LR flowから導かれる離散ハングリー系のベックルント変換

福田, 亜希子
東京理科大学大学院理学研究科

濱, 洋輔
東京理科大学大学院理学研究科

山本, 有作
神戸大学大学院工学研究科

岩崎, 雅史
京都府立大学生命環境学部

他

https://doi.org/10.15017/23411

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (27), pp.182-187, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 27 (pp. 182 - 187)

LR flow から導かれる離散ハングリー系のベックルント変換

福田　亜希子（FUKUDA Akiko），濱　洋輔（HAMA Yousuke），山本　有作（YAMAMOTO Yusaku），岩崎　雅史（IWASAKI Masashi），石渡　恵美子（ISHIWATA Emiko），中村　佳正（NAKAMURA Yoshimasa）

（Received 13 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

LR flow から導かれる離散ハングリー系のベックルント変換

東京理科大学大学院理学研究科	福田 亜希子	(FUKUDA Akiko)
東京理科大学大学院理学研究科	濱 洋輔	(HAMA Yosuke)
神戸大学大学院工学研究科	山本 有作	(YAMAMOTO Yusaku)
京都府立大学生命環境学部	岩崎 雅史	(IWASAKI Masashi)
東京理科大学理学部	石渡 恵美子	(ISHIWATA Emiko)
京都大学大学院情報学研究科	中村 佳正	(NAKAMURA Yoshimasa)

概　要　本報告では，2 種類の離散ハングリーロトカ・ボルテラ系 (dhLV-I，dhLV-II) および離散ハングリー戸田方程式 (dhToda) の間の Bäcklund 変換を示す．まずは，差分間隔 $\delta^{(n)} \to \infty$ とした dhLV-I と，dhToda をそれぞれ行列の LR 変換と対応づけ，異なる 2 種の LR 変換に含まれる行列を相似変形によって結ぶ．続いて，相似変形において行列の成分レベルで成り立つ関係式から，dhLV-I と dhToda の間の Bäcklund 変換を導く．同様の議論により，$\delta^{(n)} \to \infty$ とした dhLV-II と dhToda の間の Bäcklund 変換も導出し，3 種の可積分な離散ハングリー系の関係を明らかにする．

1　はじめに

離散ロトカ・ボルテラ系 (dLV: discrete Lotka-Volterra):

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)}(1+\delta^{(n)}u_{k-1}^{(n+1)}) = u_k^{(n)}(1+\delta^{(n)}u_{k+1}^{(n)}), \quad k=1,2,\ldots,2m-1, \\ u_0^{(n)} := 0, \quad u_{2m}^{(n)} := 0, \quad n=0,1,\ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

と離散戸田方程式 (dToda):

$$\begin{cases} q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)} + e_k^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m, \\ e_k^{(n+1)} = e_k^{(n)} \dfrac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+1)}}, \quad k=1,2,\ldots,m-1, \\ e_0^{(n)} \equiv 0, \quad e_m^{(n)} \equiv 0, \quad n=0,1,\ldots \end{cases} \tag{1.2}$$

に対して，両者の変数の間に次の関係が成り立つ．

$$\begin{cases} q_k^{(n)} = \dfrac{1}{\delta^{(n)}}\left(1+\delta^{(n)}u_{2k-2}^{(n)}\right)\left(1+\delta^{(n)}u_{2k-1}^{(n)}\right), \quad k=1,2,\ldots,m, \\ e_k^{(n)} = \delta^{(n)}u_{2k-1}^{(n)}u_{2k}^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m-1, \quad n=0,1,\ldots. \end{cases} \tag{1.3}$$

(1.3) は dLV (1.1) と dToda (1.2) を結ぶ Bäcklund 変換の 1 つであり，Miura 変換として知られている．ここで，dLV (1.1) は個々の生物種に対する捕食種と被食種を 1 種ずつと想定した数理生物モデルの時間離散版であり，$u_k^{(n)}$ は離散時間 n における生物番号 k の個体数を，$\delta^{(n)}$ は離散時間 n における差分間隔を表す．個々の生物種の捕食範囲を拡大させた数理生物モデルの離散版として，次に示す 2 種類の離散ハングリーロトカ・ボルテラ系 (dhLV: discrete hungry Lotka-Volterra) が

ある [2, 4].

