

## 渦度の話 : その変化の仕組みと渦度力

増田, 章  
九州大学応用力学研究所

<https://doi.org/10.15017/23399>

---

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (15), pp.99-110, 2011-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8

「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

*Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by

*Kyushu University Global COE Program*

*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 15 (pp. 99 - 110)

# 渦度の話 — その変化の仕組みと渦 度力 —

増田 章 (MASUDA Akira)

(Received 14 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2011

# 渦度の話 - その変化の仕組みと渦度力 -

九州大学応用力学研究所 増田 章 (MASUDA Akira)

**概要** 流体力学では渦度変化の仕組みを渦線の傾きと渦線の伸長で説明する．海洋学や気象学でもこの説明を踏襲する．しかし実は剛体にかかる偶力に類した説明が可能である．本講演ではまず「渦度力」を導入する．渦度力とは局所併進自転系におけるコリオリ力に他ならない．そうして流体にかかる「渦度力の捻り」が渦度を変えると解釈する．この考え方は厳密で一般性を持ちしかも因果的なので，渦度発展の仕組みを無理なく直観的に理解できる．但し渦度力の捻り以外にも渦度を変えるものがある．そこで渦度発展の仕組みの全体像を直観的に分かり易い形で説明する．応用例として北半球の海洋の鉛直渦度の変化をもたらす仕組みを図解する．最後に傾圧捻りの意味および，その温度風平衡・ブシネスク流体近似との関係を明らかにする．

## 1 はじめに

海洋や大気の大規模な流れは準二次元であり水平流が卓越する．そのため鉛直渦度の力学が極めて重要になる．海や大気に限らず大抵の流れには渦度があり，渦度の制約が流れの様子を強く規定する．例えば，渦線の伸長を許さない非発散純二次元乱流ではエンストロフィーの制約が乱流の発展を支配する．鉛直渦度の力学が海洋大循環を支配することは言うまでもない．

渦度の発展は渦度方程式に従う．渦度方程式は確立している．式に従って計算すればおかしなことは起きない．ここで問題にするのはその物理である．式自体に疑問の余地はないが解釈に議論の余地がある．渦度の力学を可能な限り多様な仕方で深く理解することが望ましい．

通常の流体力学では渦度方程式を基に「渦線の傾きと渦線の伸縮が渦度を変える」と解釈する．この説明は決して分かり易いものではないのでここでは違う見方をとる．そのためにまず「渦度力」を明確に意味のあるものとして導入する．「渦度力による捻り」を考えれば自転系，慣性系を問わず渦度の発展を統一的に記述出来る．これを示すのが本講演の第一の目的である（渦線の傾きと渦線の伸縮という考え方を排するものではない）．渦度力が渦度を生み出すという解釈は渦度方程式ひいては流れの発展の仕方の明快な理解につながる．第二の目的は，渦度発展の仕組みの全体像を俯瞰しておくことである．例えば傾圧捻りについて明快な説明を見たことがない（私の知る範囲で）．また傾圧捻りとブシネスク流体近似についてはやや紛らわしい関係がある．こういったことについてもこの機会に説明を与えておきたい．要するに本稿の目的は，自然な形で渦度発展の仕組みを分かり易く説明することにある．そのために図解を多用し繰り返しをいとわない．

次節で従来の説明とその問題点を述べる．第三節で「局所並進自転系」と「渦度力による捻り」を導入し基礎づける．その際，自転系におけるコリオリ力（普通は質点系で導き，流体に拡張する）が流体（連続体）の基礎方程式から直接導けることも示す．第四節で，渦度力の捻りを主要項として含む渦度発展の仕組みの全体像を俯瞰する．傾圧捻りの意味や海洋循環における渦度の役割にも触れる．五節はまとめである．

## 2 問題は何か 渦度力とコリオリ力

馴染みの薄い話題と思われるので問題意識を明確に述べておきたい．運動量方程式は慣性系と自転系でそれぞれ

$$\frac{Du}{Dt} = F, \quad \frac{Du}{Dt} = u \times f + \frac{f^2}{4} x_{\perp} + F$$

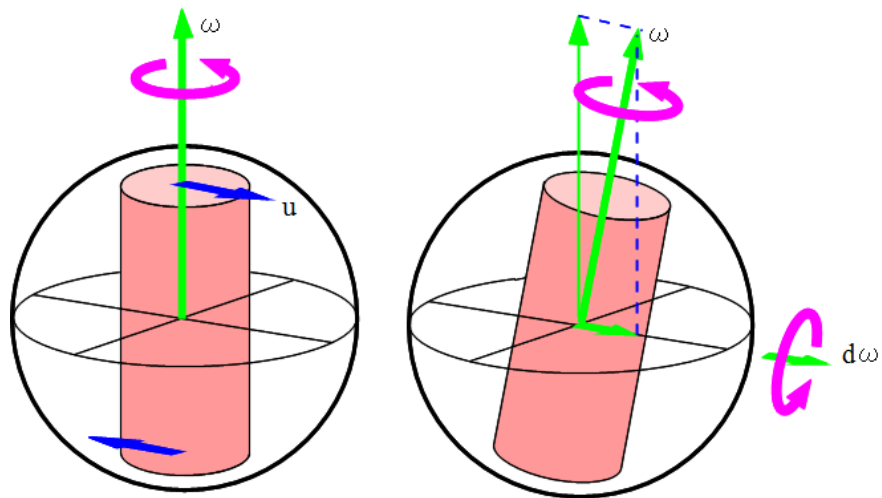


図 1: 従来の説明による渦度変化の仕組み その一  
鉛直の渦柱が東に傾く (左) と東向きの渦度成分が発生する (右) .  
これは渦度が渦糸に付随して動くからである .

となる .  $u$  は流速ベクトル ,  $f$  はコリオリ係数 ,  $x_{\perp} \equiv x - \frac{(x \cdot f)}{\|f\|^2} f$  は自転軸からの距離 ,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  は実質微分を表す . 圧力傾度力 , 粘性力 , 外力をまとめて  $F$  と書いた .  $F$  は以下の議論で本質的でないから , 以後は省略しよう (無視するのではない) .

