

ASEP におけるカレント分布 : 双対性からのアプローチ

今村, 卓史
千葉大学大学院理学研究科

笹本, 智弘
東京大学先端科学技術研究センター

<https://doi.org/10.15017/23401>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (17), pp.117-124, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 17 (pp. 117 - 124)

ASEP におけるカレント分布:双対性 からのアプローチ

今村 卓史 (IMAMURA Takashi), 笥本 智弘
(SASAMOTO Tomohiro)

(Received 17 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

ASEPにおけるカレント分布:双対性からのアプローチ

東京大学先端科学技術研究センター 今村 卓史 (IMAMURA Takashi)
千葉大学 大学院理学研究科 笹本 智弘 (SASAMOTO Tomohiro)

概要 一次元非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process 略して ASEP) においてカレント分布の厳密解が最近活発に研究されている. その際に重要となるのがカレントモーメントの積分表示である. 本稿では ASEP における双対性を用いて, 与えられた初期分布におけるカレントモーメントを議論する.

1 はじめに

非対称単純排他過程 (ASEP) は, 体積排除相互作用する多粒子ランダムウォーク模型である. 本稿では両側無限に伸びた一次元格子上的 ASEP を考察する. 各サイト上には粒子がいるか, いないかどちらかの状態をとる. そのルールは以下のように与えられる (図 1(a)):

1. 各粒子は, 隣のサイトに粒子がいなかったら, レート $q(p)$ で左 (右) 隣へ動く. p と q は異なってもよい.(非対称ランダムウォーク)
2. ただし隣のサイトに粒子がいたら, 動けない. (体積排除相互作用).

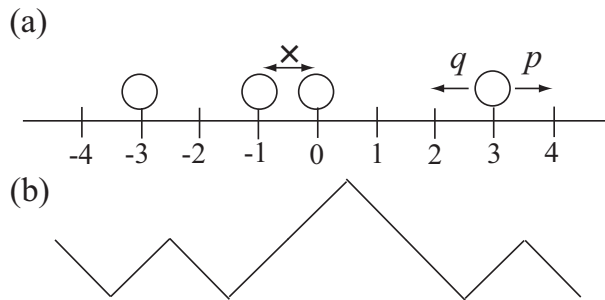


図 1: (a) 非対称単純排他過程 (ASEP) (b)ASEP は表面成長のモデルともみなせる.

このような単純で扱いやすいルールにもかかわらず, ASEP は多彩な現象を示し, これまで様々な分野に応用されてきた [1]. たとえば, q または p が 0 という粒子が一方向にのみ動く場合 (Totally ASEP, 略して TASEP), 粒子を車や人, 一次元格子を道路とみなせば, これは交通流のモデルとみなせる. また最近では粒子を製品の原料, 格子を工程とみなして, 物流のモデルとしての解析も行われている. ASEP はまた表面成長のモデルとみなすこともできる. 粒子がいる (いない) サイトを右上がり (右下がり) の直線と対応させると, ASEP の粒子の配置は図 1(b) のように凹凸のある表面と解釈できる. さらに, ASEP で粒子が右 (左) に動くことは, 菱形のブロックがつけ加わる (取り除かれる) ことを意味する (図 2). 図 1(b) の表面の高さが高くなることは, 粒子がそれだけ左へ流れることに対応する. したがって ASEP の時間発展は, 荒れた表面の成長とみなせ, その際の「高さ」は元の ASEP では「カレント」に対応している.

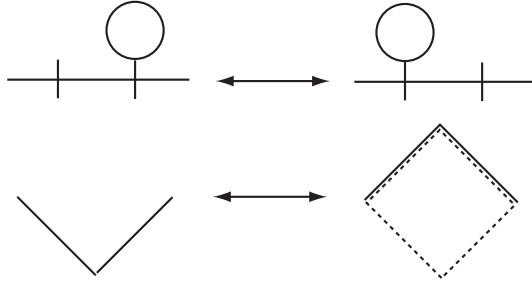


図 2: ASEP で粒子が左 (右) に動くということは, 表面成長モデルでは点線の菱形のブロックがつけ加わる (取り除かれる) ことに対応する.

