

楕円回転流の弱非線形安定性のためのオイラー・ラ グランジュ混合法

福本, 康秀
九州大学大学院数理学研究院

<https://doi.org/10.15017/23403>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (19), pp.131-142, 2011-03. Research Institute
for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 19 (pp. 131 - 142)

楕円回転流の弱非線形安定性のための オイラー・ラグランジュ混合法

福本 康秀 (FUKUMOTO Yasuhide)

(Received 21 December 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

楕円回転流の弱非線形安定性のためのオイラー・ラグランジュ混合法

九州大学大学院数理学研究院 福本康秀 (FUKUMOTO Yasuhide)

概要 定常剛体回転流は軸対称性と並進対称性のおかげで中立安定であるが、対称性を破る摂動を加えると不安定化する。楕円形にひずんだ流線をもつ回転流の線形不安定性は縮退する 2 個の 3 次元 Kelvin 波のパラメータ共鳴として普遍的にとらえることができる。これらは、ハミルトニアン Hopf (あるいはピッチフォーク) 分岐を起こして新たな状態に移行するが、非線形段階を記述する数学的道具が欠如している；通常のオイラー的記述の枠組みでは波の非線形相互作用によって誘起される平均流ですら正しく計算できていない。最近、われわれは、ラグランジュ的記述によって平均流の計算を系統的に進める糸口を見つけた。従来のオイラー的扱いの不備を指摘し、弱非線形振幅方程式の係数をすべて決定する方法を紹介する。

1 はじめに

ひずみ流中におかれた渦管は Moore-Saffman-Tsai-Widnall (MSTW) 不安定とよばれる 3 次元不安定を起こすことがよく知られている [18, 21, 3, 5]。MSTW 不安定は左巻きらせん波と右巻きらせん波間のパラメータ共鳴で、単純ずり流によって駆動される。円柱状の渦管の上に立つ波は Kelvin 波あるいは慣性波とよばれる。一般に、渦核断面が楕円形をした渦管は、方位波数 m の差が 2 である 2 個の Kelvin 波が同時に励起されたとき、パラメータ共鳴を起こす。Fukumoto [5] は、ハミルトン力学系のスペクトル理論にもとづいて、方位波数 m と $m+2$ をもつ Kelvin 波の分散曲線のすべての交点で不安定性を生じることを示した。筒状容器内に閉じ込められた系において、 $(m, m+2) = (-1, 1)$ 共鳴に加えて、 $(m, m+2) = (1, 3)$ および $(0, 2)$ 共鳴も観察された [4, 14]。Malkus [15] は、変形しやすい材質からなる円筒状容器の内部を水で満たし、それを 2 つのローラーによってはさみつけることによって、断面が楕円形に変形した容器内の回転流を実現した (文献 [4] も参照)。この実験によると、まず MSTW 不安定モードが成長し、引き続いて、多数のモードが励起され、やがて崩壊に至る。この崩壊にいたるルートを実験的に記述するために、線形不安定モードの非線形段階での成長を知る必要がある。

攪乱振幅の指数関数的成長がある一定のレベルまで進むと、非線形効果が効き始め、MSTW 不安定を修正する。Waleffe [23] と Sipp [20] は、弱非線形効果が Kelvin 波の振幅が飽和するように働くことを示した。Mason & Kerswell [16] は MSTW 不安定が 2 次不安定性を起こすことを指摘した。本稿では、Kelvin 波の非線形相互作用によって誘起される平均流を完全に決定できていない、という意味でこれらの扱いが不完全であることを示す。Rodrigues & Luca [19] は平均流がない状況を扱い、振幅方程式系の解がカオス的に振る舞うことを示した。

波の相互作用を扱うにはラグランジュ的変位にまで立ち返らなければならない [2, 11, 12]。ラグランジュ的アプローチを利用すれば、振幅について 2 次で誘起される平均流を、振幅について 1 次のラグランジュ的変位場のみであらわすことが可能になる。ラグランジュ的アプローチを 3 次元までに拡張することによって、Fukumoto & Hirota [7] は、渦管上の Kelvin 波の自己相互作用によって誘起される流れの直流成分 (= 平均流) をはじめて導いた。この直流成分は 3 次元波に固有のもので、多数の Kelvin 波あるいは慣性波が励起されたとき、それらがもたらす質量輸送の増大を解析する道をつけた。

背後にあるハミルトン力学系の構造は、波の作用 (action) という概念を核として、波のエネルギーと波によつ誘導される平均流を記述する統一的枠組みを提供する。

本研究の目的は、従来のオイラー的扱いの不備を修復して、MSTW 不安定の弱非線形発展を記述する振幅方程式を導くことである。ここでは、左・右巻きらせん波同士の定常共鳴に記述を限定しよう。第2,3節で、定常基本場のうえに立った波のエネルギーと波が誘起する平均流を計算するためのラグランジュ的方法を展開する。第4節で Kelvin 波を復習し、§5 で、Kelvin 波の非線形相互作用によつて誘導される平均流を計算する。第6,7節で MSTW 不安定を紹介した後、§8 で弱非線形理論を展開する。簡単なまとめを §9 で行う。