一方 , 渦度方程式は慣性系と自転系でそれぞれ次のようになる .

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u - (\nabla \cdot u)\omega \\ \frac{D\omega}{Dt} = ([f + \omega] \cdot \nabla)u - (\nabla \cdot u)(f + \omega) \end{cases} \quad (2.1)$$

大抵の教科書では , オイラーの方程式から非自転系の渦度方程式 (2.1) を導き , これに基づいて右辺を次の様に説明する ([1][2]) . 時空の原点で上向きの渦度をもつとする (一般性を失わない) . 図 1 は , 剪断流で渦糸が傾くと , 渦度ベクトルも傾き , 傾いた向きの渦度が発生することを示す . 渦線が流体粒子に付着して動く (このことをまず非粘性・順圧の方程式で示しておかねばならない) からである . 図 2 には , 渦糸が伸びることで元の向きの渦度が大きさを増すことを示す . これは因果的説明というより結果の式からそうなっているということであり , その根拠として角運動量保存を持ち出す .

確かに , 渦度が渦糸に付随して動くという見方が Helmholtz の渦定理の導出には鍵になる ([3]) . また , 地球流体力学の標準的教科書でも渦度の発展・変化を説明するのに , 絶対渦度に戻って通常の流体力学風の説明をしている ([4]) . この見方がそれなりに有用であることは疑いないが , 分かり易くはない .

例えば渦度が渦糸に付随して動くには非粘性の順圧運動であり , 外力がないといった条件が必要である . 散逸があったり外力があったり傾圧性があるともう使えないという難がある . そういう場合はどう考えたらよいのだろうか . 要するに上の見方は保存性に基づく見方である . 直観にすんなり入るという概念ではない . これに比べると , 流体に働く外力に回転 (rot) があれば , 外力の捻りとして渦度が変化するというのは分かり易い . そういう因果性の明らかな説明はできないのだろうか .

因果性を明らかにし汎用性をもたせるという意味ではこれから説明していく「渦度力の捻り」と

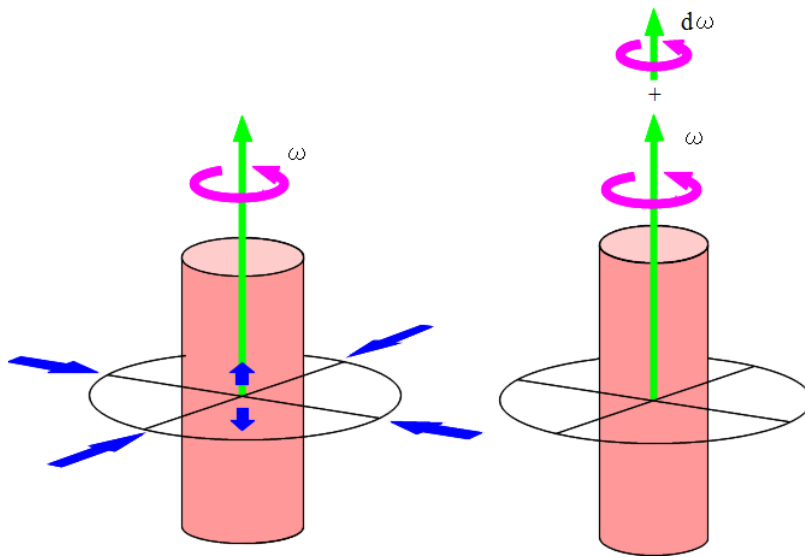


図 2: 従来の説明による渦度変化の仕組み その二  
 渦柱が縦に伸びると(左), 渦度が強まる(右).  
 これは角運動量の保存による.

いう考え方が良いように思う. 結論から言えば 図 3 がその図解である. 左が図 1 に, 右が図 2 に対応する. この場合, 原点の渦度  $\omega$  に比例し, 流速に比例する「渦度力」 $\mathbf{u} \times \omega$  が, 近傍の流体に加わるということを認める. そうすると, 渦柱を東側に傾ける剪断流になっている場合, 渦度力の捻りが偶力を生み出し東向きの回転を引き起こすことは明らかである. 同様に, 渦柱が縦に伸びるということは, 周りから流体が収束してくることだから, 水平収束する流れがある. この流れにかかる渦度力は元の渦度  $\omega$  を強める向きの偶力を生み出す. こうして, 渦度力の捻る力(偶力)が渦度(自転)を生み出すという, 分かり易い因果的な説明が与えられる. 難しい概念はひとつもない. 渦度が流体に付随して動くという必要もない. だから粘性やそのほかの外力があってもよい. 但し「渦度力の捻り」が本当の「力の捻り」かとなると俄には判断しにくい. それは以下の事情があるからである.

自転系では  $\omega + f$  を絶対渦度と呼ぶ. 自転系の渦度方程式 (2.1) 右辺に現れた  $f$  の項は

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{f} \quad (2.2)$$

から生じる. これは流速に掛かる「コリオリ力」の回転をとったものである. 自転系ではコリオリ力と遠心力を立派に実在する力として扱っている. 渦度方程式右辺の  $\omega$  の項は  $f$  の項と全く同じに見える. にもかかわらず, これらの項を「渦度力  $\mathbf{u} \times \omega$  の捻り」と見ることはない. 多くの教科書で全くの別物として扱う. それは理由のないことではない. 運動量方程式を

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{u} + \nabla \frac{u^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{u} \times \omega - \nabla \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と書き直したとき, (2.3) の右辺の第一項  $\mathbf{u} \times \mathbf{f}$  を流速に掛かる「渦度力」( $\rho$  は置く)と考えようとしている. しかし, これは連続体である流体の変形が見かけ上現れた項である. 運動量方程式において左辺を局所時間微分にしたときに出て来るが, 実質微分の形で現れるものではない. だ