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)} \prod_{j=1}^{M} (1 + \delta^{(n+1)} u_{k-j}^{(n+1)}) = u_k^{(n)} \prod_{j=1}^{M} (1 + \delta^{(n)} u_{k+j}^{(n)}),\ k = 1, 2, \ldots, M_m, \\ u_{-M+1}^{(n)} \equiv 0, \quad u_{-M+2}^{(n)} \equiv 0, \ldots, u_0^{(n)} \equiv 0, \quad u_{M_m+1}^{(n)} \equiv 0, \ldots, u_{M_m+M}^{(n)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} v_k^{(n+1)} (1 + \delta^{(n+1)} \prod_{j=1}^{M} v_{k-j}^{(n+1)}) = v_k^{(n)} (1 + \delta^{(n)} \prod_{j=1}^{M} v_{k+j}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, M_m + M - 1, \\ v_{1-M}^{(n)} \equiv 0, \ldots, v_0^{(n)} \equiv 0, \quad v_{M_m+M}^{(n)} \equiv 0, \ldots, v_{M_m+M+(M-1)}^{(n)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{1.5}$$

ただし，$M_m := (m-1)M + m$ であり，$u_k^{(n)}$, $v_k^{(n)}$, $\delta^{(n)}$ の意味は dLV と同様である．以降，区別のために (1.4)，(1.5) をそれぞれ dhLV-I，dhLV-II と呼ぶことにする．$M = 1$ の場合，dhLV-I (1.4)，dhLV-II (1.5) はともに dLV (1.1) と一致する．

一方，dToda の拡張版として，次の離散ハングリー戸田方程式 (dhToda: diacrete hungry Toda) が知られている [3].

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = Q_k^{(n)} + E_k^{(n)} - E_{k-1}^{(n+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ E_k^{(n+1)} = \dfrac{Q_{k+1}^{(n)} E_k^{(n)}}{Q_k^{(n+M)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ E_0^{(n)} = E_m^{(n)} = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

本報告では，dhLV-I (1.4)，dhLV-II (1.5)，dhToda (1.6) をそれぞれ行列の LR 変換と対応づけることにから始め，異なる LR 変換を結ぶ相似変形を導くことで 3 種の可積分な離散ハングリー系の間の Bäcklund 変換を導出する．ここで，LR 変換とは LR アルゴリズムの 1 ステップで行われる行列演算のことである．LR アルゴリズムは，行列を下三角行列 L_k と上三角行列 R_k に LU 分解する，それらの逆順の積 $R_k L_k$ を求めるという 2 種類の行列演算を繰り返す固有値計算アルゴリズムである．

2 dhToda と dhLV-I の間の Bäcklund 変換

本節では，dhToda (1.6) と dhLV-I (1.4) のそれぞれの Lax 表示を考察し，対応づく行列の LR 変換を通じて，dhToda (1.6) と dhLV-I (1.4) の間の Bäcklund 変換を導く [1].

[3] において dhToda (1.6) は Lax 表示

$$L^{(n+M)} R^{(n+1)} = R^{(n)} L^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

$$L^{(n)} := \begin{pmatrix} Q_1^{(n)} & & & \\ 1 & Q_2^{(n)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & Q_m^{(n)} \end{pmatrix}, \quad R^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & E_1^{(n)} & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & E_{m-1}^{(n)} \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

を満たすことが示されている．ここで，dhToda (1.6) の Lax 行列 $L^{(n)}, R^{(n)}$ によって行列 $A^{(n)}$ を次のように定める．

$$A^{(n)} := L^{(n)} L^{(n+1)} \cdots L^{(n+M-1)} R^{(n)}. \tag{2.3}$$

このとき，$R^{(n)}$ による $A^{(n)}$ の相似変形は，(2.1) より，

$$
\begin{aligned}
R^{(n)}A^{(n)}(R^{(n)})^{-1} &= R^{(n)}L^{(n)}L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-2)}L^{(n+M-1)} \qquad (2.4)\\
&= L^{(n+M)}R^{(n+1)}L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-2)}L^{(n+M-1)}\\
&\quad\vdots\\
&= L^{(n+M)}L^{(n+M+1)}L^{(n+M+2)}\cdots L^{(n+2M-1)}R^{(n+M)}\\
&= A^{(n+M)} \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，dhToda (1.6) の時間発展 $n \to n+M$ によって行列の LR 変換が M 回行われ，$A^{(n)}$ から $A^{(n+M)}$ への相似変形が得られる．