2 ラグランジュ的アプローチ

波のエネルギーの符号はハミルトンの分岐理論の肝となる量である。基本流がある場合には、オイラー的変数を用いる伝統的な流体力学の枠組みでは波のエネルギーの計算はおぼつかない。一つの抜け道として、分散関係の周波数に関する微分を用いる方法 [5] があるが、基本流が3次元渦流の場合には、未だ根拠づけができていない。「オイラー流の定常状態は、等循環 (isovortical) 攪乱に関して運動エネルギーの臨界状態である」と特徴づけられる [2]。波のエネルギーとは波が立つことによる定常状態からの運動エネルギーの増分のことであるが、この臨界性を利用することによつて、波のエネルギーの計算が容易になる。等循環 (isovortical) 攪乱とは、攪乱渦度が流れに凍結して運ばれるもので、ラグランジュ変数によつてはじめて忠実に表現できる。一般の2次元シア流については、波のエネルギーの表現、および、それと分散関係の微分との関係の導出を以前行った [11, 12]。振幅について2次の攪乱速度の表式は直流成分の存在を顕している [7]。本節では、ラグランジュ変位の動力学を導く幾何学的方法の概略を示す [10]。

波-平均流相互作用に関する最近の弱非線形解析によると、伝統的なオイラー的記述の枠組みよりも、流体のトポロジ的性質を組み込むことができるラグランジュ的記述の方がはるかにすぐれている [2, 13]。以下に紹介するわれわれの方法 [11, 12, 7] も同じ路線にあるが、汎用性・拡張性において進んでいる。

非粘性・非圧縮性流体の運動は、領域 $\mathcal{D}(\subset \mathbb{R}^3)$ のそれ自身への体積保存微分同相写像群 $SDiff(\mathcal{D})$ 上の軌道としてあらわすことができる。この Lie 環 \mathfrak{g} は流体の速度場である。Lie 環 \mathfrak{g} の双対空間を \mathfrak{g}^* とし、元 $u \in \mathfrak{g}$ と $v \in \mathfrak{g}^*$ の間の自然な対を $\langle u, v \rangle$ とかこう。流体運動においては、1次微分形式 \mathfrak{g}^* の元はベクトル場と同一視でき、 \langle, \rangle はベクトル場間の L_2 内積とみなせる。Lie 環 \mathfrak{g} の Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]$ は \mathfrak{g} の随伴表現で、ベクトル場に対して、

$$ad(u_1)u_2 = [u_1, u_2] = (u_2 \cdot \nabla)u_1 - (u_1 \cdot \nabla)u_2 \quad (u_1, u_2 \in \mathfrak{g}) \quad (2.1)$$

のように作用する。ここでは、ベクトル場であることを明確にするためにポールド体を用いている。

双対空間 \mathfrak{g}^* 上の2つの関数 F_1, F_2 に対して、Lie-Poisson 括弧

$$\{F_1, F_2\} = \left\langle \left[\frac{\delta F_1}{\delta v}, \frac{\delta F_2}{\delta v} \right], v \right\rangle \quad (2.2)$$

を導入しよう。非粘性・非圧縮流体に対するオイラー方程式は Poisson 方程式 $\partial F / \partial t = \{F, H\}$ の形にあらわせる。随伴表現 ad の双対演算子 ad^* を $\langle u, ad(\xi)^*v \rangle = \langle ad(\xi)u, v \rangle$, ($\xi \in \mathfrak{g}$) によつて導入すると、Poisson 方程式から、双対空間の元 $v \in \mathfrak{g}^*$ の発展方程式が導ける [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -ad^* \left(\frac{\delta H}{\delta v} \right) v. \quad (2.3)$$

この式において, $\delta H/\delta v$ を任意のベクトル場 $u(t) \in \mathfrak{g}$ で置き換えたものをオイラー・ポアンカレ方程式という [13]. オイラー方程式に対しては, ad^* の作用は

$$[\text{ad}^*(\xi)v]_i = [-\xi \times (\nabla \times v) + \nabla f]_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

と表現される. ここで, f は \mathcal{D} 上の関数で, ξ は \mathcal{D} 上のベクトル場である. 関数 f を調整することによって, $v \in \mathfrak{g}^*$ を \mathcal{D} の境界 $\partial\mathcal{D}$ で $\partial\mathcal{D}$ に接する \mathcal{D} 上のソレノイダルなベクトル場と同一視することができる. 方程式 (2.3) の解は余随伴軌道 $v(t) = \text{Ad}^*(\varphi_t^{-1})v(0)$ である. ここで, φ_t は $\delta H/\delta v$ によって生成される $\text{SDiff}(\mathcal{D})$ の 1 助変数部分群である. 余随伴軌道の集合 $\{\text{Ad}^*(\varphi)v(0) \in \mathfrak{g}^* | \varphi \in \text{SDiff}(\mathcal{D})\}$ はまた等循環面 (isovortical sheet) とよばれる. 写像 φ_t を生成する速度場は

$$u(t_0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0} (\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}) = \frac{\delta H}{\delta v} \quad (2.5)$$

とかける.