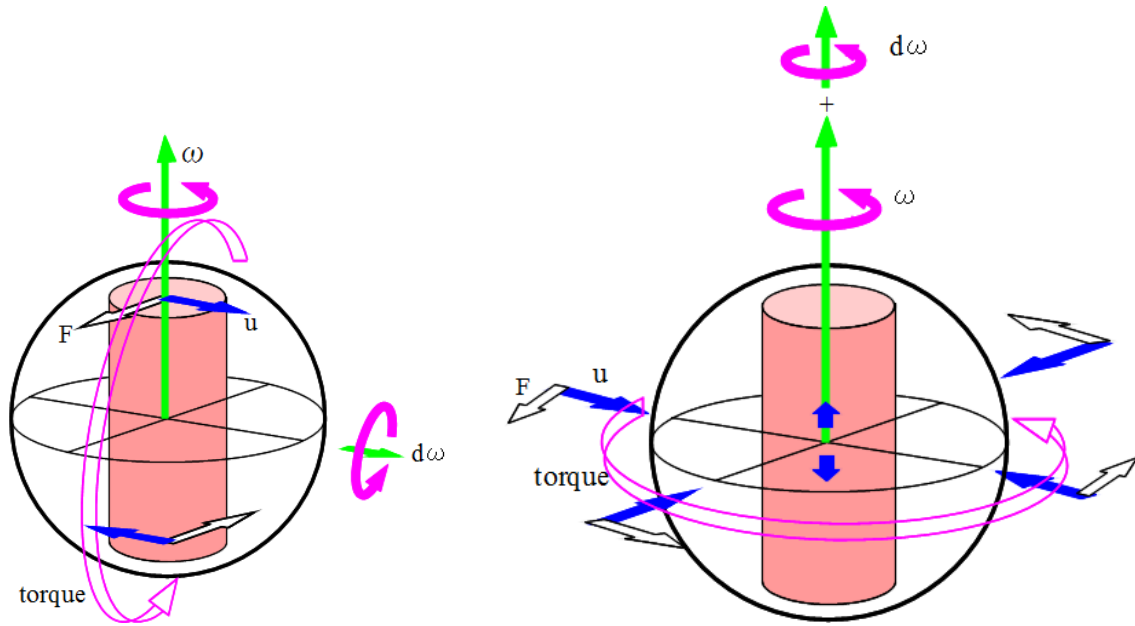


図 3: 渦度力の捻りで渦度が生じるとする説明

- (左) 鉛直渦柱を東に傾けるような剪断流に，渦度力が働いて東向き渦度を作る
- (右) 渦柱に水平収束があると渦度力による捻りで渦度が強まる

から運動量方程式 (2.3) で  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  を，コリオリ力と同じ力と考えるはならない．同じようにこの項を質点の力学に還元することは出来ない．

この形のまま渦度力  $\mathbf{u} \times \mathbf{f}$  の捻りを渦度の成因を与えるというのにも問題がある．回転をとると

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega}$$

となり，渦度方程式の右辺以外にもう一つの項が現れる．これは左辺に持っていき渦度の移流 (非線形項) として実質微分書き換えるべき項である．この二つの理由 (互いに関係している) のために， $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  を単純に力 (「渦力」) と考えることはない．

しかし，最終的な渦度方程式の形で言えば，渦度力はコリオリ力と同様な働きをしている．渦度力の捻りが渦度を変えるという解釈は間違いだろうか．いや，自転系，非自転系を問わず，渦度方程式において「渦度力」を考えると渦度力の捻りが渦度を変えていく要因であるという解釈が出来る．それを次節で示そう．

### 3 渦度力の捻りの基礎付け

#### [3.1] 局所並進自転座標系

ある時刻  $t_0$ ，ある地点  $\mathbf{x}_0$  にのみ着目する．その時刻，場所における流速を  $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$ ，渦度を  $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0, t_0)$ ，としよう．一般性を失うことなく  $t_0 = 0$ ， $\mathbf{x}_0 = 0$  としよう．

静止系 (慣性系) から見て  $\mathbf{u}_0$  で並進する点を空間座標原点とし，その周りを角速度  $\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}$  で自転する座標系を局所並進自転系と呼ぶことにしよう．局所並進自転系に関する量には  $\tilde{\cdot}$  を付ける．その位置ベクトルは

$$\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{u}_0 t,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\parallel} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\omega}_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|^2} \boldsymbol{\omega}_0 \quad \tilde{\mathbf{x}} \text{ の } \boldsymbol{\omega}_0 \text{ への射影}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\perp} \equiv \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_{\parallel}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \text{ の } \boldsymbol{\omega}_0 \text{ への垂影}$$

となる．また

$$U = U(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{u}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \tilde{\boldsymbol{x}}$$

は， $\boldsymbol{u}_0$  で並進しつつ  $\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}$  の角速度で  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_0 t = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_0(t - t_0)$  の周りを回転する動き（静止系で見ても）を表す．

$$\nabla \cdot U = 0, \quad \nabla \times U = \boldsymbol{\omega}_0$$

は明らかである．場  $\bullet$  を  $U$  に乗って動きながら見るときの時間変化は  $U$  を流速場とする実質微分のことだから

$$\frac{D_0 \bullet}{D_0 t} \equiv \frac{\partial \bullet}{\partial t} + U \cdot \nabla \bullet \quad (3.1)$$

と表わされる．

さてベクトルの成分表現には基底を用いる．静止系ではデカルト座標に準拠し  $\{\hat{\boldsymbol{d}}_i \mid i = 1, 2, 3\}$  を正規直交基底とする．これは何処でもどの時刻でも同じである．

これに対し  $\{\hat{\boldsymbol{k}}_i \mid i = 1, 2, 3\}$  で局所並進自転系の正規直交基底を表す．この基底は二つの意味で変化する．一つは，場所  $\tilde{\boldsymbol{x}}$  に依存する（しなくても良い）ことである．例えば地球座標系なら，東向き  $\hat{\boldsymbol{k}}_x = \hat{\boldsymbol{k}}_1$ ，北向き  $\hat{\boldsymbol{k}}_y = \hat{\boldsymbol{k}}_2$ ，上向き  $\hat{\boldsymbol{k}}_z = \hat{\boldsymbol{k}}_3$  という基底ベクトルが  $\tilde{\boldsymbol{x}}$  に依存して変化する．また同じ  $\tilde{\boldsymbol{x}}$  でも， $\{\hat{\boldsymbol{k}}_i \mid i = 1, 2, 3\}$  は時間とともに角速度  $\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}$  で回転する（静止系で見ても）．数式で表すと

$$\frac{D_0 \hat{\boldsymbol{k}}_i}{D_0 t} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \hat{\boldsymbol{k}}_i \quad (3.2)$$