dhLV-I (1.4) に対する従属変数変換 $U_k^{(n)} = u_k^{(n)}\prod_{j=1}^{M}(1+\delta^{(n)}u_{k-j}^{(n)})$ $(k=1,2,\ldots,M_m)$, $V_k^{(n)} = \prod_{j=0}^{M}(1+\delta^{(n)}u_{k-j}^{(n)})$ $(k=1,2,\ldots,M_m+M)$ を施すと，

$$
\begin{cases}
V_{k+M+1}^{(n)}U_k^{(n+1)} = V_{k+M}^{(n)}U_{k+M+1}^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,M_m-1,\\
V_k^{(n)}U_k^{(n+1)} = V_{k+M}^{(n)}U_k^{(n)}, \qquad k=1,2,\ldots,M_m+M, \quad n=0,1,\ldots,\\
U_{1-M}^{(n)} \equiv 0,\ldots,U_0^{(n)} \equiv 0, \quad U_{M_m+1}^{(n)} \equiv 0,\ldots,U_{M_m+M}^{(n)} \equiv 0,\\
V_{1-M}^{(n)} \equiv \dfrac{1}{\delta^{(n)}},\ldots,V_0^{(n)} \equiv \dfrac{1}{\delta^{(n)}}, \quad V_{M_m+M+1}^{(n)} \equiv \dfrac{1}{\delta^{(n)}},\ldots,V_{M_m+2M}^{(n)} \equiv \dfrac{1}{\delta^{(n)}}.
\end{cases}
\qquad (2.6)
$$

となる．(2.6) の Lax 表示に関して次の定理が得られる．

定理 2.1 $\delta^{(n)} \to \infty$ のとき，(2.6) の Lax 表示は，

$$
\mathcal{L}^{(n+1)}\mathcal{R}^{(n+M)} = \mathcal{R}^{(n)}\mathcal{L}^{(n)}, \quad n=0,1,\ldots, \qquad (2.7)
$$

$$
\mathcal{L}^{(n)} := \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1^{(n)} & & & \\ 1 & \mathcal{Q}_2^{(n)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \mathcal{Q}_m^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{E}_1^{(n)} & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \mathcal{E}_{m-1}^{(n)} \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.8)
$$

となる．ただし，$n=0,1,\ldots$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}_k^{(nM)} = U_{M_k}^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m,\\
&\mathcal{Q}_k^{(nM+p)} = V_{M_k+p}^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m, \quad p=1,2,\ldots,M,\\
&\mathcal{E}_k^{(nM+p-1)} = U_{M_k+p}^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m-1, \quad p=1,2,\ldots,M.
\end{aligned}
$$

(2.6) の Lax 行列 $\mathcal{L}^{(n)}$, $\mathcal{R}^{(n)}$ によって

$$
\mathcal{A}^{(n)} := \mathcal{L}^{(n)}\mathcal{R}^{(n+M-1)}\mathcal{R}^{(n+M-2)}\cdots\mathcal{R}^{(n)} \qquad (2.9)
$$

と定めれば，

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^{(n)})^{-1}\mathcal{A}^{(n)}\mathcal{L}^{(n)} &= \mathcal{R}^{(n+M-1)}\mathcal{R}^{(n+M-2)}\cdots\mathcal{R}^{(n+1)}\mathcal{R}^{(n)}\mathcal{L}^{(n)}\\
&= \mathcal{R}^{(n+M-1)}\mathcal{R}^{(n+M-2)}\cdots\mathcal{R}^{(n+1)}\mathcal{L}^{(n+1)}\mathcal{R}^{(n+M)}\\
&\quad\vdots\\
&= \mathcal{L}^{(n+M)}\mathcal{R}^{(n+2M-1)}\mathcal{R}^{(n+2M-2)}\cdots\mathcal{R}^{(n+M)}\\
&= \mathcal{A}^{(n+M)} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