基本流がなす $\text{SDiff}(\mathcal{D})$ 上の軌道を φ_t , 対応する \mathfrak{g}^* 上の軌道を $v(t)$ とする. 初期時刻 ($t = 0$) に写像 $\varphi_{\alpha,0} \in \text{SDiff}(\mathcal{D})$ による攪乱を受けて, $v(0)$ が $v_\alpha(0) = \text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,0}^{-1})v(0)$ に変位したとしよう. ここで, $\alpha \in \mathbb{R}$ は攪乱場の振幅の尺度をあらわす微小パラメータである. この形に限ると, 攪乱を受けた初期場 $v_\alpha(0)$ も, したがって, 引き続く軌道 $v_\alpha(t)$ も同じ等循環面内に保たれる. よって, 各時刻 t において, 微分同相写像 $\varphi_{\alpha,t} \in \text{SDiff}(\mathcal{D})$ が存在して, $v(t)$ と攪乱を受けた場 $v_\alpha(t)$ が

$$v_\alpha(t) = \text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,t}^{-1})v(t) = \text{Ad}^*\left((\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t)^{-1}\right)v(0) \quad (2.6)$$

によって結びつけられる. 小さな α に対しては, $\varphi_{\alpha,t}$ は恒等写像に近い. この場合, 生成子 $\xi_\alpha(t) \in \mathfrak{g}$ が必ず存在して, $\varphi_{\alpha,t} = \exp \xi_\alpha(t)$ とかける. これを α の冪級数の形で $O(\alpha^2)$ まで展開しよう: $\xi_\alpha = \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2/2 + \dots$.

定義から直ちにしがう式 $\text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,t}^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} [-\text{ad}^*(\xi_\alpha)]^n/n!$ を用いると, (2.6) は $v_\alpha = v + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2/2 + \dots$;

$$v_1 = -\text{ad}^*(\xi_1)v, \quad v_2 = -\text{ad}^*(\xi_2)v + \text{ad}^*(\xi_1)\text{ad}^*(\xi_1)v \quad (2.7)$$

のように展開できる. ベクトル表記では, これらは

$$v_1 = \mathcal{P}[\xi_1 \times \omega], \quad v_2 = \mathcal{P}[\xi_1 \times (\nabla \times (\xi_1 \times \omega)) + \xi_2 \times \omega] \quad (2.8)$$

と翻訳できる. ここで, $v = v \in \mathfrak{g}^*$ というベクトル場との同一視のもと, $\omega = \nabla \times v$ は v の渦度をあらわし, \mathcal{P} はソレノイダルベクトル場に正射影する演算子である. 同様に, 攪乱を受けた軌道 $\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t$ を生成する速度場は

$$\begin{aligned} u_\alpha(t_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0} (\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,t_0}^{-1}) \\ &= u(t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} [\text{ad}^*(\xi_\alpha)]^n \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} - \text{ad}(v)\xi_\alpha \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

と展開できる. 最初の 2 次までの項 $u_\alpha = u + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2/2 + \dots$ を具体的にかくと,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_1, \\ u_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_2 + \text{ad}(\xi_1) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_1 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

である .

流体の質量密度が 1 であるとき , ハミルトニアンが $H = \int_{\mathcal{D}} v_\alpha^2 / 2 dV$ であることから , H によって生成される Lie 環 $u_\alpha(t) \in \mathfrak{g}$ は ,

$$u_\alpha(t) = \left. \frac{\delta H}{\delta v} \right|_\alpha (t) = v_\alpha(t) \quad (2.11)$$

という関係を通して双対元 $v_\alpha(t)$ と同一視できる .

この同一視によって , (2.8) と (2.10) が組み合わされて ,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \xi_1 - (\xi_1 \cdot \nabla) \mathbf{U} = \mathbf{v}_1, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \xi_2 - (\xi_2 \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \xi_1 - (\xi_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (2.13)$$

となる . 右辺の \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は (2.8) によって与えられる . 記号 $\mathbf{U} = \mathbf{v}$ は基本流の速度場をあらわし , (2.8) において , $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$ である . 1 次変位の発展方程式 (2.12) はよく知られているが , 2 次変位の発展方程式 (2.13) は恐らくわれわれの論文 [7] の中ではじめて導かれた .

3 攪乱場のエネルギーと直流成分

等循環攪乱 (isovortical disturbances) への制約は , 攪乱を加えたことによって増加したエネルギーの計算を容易にする . 運動エネルギーを , 振幅 α についての冪級数の形で 2 次まで展開する : $H(v_\alpha) = H(v) + \alpha H_1 + \alpha^2 H_2 / 2 + \dots$. 基本場が定常流である場合 ($\partial v / \partial t = 0$), エネルギーの増分の 1 次の項は , (2.7) を用いると ,

$$H_1 = \left\langle \frac{\delta H}{\delta v}, v_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\delta H}{\delta v}, -\text{ad}^*(\xi_1)v \right\rangle = - \left\langle \xi_1, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad (3.1)$$

となって消える . このことは , 定常オイラー流が , 等循環面に拘束された攪乱に関して運動エネルギーの停留状態である事実 [1, 2] と符合する . この結果 , 振幅について 2 次の項がエネルギーの増分の主要項で , それは

$$H_2 = - \left\langle \xi_1, \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\rangle = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \times \xi_1 \right) dV \quad (3.2)$$

とかける . 波のエネルギーの最終形 (3.2) の利点を強調しておきたい ; (3.2) は振幅について 2 次の量であるが , (2.13) の解である振幅について 2 次のラグランジュ変位 $\xi_2(x, t)$ を必要としない . 波のエネルギーの公式 (3.2) そのものはずいぶん前に導かれたが [2] , 2 次の変位 ξ_2 の必要性の有無についてこれまで考慮されてこなかった .