となる．任意のベクトル場  $\boldsymbol{v}$  は，静止系と並進自転系の正規直交基底を用いて

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i v_i(\boldsymbol{x}, t) \hat{\boldsymbol{d}}_i = \sum_i \tilde{v}_i(\tilde{\boldsymbol{x}}, t) \hat{\boldsymbol{k}}_i(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)$$

と二通りに表すことができる．

局所並進自転系で定義する流速・渦度・発散は静止（慣性）系で定義する流速・渦度・発散と次のような関係にある．

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv \boldsymbol{u} - U, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \nabla \times \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0, \quad \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

局所並進自転系では当該時刻  $t = 0$  に原点  $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$  で

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

である．

スカラー場  $\bullet$  に対する局所並進自転系における時間微分は

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{t}} \equiv \frac{D_0 \bullet}{D_0 t} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \bullet \quad (3.3)$$

としなければならない．次にベクトル場に対する並進自転系における局所時間微分を定義しよう．ベクトル場  $\boldsymbol{v}$  を  $U$  の速度で移動しながらみる時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{D_0 \boldsymbol{v}}{D_0 t} &= \frac{D_0}{D_0 t} \left( \sum_i \tilde{v}_i \hat{\boldsymbol{k}}_i \right) = \sum_i \frac{D_0 \tilde{v}_i}{D_0 t} \hat{\boldsymbol{k}}_i + \sum_i \tilde{v}_i \frac{D_0 \hat{\boldsymbol{k}}_i}{D_0 t} = \sum_i \frac{D_0 \tilde{v}_i}{D_0 t} \hat{\boldsymbol{k}}_i + \sum_i \tilde{v}_i \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \hat{\boldsymbol{k}}_i \\ &= \sum_i \frac{D_0 \tilde{v}_i}{D_0 t} \hat{\boldsymbol{k}}_i + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

となる．局所並進自転系ではベクトルの時間微分を

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} \equiv \sum_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} \hat{\mathbf{k}}_i = \sum_i \frac{D_0 \tilde{v}_i}{D_0 t} \hat{\mathbf{k}}_i \quad (3.4)$$

と定義する．即ち

$$\frac{D_0 \mathbf{v}}{D_0 t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} \equiv \frac{D_0 \mathbf{v}}{D_0 t} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v} \quad (3.5)$$

と定義することになる．これで正しいことは例えば静止系から見て不動のベクトル  $\mathbf{a}$  を局所並進自転系で見るとどうなるかを考えれば分かる． $\frac{D_0 \mathbf{a}}{D_0 t} = 0$  だが， $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{a}$  となる．つまり  $-\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2}$  の角速度で回転している．これは観測者の目線が回転しているからである．

### [3.2] 流体力学から質点系のコリオリ力と遠心力を導く

スカラー場の実質微分を静止系と並進自転系の二つで次のように定義する．

$$\frac{D \bullet}{Dt} \equiv \frac{\partial \bullet}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \bullet, \quad \frac{D \bullet}{D\tilde{t}} \equiv \frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bullet$$

これはどちらの系でも同じでなければならない．実際

$$\begin{aligned} \frac{Dc}{D\tilde{t}} &= \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)c = \frac{D_0 c}{D_0 t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)c = \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)c + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)c = \frac{\partial c}{\partial t} + [\mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}] \cdot \nabla c \\ &= \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \frac{Dc}{Dt} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となることが確認できる．同様に，ベクトル場  $\mathbf{v}$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{D\tilde{t}} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{D_0 \mathbf{v}}{D_0 t} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + ([\mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}] \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.7)$$

を得る．スカラー場と異なり，ベクトル場の実質微分は静止系と局所並進自転系で異なる．  
ところで  $\mathbf{U}$  は並進に円運動が加わったものだから

$$\frac{D_0 \mathbf{U}}{D_0 t} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_0^2}{4} \tilde{\mathbf{x}}_{\perp}$$

であり(向心力を表す)，また

$$(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{U} = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \frac{\boldsymbol{\omega}_0 \times \tilde{\mathbf{x}}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \tilde{\mathbf{u}}$$

でもあるので

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{D_0 \mathbf{U}}{D_0 t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_0^2}{4} \tilde{\mathbf{x}}_{\perp} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

となる．

(3.7)，(3.8)を用いると流速ベクトル場  $\mathbf{u}$ ， $\tilde{\mathbf{u}}$  に対して

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} + \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\boldsymbol{\omega}_0^2}{4} \tilde{\mathbf{x}}_{\perp} + \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{2} \times \tilde{\mathbf{u}} = \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{\boldsymbol{\omega}_0^2}{4} \tilde{\mathbf{x}}_{\perp} \quad (3.9)$$



を得る．右辺第二項がコリオリ力，第三項が遠心力を表す．但し符号は逆になっている．普通は，コリオリ力と遠心力を質点の力学で導出し，その力を流体の力学に加える．ここでは，逆に連続体である流体力学の方程式からコリオリ力と遠心力を導くことができることを示した．(2.3) と異なり，これは実質微分の形なので，質点の力学に戻ることができる．則ち自転系の質点の運動にはコリオリ力と遠心力が働く．勿論，自転系での渦度方程式 (2.1) が再びこの式から得られる．

### [3.3] 渦度方程式における渦度力の捻りの基礎付け

ここまで準備しておけば後は殆ど自明であろう．当該時刻  $t = t_0$ ，場所  $x = x_0$  に対応する局所並進自転座標系を定義し，その原点  $\tilde{x} = 0$  で