となる．dhToda (1.6) 同様，(2.6) の時間発展による M 回の LR 変換は，$\mathcal{A}^{(n)}$ から $\mathcal{A}^{(n+M)}$ の相似変形を与えることが分かる．

ここで，Lax 行列 (2.2) と Lax 行列 (2.8) について次の補題が得られる．

補題 2.2 Lax 行列 (2.2) と (2.8) について，

$$\mathcal{L}^{(n)} := (D^{(0)})^{-1}(R^{(n)})^{\top} D^{(M)}, \tag{2.11}$$
$$\mathcal{R}^{(n+p)} := (D^{(p+1)})^{-1}(L^{(n+p)})^{\top} D^{(p)}, \quad p = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{2.12}$$

となる対角行列 $D^{(p)} = \mathrm{diag}(d_1^{(p)}, d_2^{(p)}, \ldots, d_m^{(p)})$，$d_i^{(p)} > 0$ が存在する．$D^{(p)}$ の各成分は具体的に

$$d_j^{(0)} = \prod_{i=1}^{j-1} E_i^{(n)} Q_i^{(n)} Q_i^{(n+1)} \cdots Q_i^{(n+M-1)},$$
$$d_j^{(p)} = \left(\prod_{i=1}^{j-1} E_i^{(n)} Q_i^{(n)} Q_i^{(n+1)} \cdots Q_i^{(n+M-1)}\right)(Q_j^{(n)} Q_j^{(n+1)} \cdots Q_j^{(n+p-1)}) \tag{2.13}$$

と定められる．

(2.11)，(2.12) を (2.9) に代入すると，

$$\mathcal{A}^{(n)} = (D^{(0)})^{-1}(A^{(n)})^{\top} D^{(0)}$$

となる．よって，成分が dhToda 変数からなる行列 $A^{(n)}$ と (2.6) の変数からなる行列 $\mathcal{A}^{(n)}$ は相似であることがわかる．(2.11) および (2.12) において両辺の行列成分を比較すると，

$$\mathcal{Q}_k^{(n)} = Q_k^{(n)} Q_k^{(n+1)} \cdots Q_k^{(n+M-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.14}$$
$$\mathcal{E}_k^{(n+p)} = E_k^{(n)}(Q_k^{(n+p+1)} Q_k^{(n+p+2)} \cdots Q_k^{(n+M-1)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad p = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{2.15}$$

が得られる．離散時間が増加したときの Lax 行列 (2.2) と (2.8) の関係については次の補題に示す．

補題 2.3 離散時間 n において，$\mathcal{Q}_j^{(n)}, \mathcal{E}_j^{(n+p)}$ がそれぞれ (2.14), (2.15) を満たすとき，$p = 0, 1, \ldots, M-1$ に対し，

$$\mathcal{L}^{(n+p+1)} = (D^{(p+1)})^{-1}(R^{(n+p+1)})^{\top} D^{(M)} L_d^{(0;p)}, \tag{2.16}$$
$$\mathcal{R}^{(n+M+p)} = (D^{(M)} L_d^{(0;p)})^{-1}(L^{(n+M+p)})^{\top} D^{(M)} L_d^{(0;p-1)} \tag{2.17}$$

が成り立つ．ただし，$L_d^{(0;p)} := \prod_{i=0}^{p} \mathrm{diag}(Q_1^{(n+M+i)}, Q_2^{(n+M+i)}, \ldots, Q_m^{(n+M+i)})$ であり，$L_d^{(0;-1)}$ は m 次単位行列とする．

(2.16)，(2.17) において $p+1=0$ とすると，それぞれ (2.11), (2.12) となることに注意する．したがって，dhToda (1.6) と dhLV-I (1.4) に関する本節の主定理が得られる．

定理 2.4 dhToda (1.6) と $\delta^{(n)} \to \infty$ とした dhLV-I (1.4) の間の Bäcklund 変換は，

$$\mathcal{Q}_k^{(n)} = Q_k^{(n)} Q_k^{(n+1)} \cdots Q_k^{(n+M-1)},$$
$$\mathcal{E}_k^{(n)} = E_k^{(n)}(Q_k^{(n+1)} Q_k^{(n+2)} \cdots Q_k^{(n+M-1)}).$$