エネルギー導出と同様なやり方で , 波の非線形相互作用によって駆動される $O(\alpha^2)$ の直流成分を導出することが可能である [10] . 与えられた $\eta \in \mathfrak{g}$ に対して , この方向への運動量 $J = \langle \eta, v \rangle$ を考えよう . ハミルトン力学系における Noether の定理によれば , もしハミルトニアン H が変換 $\exp \eta$ に関して不変ならば , J は一定不変である . 攪乱を受けた場 v_α に対する運動量 $J_\alpha = \langle \eta, v_\alpha \rangle$ を定義し , J_α の J からの増分を α についての冪展開 $J_\alpha = \langle \eta, v \rangle + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 / 2 + \dots$ の形であらわす . 幾何学的表現 (2.7) を利用すれば , 最初の 2 つの項は

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle \eta, v_1 \rangle = \langle \eta, -\text{ad}^*(\xi_1)v \rangle = \langle \xi_1, \text{ad}^*(\eta)v \rangle, \\ J_2 &= \langle \eta, v_2 \rangle = \langle \xi_2, \text{ad}^*(\eta)v \rangle + \langle \xi_1, \text{ad}^*(\eta)v_1 \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる．

もし基本流 $v(t)$ が $\text{ad}^*(\eta)v = 0$, なる対称性をもてば, $J_1 = 0$ で, J_2 は

$$J_2 = \langle \text{ad}(\eta)\xi_1, -\text{ad}^*(\xi_1)v \rangle = \int_{\mathcal{D}} \omega \cdot (\xi_1 \times \mathcal{L}_\eta \xi_1) dV \quad (3.4)$$

に帰着する．ここで, $\mathcal{L}_\eta \xi_1 = -\text{ad}(\eta)\xi_1$ は ξ_1 の η に関する Lie 微分である．やはり, 2 次の運動量の増分 J_2 が 1 次の変位だけで表現できることは注目すべきである．

4 Kelvin 波

本節では, 閉容器内の剛体回転流 (= Rankine 渦) の線形攪乱である Kelvin 波について述べる．まずはじめに, 基本流として, 半径 1 の円形断面をもつ円筒容器内に閉じ込められた非粘性・非圧縮性流体の剛体回転をとる．後に, 断面を楕円形に変形する (§6 以降)．

円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を導入する．2 次元基本流の速度の r 成分と θ 成分をそれぞれ U_0 と V_0 , 圧力を P_0 とおく．下付き添字 0 は断面が円形の場合に付随した量であることをあらわす．領域 $r \leq 1$ に閉じ込められた基本場は

$$U_0 = 0, \quad V_0 = r, \quad P_0 = r^2/2 - 1 \quad (4.1)$$

によって与えられる．攪乱場を $\tilde{\mathbf{u}} = \alpha \mathbf{u}_{01}$ とおく．基本流が z 軸まわりの回転対称性と z 軸方向への並進対称性をもつので, ノーマルモード

$$\mathbf{u}_{01}^{(m)} = A_m(t) \mathbf{u}_{01}^{(m)}(r) e^{im\theta} e^{ikz}, \quad A_m(t) \propto e^{-i\omega_0 t} \quad (4.2)$$

を考えれば十分である．振幅 A_m は時間 t の複素数値関数で, ω_0 は角周波数である．この速度場は, 方位波数 m , 軸方向波数 k の Kelvin 波をあらわす．線形化されたオイラー方程式から動径関数 $\mathbf{u}_{01}^{(m)}$ を支配する方程式

$$\mathcal{L}_{m,k} \mathbf{u}_{01}^{(m)} + \nabla p_{01}^{(m)} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{01}^{(m)} = 0 \quad (4.3)$$

が導かれる．左端の記号は行列

$$\mathcal{L}_{m,k} = \begin{pmatrix} -i(\omega_0 - m) & -2 & 0 \\ 2 & -i(\omega_0 - m) & 0 \\ 0 & 0 & -i(\omega_0 - m) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

である．

この解は容易に求まり, 攪乱速度の r 成分は

$$u_{01}^{(m)} = \frac{i}{\omega_0 - m + 2} \left\{ -\frac{m}{r} J_m(\eta_m r) + \frac{\omega_0 - m}{\omega_0 - m - 2} \eta_m J_{m+1}(\eta_m r) \right\} \quad (4.5)$$

となる．ここで, η_m は動径波数で, $\eta_m^2 = [4/(\omega_0 - m)^2 - 1] k^2$, で与えられ, J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数である．境界条件 $u_{01}^{(m)} = 0$ ($r = 1$) を課すと, 分散関係

$$J_{m+1}(\eta_m) = \frac{(\omega_0 - m - 2)m}{(\omega_0 - m)\eta_m} J_m(\eta_m) \quad (4.6)$$

が得られる [22, 17]．図 1 はらせん波 $m = \pm 1$ の分散関係を示す．右巻きらせん波 ($m = -1$) の分散関係は実線で, 左巻きらせん波 ($m = 1$) の分散関係は破線で描いた．無限本の枝が, $m = 1$ に対しては $(k, \omega_0) = (0, 1)$ から, $m = -1$ に対しては $(k, \omega_0) = (0, -1)$ から出ている．無限領域の場合 [5, 21] と違って, 閉じ込め系では孤立モードは存在しない．

