(\boldsymbol{x})^{-1}\|\leq M_1$ であり，

$$|\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)|=\left|\frac{\boldsymbol{w}^H}{C}(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)\right|\leq M_2\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*\|$$

となる正の定数 M_2 が存在するので，

$$\|\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}-\boldsymbol{x}^*\|\leq M_1M_2\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*\|^2 \tag{4.6}$$

が得られる．(4.6) は，$\ell\to\infty$ において $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ が $\boldsymbol{x}^*$ に 2 次収束することを表している． □

最後に，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}=\Psi(\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)}))$ (漸化式 (2.3)) によって生成される $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\ldots}$ の収束性に関する定理を与える．

定理 4.5 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\neq 0$ とする．$\boldsymbol{x}^{(0)}$ が $\alpha_k\boldsymbol{x}_k$ に十分近いならば，$\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}=\Psi(\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)}))$ によって生成される $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=0,1,\ldots}$ は $\ell\to\infty$ において $\alpha_k\boldsymbol{x}_k$ に 2 次収束する．

証明 $\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$ のテイラー級数を考える．$(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})$ なので，

$$\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=\frac{C}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\left(1+\frac{(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$$

となる．また，

$$\left(1+\frac{(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\right)^{-1}=1-\left(\frac{(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\right)+\left(\frac{(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\right)^2-\cdots$$

を利用すると，

$$\Psi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=\frac{C}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}+\frac{C}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}\Delta\boldsymbol{x}-\frac{C(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})^2}\boldsymbol{x}-\frac{C(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})^2}\Delta\boldsymbol{x}+\frac{C(\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})^3}\boldsymbol{x}+\eta(\|\boldsymbol{x}\|^3) \tag{4.7}$$

が得られる．ここで，$\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)}:=\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*$ とおく．補助定理 4.3 において $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*, \Delta\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ とすると，$F(\boldsymbol{x}^*)=0, \Phi(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*, \Phi(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$ より，

$$\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)})=\boldsymbol{x}^*-\lambda(\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)})(J(\boldsymbol{x}^*))^{-1}\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)}+\eta(\|x\|^3) \tag{4.8}$$

となる．(4.7) において $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*, \Delta\boldsymbol{x}=-\lambda(\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)})(J(\boldsymbol{x}^*))^{-1}\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)}+\eta(\|x\|^3)$ とし，$(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}^*)=C$ および (4.8) を使うと，

$$\Psi(\Phi(\boldsymbol{x}^{(\ell)}))=\boldsymbol{x}^*-\lambda(\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)})\left(I_n-\frac{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{z}^H}{C}\right)(J(\boldsymbol{x}^*)^{-1}\Delta\boldsymbol{x}^{(\ell)}+\eta(\|x\|^3)$$

になる．よって，

$$\|\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}-\boldsymbol{x}^*\|=\left\|J(\boldsymbol{x})^{-1}\lambda(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)\left(I_n-\frac{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{z}^H}{C}\right)(\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*)+\eta(\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*\|^3)\right\|$$

が成り立つ．ゆえに，$\|I_n-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{z}^H/C\|\leq M_3$ となる正の定数 M_3 が存在するので，定理 4.4 を踏まえると，

$$\|\boldsymbol{x}^{(\ell+1)}-\boldsymbol{x}^*\|\leq M_1M_2M_3\|\boldsymbol{x}^{(\ell)}-\boldsymbol{x}^*\|^2 \tag{4.9}$$

が導かれる．(4.9) は $\ell\to\infty$ において $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ が $\boldsymbol{x}^*$ に 2 次収束することを意味する． □

5　まとめと今後の課題

本報告では，固有値分解のための超平面制約法について，いくつかの数値特性を明らかにした．まず，超平面制約法の核となるニュートン型反復として 5 つのタイプが考えられるが，そのうち 2 つのタイプが有効であることを示した．続いて，ニュートン型反復に含まれるヤコビ行列は常に正則と仮定して，1 つの有効なタイプに絞ってその局所 2 次収束性を証明した．

もう 1 つの有効なニュートン型反復について，今後その収束性を明らかにしたい．また，ヤコビ行列の正則性に関する議論や誤差解析による計算精度の検証なども今後の研究課題である．

参考文献

[1] J. W. Demmel: “Applied Numerical Linear Algebra”, SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] K. Kondo, S. Yasukouchi and M. Iwasaki: “Eigendecomposition algorithms solving sequentially quadratic systems by Newton method”, JSIAM Letters **1** (2009), 40–43.

[3] LAPACK, http://www.netlib.org/lapack/.

[4] K.Yadani, K.Kondo and M.Iwasaki: “A singular value decompositon algorithm based on solving hyperplane constrained nonlinear systems”, Appl. Math. Comp. **216** (2010), 779–790.

[5] K. Yadani, K. Kondo and M. Iwasaki: “On the convergence of the V-type hyperplane constrained method for singular value decomposition”, JSIAM Letters **2** (2010), 21–24.

[6] K. Yadani, K. Kondo and M. Iwasaki: “Mixed double-multiple precision version of hyperplane constrained method for singular value decomposition”, JSIAM Letters **2** (2010), 25–28.