ただし，$\ell = 0, 1, \ldots$ に対し

$$\mathcal{Q}_k^{(n+M\ell)} = U_{M_k}^{(n+\ell)} = u_{M_k}^{(n+\ell)} \prod_{i=1}^{M} (1 + \delta^{(n+\ell)} u_{M_k - i}^{(n+\ell)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\mathcal{E}_k^{(n+M\ell+p-1)} = U_{M_k+p}^{(n+\ell)} = u_{M_k+p}^{(n+\ell)} \prod_{i=1}^{M} (1 + \delta^{(n+\ell)} u_{M_k+p-i}^{(n+\ell)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad p = 1, 2, \ldots, M.$$

3 dhToda と dhLV-II の間の Bäcklund 変換

本節ではまず，dhLV-II (1.5) に対応づく LR 変換を明らかにする．2 節と同様に，dhToda (1.6) と dhLV-II (1.5) に対応づく異なる LR 変換を相似変形によって結びつけ，dhToda (1.6) と dhLV-II (1.5) の間の Bäcklund 変換を導く．さらに，2 節で示した dhToda (1.6) と dhLV-I (1.4) の間の Bäcklund 変換と組み合わせ，dhLV-I (1.4) と dhLV-II (1.5) の間の Bäcklund 変換を導出する．

dhLV-II (1.5) に対する従属変数変換 $\omega_k^{(n)} = v_k^{(n)} (1 + \delta^{(n)} \prod_{j=1}^{M} v_{k-j}^{(n)})$ $(k = 1, 2, \ldots, M_m + M - 1)$ および $\gamma_k^{(n)} = \delta^{(n)} \prod_{j=0}^{M} v_{k+j}$ $(k = 1, 2, \ldots, M_m - 1)$ によって，

$$\begin{cases} \omega_k^{(n+1)} + \gamma_{k-M}^{(n)} = \omega_k^{(n)} + \gamma_k^{(n)}, & k = 1, 2, \ldots, M_m + M - 1, \\ \omega_k^{(n+1)} \gamma_{k+1}^{(n)} = \omega_{k+M+1}^{(n)} \gamma_k^{(n)}, & k = 1, 2, \ldots, M_m - 2. \end{cases} \tag{3.1}$$

が得られる．このとき，(3.1) に関して次の定理が得られる．

定理 3.1 $\delta^{(n)} \to \infty$ のとき，(3.1) の Lax 表示は次で与えられる．

$$\bar{\mathcal{L}}_{i+1}^{(n+1)} \bar{\mathcal{R}}_{i+1}^{(n)} = \bar{\mathcal{R}}_i^{(n)} \bar{\mathcal{L}}_{i+1}^{(n)}, \quad i = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{3.2}$$

$$\bar{\mathcal{L}}_i^{(n)} = \begin{pmatrix} \omega_{M_1+(i-1)}^{(n)} & & & \\ 1 & \omega_{M_2+(i-1)}^{(n)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \omega_{M_m+(i-1)}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{R}}_i^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{M_1+i}^{(n)} & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{M_{m-1}+i}^{(n)} \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

ここで，Lax 行列 (3.3) によって行列 $\bar{\mathcal{A}}^{(n)}$ を次のように定める．

$$\bar{\mathcal{A}}^{(n)} := \bar{\mathcal{L}}_1^{(n)} \bar{\mathcal{L}}_2^{(n)} \cdots \bar{\mathcal{L}}_M^{(n)} \bar{\mathcal{R}}_0^{(n)}. \tag{3.4}$$

このとき，(3.2) を用いれば，

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_0^{(n)} \bar{\mathcal{A}}^{(n)} (\bar{\mathcal{R}}_0^{(n)})^{-1} &= \bar{\mathcal{R}}_0^{(n)} \bar{\mathcal{L}}_1^{(n)} \bar{\mathcal{L}}_2^{(n)} \cdots \bar{\mathcal{L}}_M^{(n)} && (3.5) \\ &= \bar{\mathcal{L}}_1^{(n+1)} \bar{\mathcal{R}}_1^{(n)} \bar{\mathcal{L}}_2^{(n)} \cdots \bar{\mathcal{L}}_M^{(n)} \\ &\;\;\vdots \\ &= \bar{\mathcal{L}}_1^{(n+1)} \bar{\mathcal{L}}_2^{(n+1)} \cdots \bar{\mathcal{L}}_M^{(n+1)} \bar{\mathcal{R}}_M^{(n)} && (3.6) \end{aligned}$$

となる．(3.6) の右辺に含まれる $\bar{\mathcal{R}}_M^{(n)}$ について次の補題が得られる．

補題 3.2 $\delta^{(n)} \to \infty$ のとき，$\bar{\mathcal{R}}_M^{(n)} = \bar{\mathcal{R}}_0^{(n+1)}$.