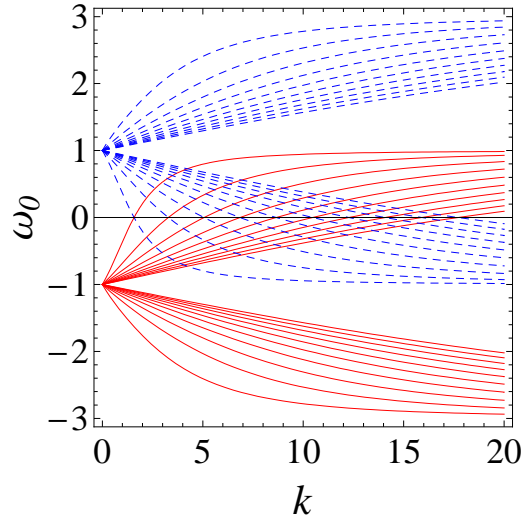


図 1: 円筒容器内の Kelvin 波の分散関係．実線は右巻きらせん波 ($m = -1$) に，破線は左巻きらせん波 ($m = +1$) に対応する．

5 直流成分

攪乱速度場 $\tilde{\mathbf{u}}$ のうち，2 次の項 $\alpha^2 \mathbf{u}_{02}$ は Kelvin 波 $\alpha \mathbf{u}_{01}$ の非線形相互作用によって誘導される平均流を含む． z 軸まわりの回転対称性および z 軸方向への並進対称性を有するオイラー流は任意の動径分布 (r 依存性) をもつ周方向および軸方向速度場を許すという事実を反映して，波が駆動する平均流の計算は一筋縄ではいかない．既存の理論では，微小パラメータ ε であらわされる楕円ひずみを導入して， $O(\varepsilon \alpha^2)$ での可解条件から波が駆動する平均流の周方向 (θ) 成分を何とか導いたが，それは，分散曲線の交点にある軸方向波数-角周波数に限定される [20]．波が駆動する軸流 (z 成分) については何も触れていない．さらに悪いことに，周方向成分の振幅は不定積分に由来する任意定数を含むが，これを正しく定めないと，Kelvin 波の振幅の時間発展において物理的に矛盾する結論に導かれることを前の論文で指摘した [17]．ラグランジュ的記述によって，この難点を克服して， $O(\varepsilon \alpha^2)$ まで進まなくても $O(\alpha^2)$ の平均流を正しく計算することができる [7]．以下では，ラグランジュ的アプローチの概略を記す．

Kelvin 波に対して導入した記号を用いると，(2.12) は

$$\mathbf{u}_{01} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_1}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_1 - (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 \quad (5.1)$$

とかける．基本流 $\mathbf{U}_0 = r \mathbf{e}_\theta$ に対しては，(5.1) の右辺は単に $-i(\omega_0 - m) \boldsymbol{\xi}_1$ となり，Kelvin 波 (4.2) の線形重ね合わせを考えると，(5.1) は

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \text{Re} \left[\sum \frac{i A_m(t)}{\omega_0 - m} \mathbf{u}_{01}^{(m)}(r) e^{im\theta} e^{ikz} \right] \quad (5.2)$$

と解ける．非線形相互作用を計算するときには，実部をとる必要があることに留意されたい．

剛体回転流 $\mathbf{U}_0 = r \mathbf{e}_\theta$ に対しては， $\nabla \times \mathbf{U}_0 = 2 \mathbf{e}_z$ なので，(3.4) に頼るより，むしろ，(2.8) の空間平均から直接平均流を計算した方が手っ取り早い．やはり， θ と z について平均すると 2 次のラグラン

ジュ変位場 ξ_2 からの寄与は消え，1 次のラグランジュ変位場 ξ_1 のみであらわせる：

$$\begin{aligned}\overline{u_{02}} &= \overline{\mathcal{P}[\xi_1 \times (\nabla \times (\xi_1 \times \mathbf{e}_z))]} = \overline{\xi_1 \times \partial \xi_1 / \partial z} \\ &= \sum \frac{4ik}{(\omega_0 - m)^2} |A_m|^2 (0, u_{01}^{(m)} w_{01}^{(m)}, -u_{01}^{(m)} v_{01}^{(m)}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ラグランジュ的アプローチでは，任意の軸方向波数 k において，平均流の計算が可能になる．

6 楕円形断面をもつ筒状容器内の回転流の安定性：問題設定

断面が楕円の容器内の回転流においては，増幅する波が多数励起され，乱流状態に達して，やがて流れは瞬時に崩壊してもとの回転流にもどる [15, 4]．楕円断面を

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon} + \frac{y^2}{1-\varepsilon} = 1 \quad (6.1)$$

とあらわす．パラメータ ε は楕円変形の度合いをあらわすが， $|\varepsilon|$ が小さいと仮定しよう．断面の変形に応じて，基本流も摂動を受けて，

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 + \dots, \quad P = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots; \\ U_1 &= -r \sin 2\theta, \quad V_1 = -r \cos 2\theta, \quad P_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

となる．下付き添字は楕円パラメータ ε についての次数をあらわす． $O(\varepsilon)$ の摂動項は定常四重極場をあらわす．より詳しく述べると， \mathbf{U}_1 は 2 次元純粋ずり流で，伸長軸 (不安定多様体) が $\theta = -\pi/4$ 方向，収縮軸 (安定多様体) が $\theta = \pi/4$ 方向である．

この 2 次元定常基本流の上に 3 次元攪乱 $\tilde{\mathbf{u}}$ を加える．そして，2 つの微小パラメータ ε と α に関する流れ場の漸近展開を $O(\alpha^3)$ まで行う：

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 + \alpha \mathbf{u}_{01} + \varepsilon \alpha \mathbf{u}_{11} + \alpha^2 \mathbf{u}_{02} + \alpha^3 \mathbf{u}_{03} + \dots \quad (6.3)$$

ここで，速度場の $O(\varepsilon^m \alpha^n)$ 成分を \mathbf{u}_{mn} とかく．楕円ひずみ ε が小さいとき，容器の側壁形状 (6.1) は $r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta / 2 + O(\varepsilon^2)$ と近似できる．剛体側壁で課される境界条件は， \mathbf{n} を側壁での外向き単位法線ベクトルとして，

