Cauchy双直交多項式のスペクトル保存変形

三木, 啓司
京都大学大学院情報学研究科, (独)日本学術振興会特別研究員DC1

辻本, 諭
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/23414

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (30), pp.196-201, 2011-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 30 (pp. 196 - 201)

Cauchy 双直交多項式のスペクトル保存変形

三木　啓司（MIKI Hiroshi），辻本　諭（TSUJIMOTO Satoshi）

（Received 14 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

Cauchy 双直交多項式のスペクトル保存変形

京大 情報学,(独) 日本学術振興会特別研究員 DC1　三木 啓司　(MIKI Hiroshi)
京都大学大学院 情報学研究科　辻本 諭　(TSUJIMOTO Satoshi)

概　要　Cauchy 双直交多項式は，Degasperis-Procesi 方程式の逆散乱問題に付随する Padé 近似問題を解く際にあらわれる多項式列である．本報告では，Cauchy 双直交多項式に対してスペクトル保存変形を導入し，そこから非線形な方程式系が導出できることを示す.

1　はじめに

半無限格子上における戸田方程式の Lax 対を考えると, 波動関数に直交多項式があらわれる, というのはよく知られた事実である [4]. このとき, 戸田方程式の時間発展が直交多項式のスペクトル変形と自然に対応がついている. このような関係は戸田方程式と直交多項式だけにとどまらず, 様々な可積分系と直交関数系との対応が知られている (表 1).

表 1: 直交関数系と可積分系の対応

直交関数系	可積分系
直交多項式	戸田分子方程式
対称な直交多項式	Lotka-Volterra 方程式
Laurent 双直交多項式	modified-KdV 方程式
行列型直交多項式	Hungry 戸田方程式

この観点から, 近年では直交関数系のスペクトル変形から新しい可積分系を導く動きも見られている. 例えば, FST chain, R_{II}-chain 等が主な結果である [3, 5].

本報告では, 2009 年に Peakon 解を持つ可積分な方程式である Degasperis-Procesi 方程式

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{1.1}$$

の逆散乱問題に附随した Hermite-Padé 近似問題において導入された直交関数系である Cauchy 双直交多項式に着目する [2]. 特に, Cauchy 双直交多項式のスペクトル変形を新たに構築し, 対応する可積分系の導出を行う.

2　Cauchy 双直交多項式

2.1　基礎事項

本節では [1] に基づいて, Cauchy 双直交多項式に関する基本的な説明を行う. まず, Cauchy 双直交多項式に関する定義を与える.

定義 2.1. 以下の表記を持つ双線型二次形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}$ を考える:

$$\langle f(x), g(y)\rangle = \iint \frac{f(x)g(y)}{x+y} d\rho_1(x) d\rho_2(y). \tag{2.1}$$

この双線型二次形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に対して, 双直交関係式ならびに多項式性

$$\langle p_m(x), q_n(y)\rangle = h_n\delta_{mn} \quad (\exists h_n\neq 0), \tag{2.2a}$$

$$\deg(p_n(x)) = \deg(q_n(y)) = n \tag{2.2b}$$

を満足する多項式列の組 $(\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \{q_n(y)\}_{n=0}^{\infty})$ を *Cauchy* 双直交多項式と呼ぶ. 但し, 積分領域ならびに, *Stieltjes* 関数 $d\rho_1, d\rho_2$ は,

- モーメント $\langle x^i, y^j\rangle$ が有限の値で確定する
- $\det(\langle x^i, y^j\rangle)_{i,j=0}^{N}\neq 0$

を満足するようなものを仮定しておく.

注意 2.2. モーメントを

$$I_{i,j} := \langle x^i, y^j\rangle \tag{2.3}$$

で定めたとき, 上記の (2.1) の定義は, 通常の双線型二次形式に対して, モーメントの拘束条件:

$$I_{i+1,j} + I_{i,j+1} = \alpha_i\beta_j \quad \exists\alpha_i, \beta_j \quad \mathbb{R} \tag{2.4}$$

を課したものとみなすこともできる.

双直交多項式に関する一般論から, Cauchy 双直交多項式列に対して monicity 条件

$$p_n(x) = x^n + (\text{lower term}), \tag{2.5a}$$

$$q_n(y) = y^n + (\text{lower term}) \tag{2.5b}$$

を課せば, Cauchy 双直交多項式列は一意に定まる. 従って, 以降では Cauchy 双直交多項式は monic なものを考えることにする. さらに, 対称性から双直交多項式列の中でも $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ についてのみ議論をすすめていく.