このような荒れた界面の成長を記述する確率微分方程式として Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式が知られている [2, 3]. 一次元の場合, $h(x, t)$ を位置 x 時刻 t における高さとして,

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \eta(x, t) \quad (1.1)$$

と表わされる. $\eta(x, t)$ はランダムネスの効果を表し, $\eta(x, t)$

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (1.2)$$

の相関で表わされる白色ノイズとする. KPZ 方程式は, 局所的に相互作用する表面成長に関して, 巨視的な対称性に着目することで得られ, 長時間極限における高さ揺らぎの普遍性が議論された [3]. 上述の通り, 表面の高さは ASEP で言うとカレントに相当することを考えると, ASEP のカレント揺らぎと, KPZ 方程式の高さ揺らぎは, 長時間極限によって同じ振る舞いをすると考えられてきた.

2010 年から, ASEP と KPZ 方程式との関係に関する我々の理解が格段に進歩している. 両者は上記のような普遍性という物理的概念でつながっているだけでなく, 数理的な意味でも深くつながっていることが明らかにされつつある. 特に [4, 5, 6, 7] では, ASEP のカレント分布に関する知見を活かして, KPZ 方程式の高さの分布関数の厳密解を得ることに成功している.

その後, この厳密解は Replica ベーテ仮説と呼ばれる方法でも得られることが分かった [8, 9](日本語の解説として [10] がある). その際のカギとなる重要な関係式として,

$$\langle e^{Nh(0, t)} \rangle = \langle 0 | e^{-H_N t} | I \rangle \quad (1.3)$$

がある. ただし右辺はデルタ関数で引力相互作用する N 粒子 δ ボース気体の状態 $|I\rangle$ (これは KPZ 方程式の初期条件に依存する) から原点 (N 個の粒子がすべて原点に局在する状態) への虚時間発展を表す. δ ボース気体のハミルトニアンは

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N \delta(x_j - x_k) \quad (1.4)$$

で与えられる.

この式は印象的な式である. 左辺は KPZ 方程式の高さに関する N 次指数モーメントを表す. それを求めるためには, $\{h(x, t)\}_{x \in \mathbb{R}}$ という無限自由度の分布関数に関する情報が必要な気がする. 一方それが右辺に行くと N 粒子という, 有限個の粒子のダイナミクスの問題になっているのだ. この式は, 無限自由度と有限自由度との間の双対性を連想させる.

ではこのような関係は, ASEP におけるカレントモーメントに関して成り立っているのだろうか? 我々は [11] でこの問題について考察した. その結果 n 次カレントモーメントが, 1 から n 粒子までの ASEP のダイナミクスで記述されることが分かった. その際, ASEP に潜む対称性 ($U_q(sl_2)$ 対称性) の帰結として現れる双対性 [12] が本質的な役割を果たす. 本稿ではこの ASEP におけるカレントモーメントに関して, 対称性と双対性に焦点を当てつつ解説する.

2 ASEP のマスター方程式

この節では, ASEP に潜む対称性を明確に表示するために, マスター方程式をベクトルと行列で表示する. またここでは, サイト数 L の closed な境界条件における ASEP を考察する. L サイトの格子点を左から順に, 1 から L とラベル付けする.

まず, 状態をベクトルで表示する. 1 つのサイトに粒子がいる状態を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, いない状態を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表わす. したがってサイト 1 から L まで粒子が 1 つもない状態を $|0\rangle$ と書くと

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_L, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}_L \quad (2.1)$$

と表わされる. ただし $\langle 0|$ は対応するヨコベクトルである. 次にサイト x_1, \dots, x_n に粒子が計 n 個いる状態 $|x_1, \dots, x_n\rangle$ は

$$|x_1, \dots, x_n\rangle = s_{x_1}^- \cdots s_{x_n}^- |0\rangle, \quad \langle x_1, \dots, x_n| = \langle 0| s_{x_1}^+ \cdots s_{x_n}^+ \quad (2.2)$$

と書ける. ただし

$$s_x^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_x, \quad s_x^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_x \quad (2.3)$$

であり, この行列はサイト x に作用し, 他のサイトには自明に作用する. s_x^- を左から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に作用させると $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. つまり s_x^- はサイト x に粒子を 1 つ生成する行列である (そのヨコベクトル版が s_x^+).