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at } r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta / 2 \quad (6.4)$$

である．

7 Moore-Saffman-Tsai-Widnall 不安定性

第 4 節で述べた Kelvin 波は中立安定な振動であるが，筒状容器断面の回転対称性を破れば不安定になり得る．楕円ひずみ εU_1 の Kelvin 波への影響を調べよう． $O(\alpha)$ で $e^{im\theta}$ と $e^{i(m+2)\theta}$ 型の Kelvin 波が励起されたとき，オイラー方程式の非線形項のおかげで，ひずみ場 εU_1 を介して， $O(\varepsilon \alpha)$ で $e^{im\theta}$ と $e^{i(m+2)\theta}$ 型の Kelvin 波が再び励起される．この一致はとりも直さずパラメータ共鳴が起こる可能性を示唆する [18, 21, 5]．無限領域の場合に，2 次元ひずみを受けた Rankine 渦の 3 次元不安定性の解析を行って，方位波数 m と $m+2$ の Kelvin 波の分散曲線のすべての交点 (k, ω) において， $O(\varepsilon \alpha)$ でパラメータ共鳴不安定が起きることが示した [5]．断面が楕円の筒状容器に閉じ込められた回転流についても同様である [22]．

図1から読み取れるように、 k 軸 ($\omega_0 = 0$) 上において、交点が離散的に存在する。左・右巻きらせん波間の共鳴の場合、この定常モード ($\omega_0 = 0$) は非定常モード ($\omega_0 \neq 0$) に比べてはるかに大きな増幅率を示す [21, 3, 5]。本稿では、 $\omega_0 = 0$ で起こる右・左巻きらせん波 $(m, m+2) = (-1, +1)$ 同士のパラメータ共鳴に限って結果を記す。

条件 $\omega_0 = 0$ のもとでは、動径波数は $\eta = \sqrt{3}k$ である。最低次の攪乱 \mathbf{u}_{01} として、 $m = \pm 1$ の Kelvin 波の重ね合わせ

$$\mathbf{u}_{01} = A_- \mathbf{u}_{01}^{(-)} e^{-i\theta} e^{ikz} + A_+ \mathbf{u}_{01}^{(+)} e^{i\theta} e^{ikz} + c.c. \quad (7.1)$$

を考える。下付き添字に関して、 $A_{\pm 1}$ の代わりに A_{\pm} という表記を用いる。ひずみ流 \mathbf{U}_1 によって $O(\varepsilon\alpha)$ で励起されるのは

$$\mathbf{u}_{11} = \left\{ B_- \mathbf{u}_{11}^{(-)} e^{-i\theta} + B_+ \mathbf{u}_{11}^{(+)} e^{i\theta} + B_{-3} \mathbf{u}_{11}^{(-3)} e^{-3i\theta} + B_3 \mathbf{u}_{11}^{(3)} e^{3i\theta} \right\} e^{ikz} + c.c. \quad (7.2)$$

である。動径関数 $\mathbf{u}_{11}^{(m)}(r)$, $\mathbf{u}_{11}^{(m+2)}(r)$ はオイラー方程式と連続の式から導かれる連立非斉次常微分方程式系を $O(\varepsilon\alpha)$ での境界条件 (6.4)

$$u_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_{01}}{dr} - u_{01} \right) \cos 2\theta + v_{01} \sin 2\theta = 0 \quad \text{at } r = 1 \quad (7.3)$$

のもとで解くことによって決定される。

境界条件 (7.3) から振幅 B_{\pm} に対する連立代数方程式が導かれる。この方程式の可解条件から Kelvin 波の振幅の時間発展の式が得られる：

$$\frac{1}{A_+} \frac{\partial A_-}{\partial t_{10}} = \frac{-1}{A_-} \frac{\partial A_+}{\partial t_{10}} = i \frac{3(3k^2 + 1)}{8(2k^2 + 1)} = ia. \quad (7.4)$$

ここで $t_{10} = \varepsilon t$ はゆっくりとした時間スケール、 k は分散関係 (4.6) $J_1(\eta) = -\eta J_0(\eta)$ の解である。

k 軸 ($\omega_0 = 0$) 上で縮退したモードは必ずパラメータ共鳴を起こし、その増幅率は $a = 3(3k^2 + 1)/[8(2k^2 + 1)]$ [22]、不安固有関数の振幅の比は $A_-/A_+ = i$ で与えられる。波数 k が小さい方から数えて最初の2つの $\omega_0 = 0$ をもつ交点での増幅率の値は $(k, a) \approx (1.578, 0.5311)$, $(3.286, 0.5542)$, \dots である。パラメータ共鳴を起こすということは負のエネルギーをもつ Kelvin 波の存在を示唆する。実際はそうではなくて、定常波のエネルギーはゼロである [5]。Kelvin 波のエネルギーはラグランジュ的記述の枠組みで構築した公式 (3.2) [7] から効率よく計算できる。

$O(\alpha^3)$ でらせん波 $e^{\pm i\theta} e^{ikz}$ が再び励起される。らせん波 ($m = \pm 1$) の動径関数 $\mathbf{u}_{03}^{(m)}$ は $\mathcal{L}_{m,k} \mathbf{u}_{03}^{(m)} = \mathcal{N} - \partial \mathbf{u}_{01}^{(m)} / \partial t_{02}$ によって支配される。2 個目のおそい時間スケール $t_{02} = \alpha^2 t$ を導入した。非線形項 \mathcal{N} の計算は $O(\alpha^2)$ で生ずる平均流の正確な形を必要とする。 $O(\alpha^3)$ での境界条件から可解条件が導かれ、それを満たすよう要請すると、 A_{\pm} の弱非線形的な時間発展項が得られる。