補題 3.2 より，$\delta^{(n)} \to \infty$ のとき $\bar{\mathcal{R}}_0^{(n)}\bar{\mathcal{A}}^{(n)}(\bar{\mathcal{R}}_0^{(n)})^{-1} = \bar{\mathcal{L}}_1^{(n+1)}\bar{\mathcal{L}}_2^{(n+1)}\cdots\bar{\mathcal{L}}_M^{(n+1)}\bar{\mathcal{R}}_0^{(n+1)} = \bar{\mathcal{A}}^{(n+1)}$ となる．すなわち，(3.1) による M 回の LR 変換は，$\bar{\mathcal{A}}^{(n)}$ から $\bar{\mathcal{A}}^{(n+1)}$ の相似変形を与える．Lax 行列 (2.2) と Lax 行列 (3.3) については次の補題が得られる．

補題 3.3 離散時間 n において，$L^{(n+i)} = \bar{\mathcal{L}}_{i+1}^{(n)}$ $(i = 0, 1, \ldots, M-1)$，$R^{(n)} = \bar{\mathcal{R}}_0^{(n)}$ とする．このとき，

$$L^{(n+M+i)} = \bar{\mathcal{L}}_{i+1}^{(n+1)}, \quad R^{(n+i+1)} = \bar{\mathcal{R}}_{i+1}^{(n)}, \quad i = 0, 1, \ldots, M-1.$$

補題 3.3 で得られた行列の関係式を成分レベルで書き下すと，次の定理のように dhToda 変数と dhLV-II 変数を対応づけることができる．

定理 3.4 $\delta^{(n)} \to \infty$ のとき，dhToda (1.6) と dhLV-II (1.5) の間の Bäcklund 変換は，

$$\begin{aligned} E_k^{(n)} &= \gamma_{M_k}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ Q_k^{(n+i)} &= \omega_{M_k+i}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 0, 1, \ldots, M-1. \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\gamma_{M_k}^{(n)} = \delta^{(n)} \prod_{\ell=0}^{M} v_{M_k+\ell}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\omega_{M_k+i}^{(n)} = v_{M_k+i}^{(n)}(1 + \delta^{(n)} \prod_{\ell=1}^{M} v_{M_k+i-\ell}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 0, 1, \ldots, M-1.$$

また，定理 2.4 と定理 3.4 を組み合わせると，dhLV-I と dhLV-II に関して次の定理が得られる．

定理 3.5 $\delta^{(n)} \to \infty$ のとき，dhLV-I (1.4) と dhLV-II (1.5) の間の Bäcklund 変換は，

$$U_{M_k+j}^{(n)} = \prod_{i=0}^{M-1} \omega_{M_k+j+i}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

となる．ただし，

$$U_{M_k+j}^{(n)} = u_{M_k+j}^{(n)} \prod_{\ell=1}^{M} (1 + \delta^{(n)} u_{M_k+j-\ell}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$\omega_{M_k+j}^{(n)} = v_{M_k+j}^{(n)}(1 + \delta^{(n)} \prod_{\ell=1}^{M} v_{M_k+j-\ell}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, M.$$

参考文献

[1] A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, Y. Nakamura: "A Bäcklund transformation between two integrable discrete hungry systems", Physics Letters A **375** (2011), 303–308.

[2] Y. B. Suris: "Integrable discretization of the Bogoyavlensky lattices", J. Math. Phys. **37** (1996), 3982–3996.

[3] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma: "Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization", Inverse Problems **15** (1999), 1639–1662.

[4] 辻本 諭, 広田 良吾, 大石 進一: "Volterra 方程式の拡張とその差分化 I", 電子情報通信学会技術研究報告 **92**–90 (1993), 1–3.