状態 $|x_1, \dots, x_n\rangle$ の時刻 t における実現確率を $P(\{x_i\}_{i=1, \dots, n}; t)$ として, 確率ベクトルを

$$|P_t\rangle = \sum_{n=1}^L \sum_{1 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq L} P(\{x_i\}_{i=1, \dots, n}; t) |x_1, \dots, x_n\rangle \quad (2.4)$$

で定義する. $|P_t\rangle$ の時間発展方程式 (マスター方程式) は

$$\frac{d}{dt} |P_t\rangle = -H |P_t\rangle, \quad |P_t\rangle = e^{-Ht} |P_{t=0}\rangle \quad (2.5)$$

と書ける. ただし H は $2^L \times 2^L$ の行列である (遷移行列と呼ばれる). 2 番目の式の $|P_{t=0}\rangle$ は $t=0$ の初期状態を表す.

ASEP の場合 H は

$$H_{\text{ASEP}} = - \sum_{j=1}^{L-1} \left(p s_j^+ s_{j+1}^- + q s_j^- s_{j+1}^+ - p \hat{n}_j (1 - \hat{n}_{j+1}) - q (1 - \hat{n}_j) \hat{n}_{j+1} \right) \quad (2.6)$$

と表わされる. (詳しくは [13, 14] をご参照ください) ここで s_j^-, s_j^+ は (2.3) 式で定義されている. また

$$\hat{n}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_j \quad (2.7)$$

である. $n_j|0\rangle = 0, n_j|j\rangle = |j\rangle$ に注意すると \hat{n}_j はサイト j の粒子の数 (いない場合は 0 いる場合は 1) を数える演算子である.

このような定式化で物理量の期待値は以下のように書ける. 物理量を A とし, 対応する演算子を \hat{A} とする. たとえば, A としてサイト j における粒子の密度 n_j (サイト j に粒子がいたら 1, いなかったら 0) を取ったとすると対応する演算子は \hat{n}_j である. その時, 時刻 t における A の期待値 $\langle A \rangle_t$ は

$$\langle A \rangle_t = \langle N | \hat{A} | P_t \rangle = \langle N | \hat{A} e^{-Ht} | P_{t=0} \rangle \quad (2.8)$$

と書ける. ただし $\langle N | = \sum_{1 \leq x_1 < \dots < x_N \leq L} \langle x_1, \dots, x_N |$ であり, 上の式の 2 番目の等号は (2.5) 式を用いている. ここでは全粒子の個数を N としている.

3 対称性と双対性

本節では ASEP における (隠れた) 対称性を考察し, その帰結としてある物理量の相関関数に関して双対性が成り立つことを示す.

3.1 対称排他過程 (SSEP) と sl_2 対称性

まず, 左右へのホッピングレートが等しい ($p = q (= 1/2)$) 場合を考察する. これを対称単純排他過程 (Symmetric Simple Exclusion Process, SSEP) と呼ぶことにする. この時遷移行列 (2.6) 式は

$$H_{\text{SSEP}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L-1} \left(s_j^+ s_{j+1}^- + s_j^- s_{j+1}^+ + 2\hat{n}_j(1 - \hat{n}_{j+1}) - 2(1 - \hat{n}_j)\hat{n}_{j+1} \right) \quad (3.1)$$

と表わされる. これは量子スピン系におけるハイゼンベルグスピン鎖のハミルトニアンと同じ形である. これは以下で表わされる対称性を持つことが知られている. まず

$$S^\pm = \sum_{k=1}^L s_k^\pm, \quad S^z = \sum_{k=1}^L s_k^z \quad \text{ただし } s_j^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

を定義する. これらは次のような交換関係を満たす.