8 振幅方程式

弱非線形振幅方程式を $O(\alpha^3)$ まで導く準備は整った。具体的な手続きについては文献 [17] にある程度詳しく述べてある。

らせん波の非線形相互作用によって誘導される平均流は

$$4ik \left(0, (|A_-|^2 + |A_+|^2) u_{01}^{(+)} w_{01}^{(+)}, (|A_-|^2 - |A_+|^2) u_{01}^{(+)} v_{01}^{(+)} \right) \quad (8.1)$$

である．一般の $(m, m+2)$ 型パラメータ共鳴の平均流については，(5.3) からすぐわかるように，Kelvin 波が誘導する平均流は動径成分のみがゼロである．しかし，定常らせん波共鳴の不安定固有モードについては， $|A_-| = |A_+|$ なので，軸流もゼロである．さて， $O(\alpha^3)$ での境界条件を満足させるという要請 (= 可解条件) から，振幅方程式が直ちに得られる：

$$\frac{dA_{\pm}}{dt} = \mp i [\varepsilon a A_{\mp} + \alpha^2 A_{\pm} (b|A_{\pm}|^2 + c|A_{\mp}|^2)]. \quad (8.2)$$

ここで， a は (7.4) によって定義され，

$$b = \frac{-2k^4}{3(2k^2+1)} \left[\frac{4}{J_0(\eta)^2} \int_0^1 r J_0(\eta r)^2 J_1(\eta r)^2 dr - (11k^4 + 13k^2 + 5) J_0(\eta)^2 \right],$$

$$c = \frac{k^2}{12(2k^2+1)} \left[\frac{64k^2}{J_0(\eta)^2} \int_0^1 r J_0(\eta r)^2 J_1(\eta r)^2 dr + (20k^6 + 97k^4 + 14k^2 - 27) J_0(\eta)^2 \right] \quad (8.3)$$

である．係数がコンパクトにあらわされたので， k 軸 ($\omega_0 = 0$) 上のすべての交点で容易に計算できる．波長の長いものから交点を 2 つを選んで係数を計算すると， $(k; a, b, c) \approx (1.579; 0.5312, -0.3976, 5.222)$ ， $(3.286; 0.5542, -8.286, 53.39)$ である．

振幅方程式 (8.2) がハミルトンのノーマルフォーム [9] と一致することを強調したい．完全な形の平均流 (5.3) を取り込んで非線形項 $|A_{\pm}|^2 A_{\pm}$ ， $|A_{\mp}|^2 A_{\pm}$ を計算することによってはじめて，ノーマルフォームの形が得られる．片や，オイラー的記述の枠組みに留まる限り，平均流の振幅を従属変数として加えねばならず [20]，この余計な常微分方程式の積分から余計な不定パラメータが紛れ込んでくる．

振幅 A_- and A_+ は時間 t の複素数値関数なので，振幅方程式系 (8.2) は 4 次元力学系をなす．交点の選び方によらず係数 (a, b, c) の符号は変わらない： $a > 0$ ， $b < 0$ ， $c > 0$ ．

振幅方程式 (8.2) は 2 次元部分空間 $A = A_- = -A_+^*$ に制限された解を許す．上付き添字 * は複素共役をあらわす．振幅パラメータを $\alpha^2 = \varepsilon$ と選ぶと，(8.2) をこの 2 次元部分空間に制限したものは

$$\frac{dA}{dt} = i\varepsilon (-aA^* + \beta|A|^2 A) \quad (8.4)$$

となる．ここで， $\beta = b + c$ である．図 2 は位相空間 $(\text{Re}[A], \text{Im}[A])$ における解軌道を示す．定常剛体回転をあらわす原点は不安定固定点で，これが不安定化するが，振幅の成長は飽和して，解は安定固定点を周回する軌道に落ち着く．

ここで， $A = |A|e^{i\phi}$ とおくと，振幅 $|A|$ と位相 ϕ がしたがう方程式は

$$\frac{d|A|}{dt} = -\varepsilon a |A| \sin 2\phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = -\varepsilon a \cos 2\phi + \varepsilon \beta |A|^2 \quad (8.5)$$

となる．攪乱振幅 $|A| (\ll 1)$ が小さいうちは線形項が支配的である．原点にある平衡点 $A = 0$ は不安定で，攪乱渦度ベクトルの水平 (xy) 成分の角度 ϕ は伸長方向 $\phi = -\pi/4, 3\pi/4$ に向けられる傾向がある．もし，攪乱渦度がより長時間 $\phi = -\pi/4, 3\pi/4$ ，あるいは，これらにほぼ平行な方向に向けられたとすると，楕円ひずみは渦度の水平成分をたえず伸ばして強めようとする．これが線形段階での MSTW instability 不安定性の機構である．攪乱が成長して振幅 $|A|$ がある一定値に達すると，非線形効果が効き始める．角度 ϕ に対する式 (8.5) をみると，非線形効果は渦度の水平成分を一方向にまわす．その結果，水平渦度が $\phi = -\pi/4, 3\pi/4$ に揃うことが妨げられて，攪乱の成長が抑制され，振幅の最大値が一定値に落ち着く．