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= \frac{D(\omega_0 + \tilde{\omega})}{Dt} = \frac{D\tilde{\omega}}{Dt} = \frac{D\tilde{\omega}}{D\tilde{t}} + \frac{\omega_0}{2} \times \tilde{\omega} && \Leftarrow (3.7) \\ &= \frac{D\tilde{\omega}}{D\tilde{t}} && \tilde{\omega}(0,0) = 0 \\ &= (\tilde{\omega} \cdot \nabla) \tilde{u} - (\nabla \cdot \tilde{u}) \tilde{\omega} + (\omega_0 \cdot \nabla) \tilde{u} - (\nabla \cdot \tilde{u}) \omega_0 && \Leftarrow \text{自転系での渦度方程式から} \\ &= (\omega_0 \cdot \nabla) \tilde{u} - (\nabla \cdot \tilde{u}) \omega_0 && \tilde{u}(0,0) = 0, \quad \tilde{\omega}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

となる．残った「捻る力」は，局所並進座標系において明確に定義できるコリオリ力の捻りに起因する． $\omega_0$  の添字 0 が局所並進自転系のコリオリ力に基づくことを示している．流体変形からくる曖昧な項の寄与は一つもない．この式が成り立つのは  $(x_0, t_0)$  だけであることは注意を要する．容易に分かるように，当該時空点  $x = x_0, t = t_0$  では

$$\begin{aligned} &(\omega_0 \cdot \nabla) \tilde{u} - (\nabla \cdot \tilde{u}) \omega_0 \\ &= (\omega_0 \cdot \nabla) \left[ \mathbf{u}_0 + \frac{\omega_0}{2} \times \tilde{x} + \tilde{u} \right] - \left( \nabla \cdot \left[ \mathbf{u}_0 + \frac{\omega_0}{2} \times \tilde{x} + \tilde{u} \right] \right) \omega_0 = (\omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \omega_0 \end{aligned}$$

と書き換えられる．即ち

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \omega_0 = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \omega \quad (3.10)$$

として良い． $(x_0, t_0)$  はどこでもよいが，評価したい当該点での  $\omega, \mathbf{u}$  と同じに決まっているので添字を外せるからである．この議論により，素性の確かなコリオリ力の捻りが渦度方程式の右辺を作ることが分かる．即ち，コリオリ力と同等の「渦度力」の捻りが右辺を与えると考えてよい．

## 4 渦度発展の仕組みの全体像 渦度力の捻りを中心に

前節で第一の目的は済んだ．本節では，これまで省略してきた項を含めた完全な渦度方程式

$$\frac{D\omega}{dt} = \underbrace{(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \omega}_{\text{渦度力の捻り}} + \underbrace{\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}}_{\text{傾圧捻り}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{F}}_{\text{その他の力の捻り}} \quad (4.1)$$

を基に渦度発展の仕組みの全体像を図解と併せて確認していく．ここで  $\mathbf{F}$  は粘性力と外力を表す．

### [4.1] 渦度力の捻り

渦度力の捻りが本稿の主題であった．当該時刻，当該点で  $\omega = (0, 0, \omega)$ ， $\mathbf{u} = (u, v, w)$  なる座標系で見ると

$$(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \omega = \omega \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{d}}_x + \omega \frac{\partial v}{\partial z} \hat{\mathbf{d}}_y - \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{d}}_z \quad (4.2)$$

と書ける．ここで  $\omega \equiv \|\omega\|$  であり， $\hat{d}_x, \hat{d}_y, \hat{d}_z$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルを表す．(4.2) 右辺の第一項と第二項が原点における渦度と直交する方向の渦度成分を生成し (図 3 左)，第三項が渦度と平行な方向の渦度成分の生成を表す (図 3 右)．直感で言っても，これらが渦度力  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  ( $\boldsymbol{\omega}$  を当該点の値に固定してコリオリ力のように見る) による捻りに相当することは明らかであろう．即ち地球流体力学をそのまま当てはめて良い．また

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \equiv \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

と書けば，渦度力の捻りだけで生じる渦度変化が

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} &= \frac{D(\omega \hat{\boldsymbol{\omega}})}{Dt} = \omega \frac{D\hat{\boldsymbol{\omega}}}{Dt} + \frac{D\omega}{Dt} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ \frac{D\hat{\boldsymbol{\omega}}}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial z} \hat{d}_x + \frac{\partial v}{\partial z} \hat{d}_y \quad (\perp \boldsymbol{\omega}), \quad \frac{D\omega}{Dt} = \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

というように渦度ベクトルの向きと大きさの変化に分解できる．

なお，非圧縮流では

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \omega \frac{\partial u}{\partial z} \hat{d}_x + \omega \frac{\partial v}{\partial z} \hat{d}_y + \omega \frac{\partial w}{\partial z} \hat{d}_z$$

と書くことが多い．通常の流体力学にいう  $\hat{d}_z$  成分が「渦線の伸長」を表すという表現では  $\frac{\partial w}{\partial z}$  なる見方を取っている． $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  を用いて

$$\omega \frac{\partial w}{\partial z} = -\omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

とすれば，水平発散に働く渦度力の捻りと見ても良いことが分かる．つまり非圧縮流なら渦系の伸長でも渦度力の捻りでも変わらない．しかし圧縮流だと  $\hat{d}_z$  成分の由来が曖昧になる．渦線の議論では回りくどい説明になりそうである．その点，渦度力の捻りという解釈なら簡明であり，圧縮・非圧縮流を問わず，また粘性ほかの力があってもそのまま通用する．なお渦度力の捻りでは  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$  を当該点の値に固定して考えるので，渦度力はあくまで  $\boldsymbol{\omega}_0$  に垂直な向きにしか働かない．

(4.2) 右辺第一項と第二項は，後述する温度風の関係 (図 6) で温度の水平勾配から生じる傾圧捻りに釣り合うコリオリ力の捻り (水平流の鉛直剪断による) に関係する．第三項は地球流体でも，渦柱伸縮で解釈することが多いが，水平発散に働く渦度力の捻りと考える方が分かり易いだろう．