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm \quad (3.3)$$

ただし $[A, B] := AB - BA$ である. これは sl_2 と呼ばれるリー代数の生成元が満たす交換関係である. SSEP の遷移行列は, これらと交換する.

$$[H_{\text{SSEP}}, S^\pm] = [H_{\text{SSEP}}, S^z] = 0 \quad (3.4)$$

この意味で, SSEP は sl_2 対称性を持っているわけである.

SSEP における sl_2 対称性の帰結として, 次のような関係式が成り立つ [15].

$$\begin{aligned} \langle n_{x_1} \dots n_{x_n} \rangle_t^{(N)} &= \sum_{1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq L} G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0) \langle n_{y_1} \dots n_{y_n} \rangle_0^{(N)}, \\ G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0) &= \langle x_1, \dots, x_n | e^{-H_{\text{SSEP}} t} | y_1, \dots, y_n \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

この関係式の左辺は N 粒子 SSEP の密度 n_x の n 点相関関数である。右辺の $G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0)$ は n 粒子の SSEP において、時刻 $t = 0$ の時 $\{y_j\}_{j=1, \dots, n}$ にいた粒子が時刻 t で $\{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ へ遷移するときの遷移確率である。このように SSEP において N 粒子の密度の相関関数 (左辺) が、 n 粒子のダイナミクスの問題に変換できる。これが SSEP の双対性である。

証明は容易である。カギとなる式は

$$(1) \langle N | \hat{n}_{x_1} \cdots \hat{n}_{x_n} = \langle x_1, \dots, x_n | (S^+)^{N-n}, \quad (2) [H_{\text{SSEP}}, S^+] = 0 \quad (3.6)$$

の 2 つである。(最初の式は容易に証明できる。2 番目の式が sl_2 対称性の式である。)

これを用いて (3.5) 式を証明する。

$$\begin{aligned} & \langle N | \hat{n}_{x_1} \cdots \hat{n}_{x_n} e^{-H_{\text{SSEP}} t} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle x_1, \dots, x_n | (S^+)^{N-n} e^{-H_{\text{SSEP}} t} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \\ & \stackrel{(2)}{=} \langle x_1, \dots, x_n | e^{-H_{\text{SSEP}} t} (S^+)^{N-n} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \\ & = \sum_{1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq L} \langle x_1, \dots, x_n | e^{-H_{\text{SSEP}} t} | y_1, \dots, y_n \rangle \langle y_1, \dots, y_n | (S^+)^{N-n} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \\ & \stackrel{(1)}{=} \sum_{1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq L} \langle x_1, \dots, x_n | e^{-H_{\text{SSEP}} t} | y_1, \dots, y_n \rangle \langle N | \hat{n}_{x_1} \cdots \hat{n}_{x_n} | P_{t=0}^{(N)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

□

3 番目の等号では、完全系 $1 = \sum_y |y_1, \dots, y_n\rangle \langle y_1, \dots, y_n|$ をはさんだ。 sl_2 対称性は 2 番目の等号で使われていることに注意する。ここで $(S^+)^{N-n}$ と $e^{-H_{\text{SSEP}} t}$ が交換できたことが重要であることに注意しよう。SSEP の双対性は sl_2 対称性 ((2) 式) に起因している。

3.2 ASEP と $U_q(sl_2)$ 対称性

では (3.5) 式 ASEP の場合にも成り立つのだろうか。残念ながら成り立たないことが容易にわかる。というのは ASEP は sl_2 対称性を持たない ((3.4) 式が成り立たない) からである。