Cauchy 双直交多項式は四項間漸化式を満足することが知られている:

命題 2.3. *Cauchy* 双直交多項式 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は次の四項間漸化式を満足する[1].

$$x(p_{n+1}(x) + a_n p_n(x)) = p_{n+2}(x) + b_n p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + d_n p_{n-1}(x) \quad n\geq -1, \tag{2.6a}$$

$$p_0(x) = 1, \quad p_{-1}(x) = p_{-2}(x) = 0 \tag{2.6b}$$

ここで, a_n, b_n, c_n, d_n はある定数であり, 特に

$$a_n = -\frac{\int p_{n+1}(x)d\rho_1(x)}{\int p_n(x)d\rho_1(x)}. \tag{2.6c}$$

[1] この形の漸化式が Cauchy 双直交多項式を特徴付けるものであるかどうかは明らかにされていない

証明. $n \le 1$ の時は自明. $n \ge 2$ の時のみ示す.

$$x(p_{n+1}(x)+a_n p_n(x)) = p_{n+2}(x)+\sum_{k=0}^{n+1}\alpha_k^n p_k(x)$$

を仮定する ($\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}[x]$ の基底をなすのでこの仮定は適切である). ここで, 任意の $r(y)\in\mathbb{R}[y]$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle x(p_{n+1}(x)+a_n p_n(x)), r(y)\rangle &= \iint \frac{x(p_{n+1}(x)+a_n p_n(x))r(y)}{x+y} d\rho_1(x)d\rho_2(y)\\ &= \iint \left(1-\frac{y}{x+y}\right)(p_{n+1}(x)+a_n p_n(x))r(y)d\rho_1(x)d\rho_2(y)\\ &= -\iint \frac{(p_{n+1}(x)+a_n p_n(x))yr(y)}{x+y} d\rho_1(x)d\rho_2(y)\\ &= \langle p_{n+1}(x)+a_n p_n(x), -yr(y)\rangle\end{aligned}$$

が成立する. したがって, $r(y)=q_k(y)$ と選べば, 双直交性より,

$$\alpha_k^n h_k = \langle p_{n+1}(x)+a_n p_n(x), -yq_k(y)\rangle = 0 \quad (k=0,\cdots,n-2)$$

となるので, 所望の式が得られる. □

2.2 連続的なスペクトル保存変形

前節では Cauchy 双直交多項式列が四項間漸化式を満足することを紹介した. つまり,Cauchy 双直交多項式がとあるスペクトル問題の固有関数になっている. 従って, これに対してスペクトル保存変形を与えることで Lax 対が構成できる.

本節ではモーメントの連続的な変形を考えることで Cauchy 双直交多項式の連続的なスペクトル変形を与えることにする. Cauchy 双直交多項式は双直交多項式の特別な場合であることに留意して, ここではモーメントの連続的な変形を

$$\frac{d}{dt}I_{i,j} = I_{i,j+1} \tag{2.7}$$

で与える. ここで, $I_{i,j}$ は式 (2.3) で定義したもの. これは双直交多項式と二次元戸田方程式の場合と同様の与え方である[2]. これに対して次が成り立つ.

定理 2.4. *Cauchy* 双直交多項式に対してモーメントの変形を式 (2.7) で与えると,

$$\frac{d}{dt}p_n(x) = \frac{d_n}{a_n}p_{n-1}(x) \tag{2.8}$$

が成り立つ. 但し, a_n, d_n は式 (2.6) の四項間漸化式の係数である.

証明. 双直交多項式の一般論から $p_n(x)$ は行列式表示

$$p_n(x) = \frac{\tau_{n,x}}{\tau_n}$$

[2] 今回は local な関係式を与える時間方向を選んでいる

を持つ. 但し,

$$\tau_n = \begin{vmatrix} I_{0,0} & \cdots & I_{0,n-1} \\ I_{1,0} & \cdots & I_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n-1,0} & \cdots & I_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad \tau_{n,x} = \begin{vmatrix} I_{0,0} & \cdots & I_{0,n-1} & 1 \\ I_{1,0} & \cdots & I_{1,n-1} & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_{n,0} & \cdots & I_{n,n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

従って,

$$h_n = \langle p_n(x), q_n(y) \rangle = \langle p_n(x), y^n \rangle = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}.$$

ここで, モーメントの変形 (2.7) から,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_n(x) &= \frac{d}{dt} \frac{\tau_{n,x}}{\tau_n} = \frac{\tau_n \cdot \partial_t(\tau_{n,x}) - \partial_t \tau_n \cdot \tau_{n,x}}{\tau_n^2} \\ &= -\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1,x}}{\tau_n^2} = -\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} p_{n-1}(x) \\ &= -\frac{h_n}{h_{n-1}} p_{n-1}(x). \end{aligned}$$

ここで, 途中の式変形において Plücker 関係式を用いた.