#### [4.2] 傾圧捻りとそのほかの力の捻り

(4.1) 第三項が傾圧捻りを表す．私自身は「傾圧捻り」を分かり易く説明した文献を見たことがない．しかし，その意味を理解するには「渦度とは流体粒子の局所的自転角速度の二倍」ということを思い出せばよい． $-\nabla p$  という応力で押される球状の流体粒子を考えたとき， $-\nabla p$  が一様でも  $\rho$  が場所により違えば加速度も場所により異なる．則ち  $\rho$  の大きい側の  $-\nabla p$  方向の加速は小さい．加速度が異なれば自転角速度が変化する．即ち渦度を増減する (図 4)．傾圧捻り以外の渦度発生要因では  $\rho$  の変化を無視してきたが，傾圧捻りの場合は  $\rho$  の非一様性が大事になる． $\nabla p \parallel \nabla \rho$  なら自転加速度に違いが生じないことも図解から自明であろう．渦度の発展方程式では「渦度力の捻り」より「渦度力に伴う加速度の捻り」と呼ぶ方が正確だからである．

(4.1) 第四項がそのほかの力の捻りを表すがこれは自明であろう．偶力そのものである．

#### [4.3] 海洋における鉛直渦度の生成要因三種

## vorticity generation by baroclinicity

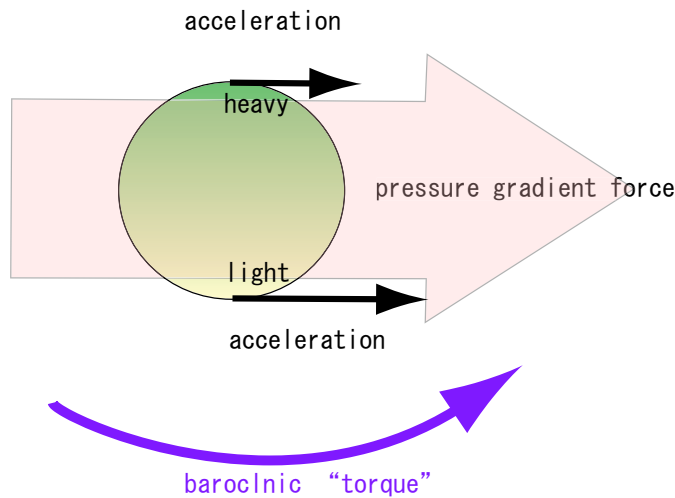
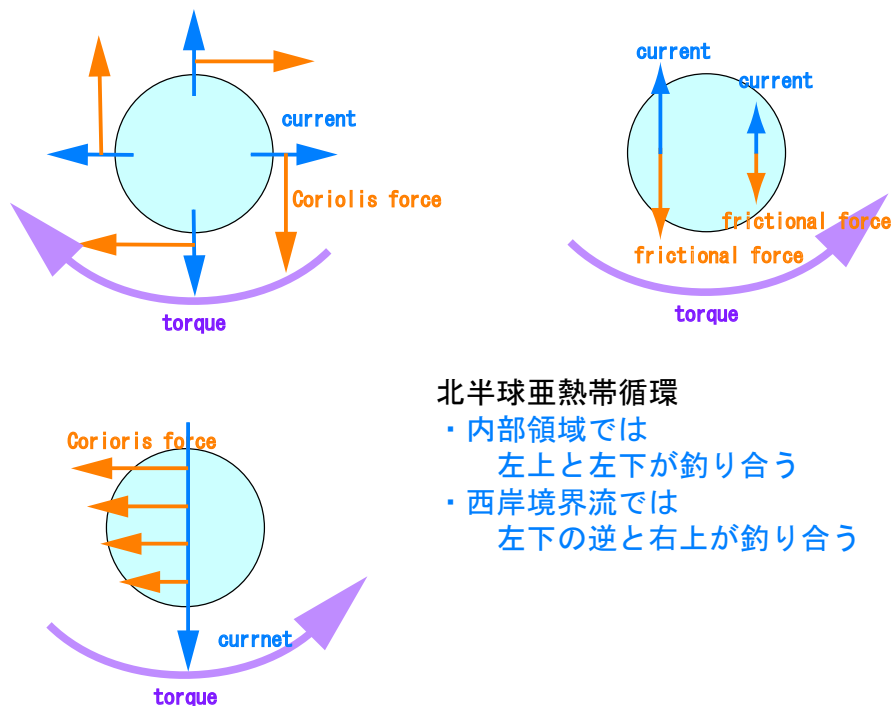


図 4: 傾圧捻り: 圧力傾度が一樣でも密度が一樣でないなら加速度に違いが出て流体粒子の自転を増減させる。

応用として渦度の観点から海洋大循環の力学を概観する。まず海水の大規模な運動とその力学の基本事項を簡単にまとめておく。太平洋の東西幅 1 万 km に比べて、海の深さは 5km 程度しかない。そして、ある場所での圧力はその上に乗っている流体全ての重みにほぼ等しい。則ち「静水圧近似」が精度良く成り立つ。鉛直方向の圧力勾配は重力と釣り合うのである。また、地球は自転しており慣性系でないので、コリオリ力が働く。大規模でゆっくりした流れでは、水平方向の圧力勾配とコリオリ力の水平成分が釣り合う。この関係を「地衡流平衡」と呼ぶ。これによれば高压側から低压側に押された海水は北(南)半球で右(左)方向に曲げられている。縦横比が小さく水平運動が卓越し地球が自転しているために、水平運動の持つ渦度(「鉛直渦度」というが、渦度とか相対渦度ともいう)が極めて重要な量になる。自転している地球と一緒に動く水も慣性系から見れば自転しており慣性系から見た渦度をもともと持っている。これを惑星渦度と言い自転軸と平行なベクトル量である。但し普通はその鉛直成分を単に「惑星渦度」と呼び  $f$  と表す。 $f$  をコリオリ係数と呼ぶことも多い。コリオリ係数  $f$  は地球が丸いため緯度に依存する。絶対値は極近くで大きく南北両半球で符号が逆で赤道では無くなってしまふ。惑星渦度の緯度による違いが大規模現象を制御する効果は絶大である。 $\frac{df}{dy}$  を  $\beta$  と表すので「 $\beta$  効果」と称する。