しかし、ASEP は以下で述べる $U_q(sl_2)$ 対称性を持っている。まず行列 X^\mp , K を

$$\begin{aligned} X^- &= \tau^{-4/L} \sum_{k=1}^L s_k^+ \tau^{\sum_{j=k+1}^L (1-\hat{n}_j)}, \quad X^+ = \tau^{-4/L+1/2} \sum_{k=1}^L \tau^{\sum_{j=1}^{k-1} (1-\hat{n}_j)} s_k^-, \\ K &= \tau^{-\sum_{j=1}^L s_j^k}, \quad \text{ただし } \tau = p/q \end{aligned} \quad (3.8)$$

と定義する。SSEP の極限 ($\tau \rightarrow 1$) で X^- , X^+ , K はそれぞれ (3.2) 式の S^+ , S^- , S^z 式に対応している。これらは

$$KX^+K^{-1} = \tau X^+, \quad KX^-K^{-1} = \tau^{-1} X^-, \quad [X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{\tau^{1/2} - \tau^{-1/2}} \quad (3.9)$$

という関係式を満たす。これは $U_q(sl_2)$ の生成元が満たす関係式である [16]。ASEP の遷移行列 (2.6) 式は、これら X^- , X^+ , K と交換する。

$$[H_{\text{ASEP}}, X^\pm] = [H_{\text{ASEP}}, K] = 0 \quad (3.10)$$

この関係は SSEP の場合の (3.4) 式の $p \neq q$ を含んだ一般化である。この対称性に起因する双対関係式は存在するのだろうか。Schütz は以下のような関係式を得た [12]。

$$\langle \tilde{Q}_{x_1} \cdots \tilde{Q}_{x_n} \rangle_t^{(N)} = \sum_{1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq L} G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0) \langle \tilde{Q}_{y_1} \cdots \tilde{Q}_{y_n} \rangle_0^{(N)} \quad (3.11)$$

ただし $\tilde{Q}_x = (\tau^{N_x} - \tau^{N_x-1})/(\tau - 1)$ で $N_x = \sum_{j=1}^x n_j$ である。また $G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0)$ は ASEP における遷移確率 ((3.5) 式の $G(\{x\}_n; t | \{y\}_n; 0)$ で H_{SSEP} を H_{ASEP} としたものである。SSEP の極限 ($\tau = q/p \rightarrow 1$) で $\tilde{Q}_x \rightarrow n_x$ となることは容易にわかり、(3.11) 式は (3.5) 式の ASEP における一般化となっている。

(3.11) 式の証明は (3.7) 式の場合とまったく平行である。ただし (3.12) 式の代わりに

$$(1) \langle N | \tilde{Q}_{x_1} \cdots \tilde{Q}_{x_n} = C(x_1, \dots, x_n | (X^-)^{N-n}, (2) [H_{\text{ASEP}}, X^-] = 0 \quad (3.12)$$

を用いる。((1) の証明は [11] の lemma 1 をご参照ください。)

4 ASEP におけるカレントモーメント

[11] で、我々はこれまで議論した双対性を用いて、ASEP のカレントモーメントの公式を得た。ここでは両側が無限に伸びた ASEP を考える。(格子のラベルは図 1(a) のようにとる。)

$Q_x = \tau^{N_x}$ とする。ただし $\tau = q/p, N_x = \sum_{j=-\infty}^x n_j$ である。 $x = 0$ として、 $t = 0$ ですべての粒子が正の領域にいたとする。この時 N_x はいくつ粒子が負の領域に移動した (左側に流れた) かを数えている。したがって N_x は ASEP のカレントを意味する。

この時 $\langle Q_x^n \rangle_t, n = 1, 2, \dots$ という量すなわちカレントの指数モーメントを考える。我々は以下の結果を得た。

$$\begin{aligned} \langle Q_x^n \rangle_t &= \sum_{k=0}^n (\tau^n - 1) \cdots (\tau^{n-k+1} - 1) c_k, \\ c_k &= \sum_{-\infty < x_1 < \cdots < x_k \leq x} \sum_{-\infty < y_1 < \cdots < y_k \leq \infty} G(\{x\}_k; t | \{y\}_k; 0) \langle \tilde{Q}_{y_1} \cdots \tilde{Q}_{y_k} \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