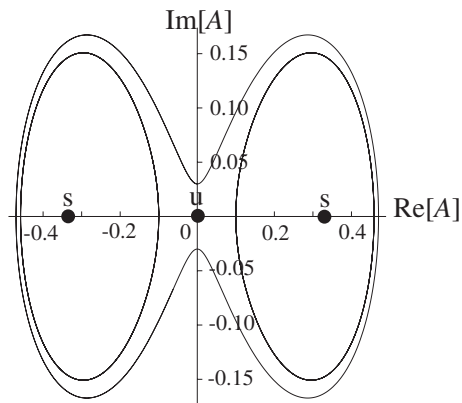


図 2: Trajectories in 位相空間 ($\text{Re}[A], \text{Im}[A]$) における振幅方程式の解軌道．波数を $k = 1.579$ ととった．太い黒点は固定点をあらわす (s: 安定固定点, u: 不安定固定点)．

9 結論

断面が楕円形をした筒状容器内の回転流の弱非線形安定性解析を行った．Kelvin 波の非線形相互作用によって誘導される平均流を導出するのに，オイラー的記述に比べて，ラグランジュ記述の枠組が圧倒的にすぐれている (§5) ことを再度強調しておきたい．

しかし，この振る舞いは，実験 [15, 4] で観察された無数の波の励起・増幅，そして，それに続く破局的な流れの崩壊とは一致しない．単一の MSTW 不安定モード自身の非線形相互作用だけでは，実際の流れを記述するのに用をなさない．単一モードの成長が非線形的に飽和する前に 2 次不安定，さらには，3 次不安定が起こって，その後の成長を大きく変えるであろう．これら 2 次・3 次不安定性を扱うにもラグランジュ的扱いが欠かせないだろう．

乱流の大きな特徴の 1 つは物質の拡散・混合を著しく促進することである．ラグランジュ的方法は，3 次元乱流の中で励起された波が誘導するドリフト流，それに由来する質量輸送の増大の解明を大きく前進させる可能性を秘めている．

謝辞

本稿で紹介したのは，廣田真氏 (日本原子力機構) および彌榮洋一氏 (九州大学大学院数理学府博士課程 3 年) との共同研究の結果である [8]．また，服部裕司氏 (東北大流体科学研究所) から貴重な議論をいただいている．ご協力くださった方々に感謝いたします．

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I.: “Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **16** (1966), 319-361.
- [2] Arnol'd, V. I.: “Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaire”, *J. Méc.* **5** (1966), 29-43.
- [3] Eloy, C. and Le Dizès, S.: “Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field”, *Phys. Fluids* **13** (2001), 660-676.

- [4] Eloy, C, Le Gal, P. and Le Dizès, S.: “Experimental Study of the Multipolar Vortex Instability”, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 3400–3403.
- [5] Fukumoto, Y.: “The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited”, *J. Fluid Mech.* **493** (2003), 287–318.
- [6] Fukumoto, Y., Hattori, Y. and Fujimura, K.: *Proc. of the 3rd International Conference on Vortex Flows and Vortex Models* (The Japan Society of Mechanical Engineers, 2005) pp. 149-154.
- [7] Fukumoto, Y. and Hirota, M.: “Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it”, *Phys. Scr.* **T132** (2008), 014041.
- [8] Fukumoto, Y., Hirota, M. and Mie, Y.: “Lagrangian approach to weakly nonlinear stability of elliptical flow”, *Phys. Scr.* **T142** (2010), 014049.
- [9] Guckenheimer, J. and Mahalov, A.: “Instability induced by symmetry reduction”, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 2257-2260.
- [10] Hirota, M.: *Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application*, COE Lecture Note Vol. **20** (Kyushu University, 2009), pp.137-156.
- [11] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: “Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra”, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 083101.
- [12] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: “Action-angle variables for the continuous spectrum of ideal magnetohydrodynamics”, *Phys. Plasmas* **15** (2008), 122101.
- [13] Holm, D. D., Schmah, T. and Stoica, C.: *Geometric Mechanics and Symmetry* (Oxford University Press, 2009).
- [14] Kerswell, R. R.: “Elliptical instability”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34** (2002), 83–113.
- [15] Malkus, W. V. R.: “An experimental study of the global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating”, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48** (1989), 123–134.
- [16] Mason, D. M. and Kerswell, R. R.: “Nonlinear evolution of the elliptical instability: an example of inertial wave breakdown”, *J. Fluid Mech.* **396** (1999), 73–108.
- [17] Mie, Y. and Fukumoto, Y.: “Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder”, *J. Math-for-Industry* **2** (2010), 27-37.
- [18] Moore, D. W. and Saffman, P. G.: “Instability of a straight vortex filament in a strain field”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **346** (1975), 413–425.
- [19] Rodrigues, S. B. and Luca, J. D.: “Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability”, *Phys. Fluids* **21** (2009), 014108.

- [20] Sipp, D.: “Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex”, *Phys. Fluids* **12** (2000), 1715–1729.
- [21] Tsai, C.-Y. and Widnall, S. E.: “The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field”, *J. Fluid Mech.* **73** (1976), 721–733.
- [22] Vladimirov, V. A., Tarasov, V. F. and Rybak, L. Y.: “Stability of elliptically deformed rotation of an ideal incompressible fluid in a Coriolis force field”, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **19** (1983), 437–442.
- [23] Waleffe, F. A.: “The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence”, PhD thesis. MIT (1989).