さて、北太平洋の内部領域(風応力を直接受ける海面付近を除く)にある海水の(相対鉛直)渦度を変えるものが三種ある(図 5)。この三種の捻る力を理解すれば、海洋大循環といわれる大規模な流れを維持する仕組みを概略理解できる。一つ目は水平発散(収束)である。実際、海面を吹く風が海面エクマン層の動きを介して亜熱帯表層の海水に水平発散を強制することが知られている。この時水は縦に縮む(伸びる)。水の自転半径が増加(減少)すれば自転角速度が減少(増加)する理屈である。これを「渦柱伸縮による渦度生成」と呼ぶことが多いが、本稿の趣旨だと水平発散に働く渦度力の捻りと呼ぶ方が良い。二つ目は摩擦ないし粘性である。これは「そのほかの力の捻り」に分類してきた。大規模運動では特殊な海域(陸岸近くなど)を除いて小さい。

上の二つが流体一般の渦度生成項であるのに対し、三つ目は惑星(自転する球面上の系)に特有なベータ効果による。南北流に懸かるコリオリ力が、高緯度ほど大きい(コリオリ係数  $f$  が高緯度ほど大きい)ので捻りを生じる(図 5)。注意して欲しいのは、ベータ効果というのが既に列挙した渦度生成要因にはなかったことである。読者にはその起源を考えて見られるとよい。なお東西流



### 北半球亜熱帯循環

- ・ 内部領域では  
左上と左下が釣り合う
- ・ 西岸境界流では  
左下の逆と右上が釣り合う

図 5: 北半球の海水に懸かる捻る力三種: いずれも鉛直上側から見ている  
 (左上) 水平発散に懸かるコリオリ力が時計回りに捻る,  
 (右上) 西側ほど速い北上流に、摩擦力が働いて反時計回りに捻る  
 (左下) 南向きの流れにベータ効果が働いて反時計回りに捻る  
 鉛直渦度を生みだす捻る力である。

だとベータ効果による捻る力が生じない。それは図 6 と同様の図を描けば明らかである。

ゆっくりした海洋定常循環では鉛直渦度が増減しない。それは、渦度を変える要因であるこの三者が釣り合い

$$0 \approx \underbrace{-\beta v}_{\beta \text{ 効果による捻り}} - \underbrace{f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{水平発散に働く渦度力の捻り}} + \underbrace{\nabla_H \times \text{摩擦力}}_{\text{摩擦力の捻り}} \quad (4.3)$$

を満たすからである。西岸付近 (西岸境界相) 以外なら摩擦項を除いても大差ない。

#### [4.4] 温度風平衡、傾圧捻りとブシネスク近似

海の大規模な流れでは鉛直渦度が問題になると述べてきた。最後に水平渦度に関する話しを一つしておく。水平方向に密度差があると、静水圧の関係から、圧力勾配の水平成分が上下で違ってくる。つまり地衡流も上下に差が出る。これを気象では「温度風の関係」と呼ぶ。実際、例えば南側に軽い水があると南側の浮力が強いので捻る力が生じる (図 6 左)。一方東向流にも鉛直差があり、これに働くコリオリ力の上下差で捻る力が生じる (図 6 右)。これが (4.2) 右辺第一・二項 (図 1 または図 3 左) にほかならない。こうして浮力の捻る力とコリオリ力の捻る力が釣りあう。

ところでこの説明では浮力が外力となって捻る力の実体になっている。浮力は海水密度にかかる重力からくる。重力は確かに外力だが捻る力にはならない。ポテンシャル力なので回転をとれば消えるからである。とすれば浮力が「捻る力」を生むというのは不思議に見える。実は「浮力の捻り」とは「傾圧捻り」が Boussinesq 流体近似の下で「外力の捻り」に形を変えたものなのである。やや紛らわしいので少し丁寧に説明しよう。

# Thermal-wind balance

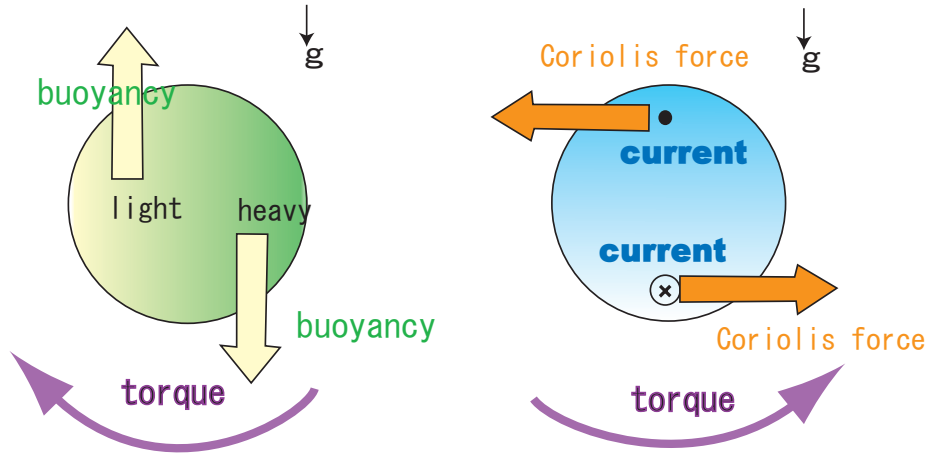


図 6: 北半球の温度風平衡: 捻る力の釣り合いを東から見る .

(左) 南側ほど浮度が大きいと時計回りに捻る力が働く .

(右) 上側ほど東向きの流れが大きいとコリオリ力が反時計回りに捻る .

この二つが釣り合う状態を温度風平衡と呼ぶ . 水平渦度の釣り合いを表す .