この式は以下のように示される。まず有限系 (L サイト, N 粒子) のカレントモーメントを考察する。

$$\begin{aligned} &\langle N | Q_x^n e^{-H_{\text{ASEP}} t} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{0 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq x} (\tau^n - 1) \cdots (\tau^{n-k+1} - 1) \langle N | \tilde{Q}_{x_1} \cdots \tilde{Q}_{x_k} e^{-H_{\text{ASEP}} t} | P_{t=0}^{(N)} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{0 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq x} \sum_{1 \leq y_1 < \cdots < y_k \leq L} (\tau^n - 1) \cdots (\tau^{n-k+1} - 1) G(\{x\}_k; t | \{y\}_k; 0) \langle \tilde{Q}_{y_1} \cdots \tilde{Q}_{y_k} \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで最初の等式で、関係式

$$\langle N | Q_x^n = \sum_{k=0}^n \sum_{0 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq x} (\tau^n - 1) \cdots (\tau^{n-k+1} - 1) \langle N | \tilde{Q}_{x_1} \cdots \tilde{Q}_{x_k} \quad (4.3)$$

を用いた。(証明は [11] の lemma 4, 5 をご参照ください。) また 2 番目の等号で、ASEP 双対性 (3.11) を用いている。最後にサイト数を両側に引き伸ばす極限をとる。具体的には (4.2) 式の最後の式の x_j と y_j に関する和の部分で、 $1 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$ とすると (4.1) 式が得られる。

両側が無限にのびた 1 次元 ASEP の k 粒子遷移確率 $G(\{x\}_k; t | \{y\}_k; 0)$ は Bethe 仮説を用いて

$$G(\{x\}_k; t | \{y\}_k; 0) = \sum_{\sigma \in S_k} \int_{C_R} \cdots \int_{C_R} d\xi_1 \cdots d\xi_k A_\sigma \prod_{i=1}^k \xi_{\sigma(i)}^{x_i - y_{\sigma(i)} - 1} e^{\sum_{i=1}^k \varepsilon(\xi_i) t} \quad (4.4)$$

と表わされる [17, 18]. ただし S_k は k 個の置換全体の集合を表し $\varepsilon(\xi) = p/\xi + q\xi - 1$,

$$A_\sigma = \text{sgn} \sigma \prod_{i < j} \frac{p + q\xi_{\sigma(i)}\xi_{\sigma(j)} - \xi_{\sigma(i)}}{p + q\xi_i\xi_j - \xi_i} \quad (4.5)$$

である. この式と

$$\sum_{-\infty < x_1 < \dots < x_k \leq x} \xi_{\sigma(1)}^{x_1} \dots \xi_{\sigma(k)}^{x_k} = \frac{(\xi_1 \dots \xi_k)^{x+1}}{(\xi_{\sigma(1)} - 1) \dots (\xi_{\sigma(1)} \dots \xi_{\sigma(k)} - 1)} \quad (4.6)$$

および恒等式 [18]

$$\sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn} \sigma \frac{\prod_{i < j} (p + q \xi_{\sigma(i)} \xi_{\sigma(j)} - \xi_{\sigma(i)})}{(\xi_{\sigma(1)} - 1) \dots (\xi_{\sigma(1)} \dots \xi_{\sigma(k)} - 1)} = (-1)^k q^{k(k-1)/2} \frac{\prod_{i < j} (\xi_j - \xi_i)}{\prod_i (1 - \xi_i)} \quad (4.7)$$

を用いると (4.1) 式の c_k は

$$c_k = (-1)^k q^{k(k-1)/2} \int_{C_R} \dots \int_{C_R} d\xi_1 \dots d\xi_k \prod_{i < j} \frac{\xi_j - \xi_i}{p + q \xi_i \xi_j - \xi_i} \prod_i \frac{\xi_i^x e^{\varepsilon(\xi_i)t}}{1 - \xi_i} \\ \times \sum_{-\infty < y_1 < \dots < y_k < \infty} \frac{\langle \tilde{Q}_{y_1} \dots \tilde{Q}_{y_k} \rangle_0}{\xi_1^{y_1} \dots \xi_k^{y_k}} \quad (4.8)$$

という多重積分の形で書ける.