一方, 命題 2.3 の証明から,

$$h_{n-1} d_n = \langle p_{n+1}(x) + a_n p_n(x), -y q_{n-1}(y) \rangle = -a_n h_n$$

が成立する. 従って,

$$\frac{d}{dt} p_n(x) = \frac{d_n}{a_n} p_{n-1}(x)$$

が導かれる. □

これで, Cauchy 双直交多項式のスペクトル問題及びスペクトル保存変形

$$x(p_{n+1}(x) + a_n p_n(x)) = p_{n+2}(x) + b_n p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + d_n p_{n-1}(x) \tag{2.9a}$$

$$\frac{d}{dt} p_n(x) = \frac{d_n}{a_n} p_{n-1}(x) \tag{2.9b}$$

が得られた. これを Lax 対とみなすことで, 両立条件から非線形な方程式を得ることができる.

定理 2.5. 式 (2.9) の両立条件から次の非線形な方程式が導かれる:

$$\frac{d}{dt} a_n = \frac{d_n}{a_{n-1}} - \frac{d_{n+1}}{a_{n+1}}, \tag{2.10a}$$

$$\frac{d}{dt} b_n = \frac{d_n}{a_{n-1}} - \frac{d_{n+2}}{a_{n+2}}, \tag{2.10b}$$

$$\frac{d}{dt} c_n = \frac{b_{n-1} d_n}{a_{n-1}} - \frac{b_n d_{n+2}}{a_{n+1}}, \tag{2.10c}$$

$$\frac{d}{dt} d_n = d_n \left(\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{c_n}{a_n} \right), \tag{2.10d}$$

$$\text{(境界条件)} \quad a_{-1} = c_{-1} = d_{-1} = d_0 = 0. \tag{2.10e}$$

2.3 離散的なスペクトル保存変形

前節では, 連続的なスペクトル保存変形をモーメントの連続的な変形により与えた. そこで, 本節では離散的なモーメントの変形を導入する. 離散的なモーメント変形を前節と同様の議論から, ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて

$$I_{i,j}^{t+1} = I_{i+1,j}^{t} - \lambda I_{i,j}^{t} \tag{2.11}$$

で与える. ここで, モーメント $I_{i,j}^t$ は時刻 t における双線型二次形式 ($\langle \cdot, \cdot \rangle^t$ と書く) に対するモーメント $\left\langle x^i, y^j \right\rangle^t$ とし, 対応する Cauchy 双直交多項式は $p_n^t(x)$ と書くことにする. このとき, 次が成り立つ.

定理 2.6. *Cauchy* 双直交多項式系列 $p_n^t(x)$ 並びに $p_n^{t+1}(x)$ の間に関係式

$$(x-\lambda) p_n^{t+1}(x) = p_{n+1}^t(x) + A_n^t p_n^t(x) \tag{2.12}$$

が成り立つ. 但し,

$$A_n^t = -\frac{p_{n+1}^t(\lambda)}{p_n^t(\lambda)}. \tag{2.13}$$

証明. 離散的なモーメントの変形 (2.11) は双線型二次形式の間の変形

$$\langle \cdot, \cdot \rangle^{t+1} = \langle (x-\lambda) \cdot, \cdot \rangle^t$$

に読みかえることができる. 従って, 式 (2.12) で Cauchy 双直交多項式 $p_n^t(x)$ から新しい多項式列 $p_n^{t+1}(x)$ を決めてやれば,

$$\left\langle p_n^{t+1}, y^n \right\rangle^{t+1} = \left\langle p_{n+1}^t(x) + A_n^t p_n^t(x), y^n \right\rangle^t \neq 0 \quad (n = 0, \cdots, n-1).$$

従って, $p_n^{t+1}(x)$ もまた $\langle \cdot, \cdot \rangle^{t+1}$ に対する双直交多項式であり, 一意性から定理が成立する. □

式 (2.12) は Cauchy 双直交多項式から別の Cauchy 双直交多項式を作る変形とも思うことができ, これは直交多項式の理論における Christoffel 変換と呼ばれるものに相当する. 直交多項式の理論では Christoffel 変換の逆変換に相当するものとして Geronimus 変換と呼ばれるものが知られているが, Cauchy 双直交多項式の場合でも類似物が導かれる.