ブシネスク近似では密度  $\rho$  がほぼ一定値  $\rho_0$  をとるものとする . 従って慣性としての密度の違い  $\rho_1 \equiv \rho - \rho_0$  を無視できるし  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  も満たす . 但し重力加速度  $g$  が極めて大きいので , いくら小さくても僅かな密度差  $\rho_1$  による重力の違いが無視できない . そのため , 密度と別の物性である「浮度」  $b$  を海水が有し , 浮度 (普通浮力と呼ぶ . 温度に擬えて浮度と呼んだ) に比例する上向きの力が働くと考える . 浮度を電荷 , 電場が上向きというようなものを想定すればよい . こうして浮度に懸かる擬似外力の捻りが現れる . 図 6 はこの考え方を示している .

傾圧捻りが浮度の捻りの起源であることを以下で確認しよう .  $\hat{z}$  を鉛直上向きの単位ベクトル ,  $\bar{\bullet}$  を “ $\bullet$ ” の水平平均 (時間平均も) とし ,  $\bullet'$  で水平平均からのずれを表すとして

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, z, t) = \rho_0 + \bar{\rho}_1(z) + \rho_1'(\mathbf{x}, z, t) \quad \text{但し } \rho_0 = \text{const.} \quad \frac{|\rho_1|}{\rho_0} \ll 1.$$

$$p = \bar{p}(z) + p_1'(\mathbf{x}, z, t) = p_0(z) + \bar{p}_1(z) + p_1'(\mathbf{x}, z, t)$$

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}, \quad \nabla \bar{p}_1 = \bar{\rho}_1 \mathbf{g}, \quad \nabla \bar{p} = \bar{\rho} \mathbf{g} \quad (\mathbf{g} \equiv -g \hat{z})$$

を満たすように諸量を定義する . また「浮度」なる物性を次式で定義する .

$$b \equiv -\frac{\rho_1}{\rho_0} g = -\frac{\bar{\rho}_1 + \rho_1'}{\rho_0} g = -\frac{\bar{\rho}_1}{\rho_0} g - \frac{\rho_1'}{\rho_0} g = \bar{b}(z) + b'(\mathbf{x}, z, t).$$

Boussinesq 近似とは ,  $g \rightarrow \infty$  ,  $\frac{\rho_1}{\rho_0} \rightarrow 0$  だが  $|b| = g \left| \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| = O(1)$  とした極限を表し ,

(1) 連続の式 :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho_1}{Dt} \approx 0$  : 非圧縮流体 .

(2) 運動量方程式右辺 :  $g - \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\rho g - \nabla p}{\rho} = \frac{\rho_1 g - \nabla p_1}{\rho_0 + \rho_1} \approx \frac{\rho_1}{\rho_0} g - \frac{\nabla p_1}{\rho_0} = b \hat{z} - \frac{\nabla p_1}{\rho_0}$   
 $b \hat{z}$  が浮度  $b$  にかかる浮力 (擬似外力) を表す .  $g$  はこの段階で消える .

(3) 浮度方程式 :  $\frac{Db'}{Dt} = -w \frac{d\bar{b}}{dz} + \dots$  .

となる．このとき，近似運動量方程式から導いた渦度方程式では．

$$\nabla \times \left( b\hat{z} - \frac{\nabla p_1}{\rho_0} \right) = \nabla b \times \hat{z} = \nabla b' \times \hat{z} \quad (4.4)$$

と擬似外力の捻りを陽に表す．一方，元来の渦度方程式の近似では

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( g + \frac{(-\nabla p)}{\rho} \right) &= \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} = \frac{\nabla(\bar{\rho} + \rho'_1) \times \nabla(\bar{p} + p'_1)}{\rho_0^2(1 + \rho_1/\rho_0)^2} \approx \frac{\nabla \rho'_1 \times \nabla \bar{p}}{\rho_0^2} \\ &\approx \frac{\nabla \rho'_1 \times \rho_0 g}{\rho_0^2} \approx \nabla b' \times \hat{z} = \nabla b \times \hat{z} = \nabla \times (b\hat{z}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる．確かに(4.4)は(4.5)と一致し，浮力の捻りの起源は傾圧捻りにある．また，浮力は上向きの力なのでその捻りが水平渦度しか作らないことも分かる．

## 5 おわりに

自転系・非自転系を問わず渦度の発展を統一的に記述するのに有用な「渦度力の捻り」なる概念を導入した．渦度力とは，時空点ごとの局所並進自転系におけるコリオリ力に他ならない．コリオリ力が実在するなら渦度力も同じく実在する．但し渦度力はず直感によるものなので超関数や複素数がそうだったように紛らわしい所があった．本稿の議論で「渦度力による捻り」という概念を厳密に基礎づけることができた．

要点を列記すると以下ようになる．

- ・時空点ごとに定義した局所並進自転座標系を用いて渦度力を基礎付けることができる．
- ・通常，質点系の運動方程式から導くコリオリ力と遠心力は，連続体である流体の運動方程式からも導かれる．
- ・渦度方程式において「渦度力  $u \times \omega$  の捻り」という概念は「コリオリ力の捻り」と同等の根拠を持つ．
- ・従来「渦線が傾く」ことで生じると説明されてきた渦度生成は温度風関係に現れる水平渦度形成力と解してよい．即ち水平流の鉛直勾配に働く渦度力の捻りと見て良い．また「渦線伸長」で生じるとされてきた渦度生成は水平発散に働く渦度力の捻りと読める．
- ・傾圧捻りは，圧力勾配が力として働くときに，密度の違いが加速度の捻りとなって現れる．
- ・浮力の捻りは傾圧捻りが形を変えた物であり，水平方向の渦度のみ生成する．

分かり易さを心がけたので説明がくどくなっただかもしれない．一方で，ベータ項の由来，発散方程式における渦度力の効果，傾圧ロスビー長波から孤立波様挙動が現れる仕組みなど，講演の折に言及はしたがここに書ききれなかった項目も多い．残した話題は別の機会・論文に譲る．

## 参考文献

- [1] Batchelor, G. K.: "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press (1967), 615 pp.
- [2] 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編: "地球環境を学ぶための流体力学", 成山堂書店 (2001), 323 pp.
- [3] 今井功: "流体力学 (前編)", 裳華房 (1973), 428 pp.
- [4] Pedlosky, J. P.: "Geophysical Fluid Dynamics", Springer-Verlag (1987), 710 pp.