ASEP のカレントモーメントの多重積分表示は, [19] によって個々の初期条件に応じて得られている. 一方 (4.8) 式は任意の初期条件で成り立つ一般的な表式である.

5 おわりに

本稿では, 無限に伸びた 1 次元 ASEP におけるカレントモーメントを議論してきた. (4.1) 式および (4.8) 式のように多重積分表示で表わされることが分かった. カレントモーメントは ASEP の持つ $U_q(sl_2)$ 対称性 ((3.10) 式) の帰結として現れる双対性 ((3.11) 式) によって自然に導出される.

KPZ 方程式の場合 (1.4) 式を用いると, 高さの指数モーメントが行列式を用いて表わすことが出来, さらにこの量の母関数がフレドホルム行列式で表わされることが知られている [8, 9, 10]. 同様なことが ASEP の場合でも成り立つのだろうか? またこのような行列式構造の背後には自由フェルミオンの数理論が潜んでいることが示唆されるが, それと今回議論した双対性, あるいは $U_q(sl_2)$ 対称性はどのように関連しているのだろうか? これらの課題の解決のためには, 非線形波動等に代表される可積分系と確率論, 統計力学とのつながりが重要であると考えている.

参考文献

- [1] 西成活裕, 渋滞学, 新潮選書, 2007.
- [2] M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, 56: 889–892, 1986.
- [3] 本田勝也, フラクタル, 朝倉書店, 2002.
- [4] T. Sasamoto, H. Spohn, One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality, *Phys. Rev. Lett.*, 104, 230602, 2010.
- [5] T. Sasamoto, H. Spohn, Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition, *Nuc. Phys. B*, 834, 523–542, 2010.
- [6] T. Sasamoto, H. Spohn, The Crossover Regime for the Weakly Asymmetric Simple Exclusion Process, *J. Stat. Phys.*, 140, 209–231, 2010.

- [7] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1 + 1$ dimensions, *Com. Pure. Appl. Math.*, DOI: 10.1002/cpa.20347.
- [8] V. Dotsenko, Replica Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution of the free energy fluctuations in one-dimensional directed polymers, *J. Stat. Mech.*, P07010, 2010.
- [9] P. Calabrese, P. Le Doussal, A. Rosso, Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature, *Eur. Phys. Lett.*, 90, 20002, 2010.
- [10] 今村卓史, KPZ, δ -Bose gas and random matrices, 数理解析研究所講究録, 2011(to appear).
- [11] T. Imamura and T. Sasamoto, Current moments of 1D ASEP by duality, arXiv:1011.4588.
- [12] G. Schütz, Duality relations for asymmetric exclusion processes, *J. Stat. Phys.*, 86, 1265–1287, 1997.
- [13] 笹本智弘, 1次元非対称単純排他過程の厳密解, 物性研究, 79, 881–925, 2003.
- [14] T. Imamura and T. Sasamoto, A note on the transition probability of ASEP, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 2011 (to appear).
- [15] G. Schütz, S. Sandow, Non-Abelian symmetries of stochastic processes: Derivation of correlation functions for random-vertex models and disordered-interacting-particle systems, *Phys. Rev. E*, 49, 2726–2741, 1994.
- [16] 神保道夫, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.
- [17] G. Schütz, Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process, *J. Stat. Phys.*, 88, 427–445, 1997.
- [18] C. A. Tracy and H. Widom, Integral formulas for the asymmetric simple exclusion process, *Commun. Math. Phys.*, 279, 815–844, 2008.
- [19] C. A. Tracy and H. Widom, Formulas for ASEP with two-sided Bernoulli initial condition, *J. Stat. Phys.*, 140, 619–634, 2010.