定理 2.7. *Cauchy* 双直交多項式系列 $p_n^t(x)$ 並びに $p_n^{t+1}(x)$ の間にさらに, 関係式

$$p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x) = p_{n+1}^{t+1}(x) + C_n^t p_n^{t+1}(x) + D_n^t p_{n-1}^{t+1}(x) \tag{2.14}$$

が成り立つ. ここで, B_n^t, C_n^t, D_n^t はある定数であり, 特に

$$B_n^t = -\frac{\int p_{n+1}^t(x) d\rho_1^t(x)}{\int p_n^t(x) d\rho_1^t(x)}. \tag{2.15}$$

証明. $n \geq 2$ の時のみ示す (それ以外は自明).

$$p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x) = p_{n+1}^{t+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} p_k^t(x)$$

を仮定する. このとき, 定理 2.3 および 2.6 の証明での議論から,

$$\begin{aligned} \left\langle p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x), q_k^{t+1}(y) \right\rangle^{t+1} &= \left\langle (x-\lambda)(p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x)), q_k^{t+1}(y) \right\rangle^t \\ &= \left\langle p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x), -(y+\lambda) q_k^{t+1}(y) \right\rangle^t \end{aligned}$$

が成立する. 従って, 双直交性から

$$\alpha_{n,k}h_k^t = \left\langle p_{n+1}^t(x) + B_n^t p_n^t(x), -(y+\lambda)q_k^{t+1}(y)\right\rangle^t = 0 \quad (k = 0, \cdots, n-2)$$

が成り立ち, 題意が示された. □

従って, 離散的なモーメント変形に附随して, Cauchy 双直交多項式の離散的なスペクトル変形およびその逆変換に相当する, 式 (2.12) および式 (2.14) が導かれた. これを離散 Lax 対とみなすことで, 両立条件から次の非線形な離散方程式が導かれる:

定理 2.8. 式 (2.12) および式 (2.14) の両立条件から, 次の非線形な離散方程式が導かれる:

$$A_{n+1}^t - B_{n+1}^t + C_{n+1}^t = A_{n+1}^{t+1} - B_n^{t+1} + C_n^{t+1} \tag{2.16a}$$

$$D_{n+1}^t + A_{n+1}^t C_n^t + B_{n+1}^t C_n^t = D_n^{t+1} + A_n^{t+1} C_n^{t+1} + B_n^{t+1} C_n^t \tag{2.16b}$$

$$A_{n+1}^t D_n^t + B_n^{t+1} D_n^t = A_{n-1}^{t+1} D_n^{t+1} + B_{n+1}^t D_n^t \tag{2.16c}$$

$$B_n^t (A_{n+1}^t - B_{n+1}^t) = B_n^{t+1}(A_n^t - B_n^t) \tag{2.16d}$$

$$(\text{境界条件}) \quad A_{-1}^t = B_{-1}^t = C_{-1}^t = D_0^t = D_{-1}^t = 0 \tag{2.16e}$$

3 結論

本報告では, Cauchy 双直交多項式に附随する連続ならびに離散的なスペクトル保存変形を構成し, 対応する非線形な方程式をそれぞれ導出した. 本報告では詳しく述べていないが, 得られた方程式は特徴的な行列式解を持つ. しかしながら, 双線型形式の構造等いまだ明らかにされていない部分が多い. そのため, 既存の可積分系との対応, 特に Cauchy 双直交多項式の出自から, Peakon 解を持つような可積分系のクラスとの対応関係を調べていく必要があると考えられる.

謝辞

本研究の一部は, (独) 日本学術振興会ならびに科研費 (22540224) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] M. Bertola, M. Gekhtman and J. Szmigielski, "Cauchy biorthogonal polynomials" *J. Approx. Theory.*, vol. 162, pp. 832-867, 2010.

[2] M. Bertola, M. Gekhtman and J. Szmigielski, "Cubic string boundary value problems and Cauchy biorthogonal polynomials" *J. Phys. A.*, vol. 42, pp. 454006-454018, 2009.

[3] V. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. Zhedanov, "Integrable discrete time chains for the Frobenius-Stickelberger-Thiele polynomials" *Comm. Math. Phys.* vol. 272, pp. 139-165, 2007.

[4] V. Spiridonov and A. Zhedanov, "Discrete Darboux transfomations, the discrete time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials" *Methods and Applications of Analysis* vol. 2, pp. 369-398, 1995.

[5] V. Spiridonov and A. Zhedanov, "Spectral transformation chains and some new birothogonal rational functions" *Comm. Math. Phys.*, vol. 210, pp. 49-83, 2000.