超可積分なマイナス２次の同次式ポテンシャル系

吉田, 春夫
国立天文台・理論研究部

https://doi.org/10.15017/23396

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (12), pp.82-86, 2011-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 12 (pp. 82 - 86)

超可積分なマイナス２次の同次式ポテンシャル系

吉田　春夫（YOSHIDA Haruo）

（Received 15 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

超可積分なマイナス２次の同次式ポテンシャル系

国立天文台・理論研究部　吉田春夫　(YOSHIDA Haruo)

概　要　同次式ポテンシャル系が超可積分となるための必要条件が Maciejewski et al. (2008) によって得られた．この必要条件は同次式ポテンシャルの次数 k が $k = 2$ 及び $k = -2$ のとき特別な形をとる．ここではこの必要条件を特殊な方法で満足する, マイナス 2 次の同次式ポテンシャルの系列を導出する．この系列は 3 粒子 Calogero-Moser 系を一般化したもので，実際に超可積分であることが示される．

1　超可積分系とは

自由度 n のハミルトン系において n 個の包合系をなす独立な第１積分が存在するとき，系は**可積分**と呼ばれる．可積分系においては一般にエネルギー曲面がコンパクトならば，解は n 次元トーラス上の準周期運動となることが知られている．可積分系のなかでさらに $n-1$ 個の独立な第１積分を持つものは**超可積分系**（super-integrable systems）と呼ばれる．超可積分系においては $2n$ 次元の相空間に $2n-1$ 個の独立な第１積分が存在することから，有界な軌道はケプラー問題における楕円軌道のように全て周期軌道となる．自由度１のハミルトン系は常に可積分であり超可積分でもある．自由度２のハミルトン系ではハミルトニアン以外の第１積分が１つ存在すれば可積分，２つ存在すれば超可積分となる．

超可積分系の代表的な例としてはケプラー運動 (平面，空間，n 次元)，等方調和振動子，Calogero-Moser 系等が知られている．超可積分ではない通常の可積分系の例としては振動数比が無理数の２次元調和振動子，一般の中心力場における質点の運動等がある．

2　マイナス２次の２次元同次式ポテンシャル系

マイナス２次の２次元同次式ポテンシャル系は常に可積分である．実際，ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad V(\alpha q_1, \alpha q_2) = \alpha^{-2} V(q_1, q_2) \tag{2.1}$$

を極座標 (r, φ) で表現すると，$V = r^{-2}U(\varphi)$ と書けることから

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + \frac{U(\varphi)}{r^2} = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}p_\varphi^2 + U(\varphi)\right) \tag{2.2}$$

となり，この形から

$$\Phi = \frac{p_\varphi^2}{2} + U(\varphi) = \frac{1}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + (q_1^2 + q_2^2)V(q_1, q_2) \tag{2.3}$$

が常に第１積分となることが確認できる．この事実は Jacobi (1804-1851) による．つまりマイナス２次の２次元同次式ポテンシャル系は可積分か超可積分であり，他の次数の同次式ポテンシャル系に比べて超可積分となる可能性が極めて高いことが分かる．

例としてポテンシャル

$$V = \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \tag{2.4}$$

を考えると，この場合の第１積分は (2.3) で与えられる

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + (q_1^2 + q_2^2)\left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\right) \tag{2.5}$$

および

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2} \tag{2.6}$$

があり，超可積分となる．

より意味のある例として，自由度 3 のハミルトン系（3 粒子 Calogero-Moser 系）

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{(q_1 - q_2)^2} + \frac{1}{(q_2 - q_3)^2} + \frac{1}{(q_3 - q_1)^2} \tag{2.7}$$

から自由度を１減らして運動量積分を無くした自由度２の系のポテンシャル

$$V = \frac{1}{(\sqrt{3}q_1 - q_2)^2} + \frac{1}{(-\sqrt{3}q_1 - q_2)^2} + \frac{1}{(2q_2)^2} \propto \frac{(q_1^2 + q_2^2)^2}{(-3q_1^2 q_2 + q_2^3)^2} \tag{2.8}$$

は，先の (2.3) 以外にもう１つの第１積分

$$\Phi = p_1^3 - 3p_1 p_2^2 + \frac{2(8p_2 q_1 q_2^3 + p_1(-3q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + q_2^4))}{(-3q_1^2 q_2 + q_2^3)^2} \tag{2.9}$$

を持つ．つまり超可積分である．

3　同次式ポテンシャル系の超可積分性の必要条件

$V(\boldsymbol{q})$ を整数 k 次の 2 次元同次式ポテンシャルとするとき，運動方程式

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -V'(\boldsymbol{q}), \quad \boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \tag{3.1}$$

は一般に原点を通る直線解

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c}\,\varphi(t) \tag{3.2}$$

を持つ．ここで $\varphi(t)$ は微分方程式

$$\ddot{\varphi} + \varphi^{k-1} = 0 \tag{3.3}$$

を満足し，また定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ は代数方程式

$$\boldsymbol{c} = V'(\boldsymbol{c}) \tag{3.4}$$

の１つの解である．点 $\boldsymbol{c}$ はダルブー点と呼ばれる．この直線解 (3.2) の周りの変分方程式

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + [\phi(t)]^{k-2} V''(\boldsymbol{c})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \tag{3.5}$$

は座標回転によるヘッシアン行列 $V''(\boldsymbol{c})$ の対角化

$$V''(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

によって変数が分離される．系の超可積分性はこの非自明な固有値 λ に次の制約を与える．

定理 1 (Maciejewski-Przybylska-Yoshida [1])**.** 整数次数 k 次の 2 次元同次式ポテンシャル系が超可積分であるとする．つまりハミルトニアンと独立な第 1 積分 Φ_1, Φ_2 が存在すると仮定する．この時，次数 k が $|k| \geq 3$ なら

$$\lambda \in \left\{ \frac{k-1}{2k}, \frac{k-1}{2k} + k, \frac{k-1}{2k} + 3k, \frac{k-1}{2k} + 6k, \ldots \right\} \tag{3.7}$$

である必要がある．また $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ の時には付加的な点列が加わる．一方，$|k| \leq 2$ の時は以下の値をとる必要がある．

- $k = 2$ ： $\lambda = (l/m)^2$ 　0 でない有理数の 2 乗
- $k = 1$ ： $\lambda = 0$
- $k = -1$ ： $\lambda = 1$
- $k = -2$ ： $\lambda = 1 - (l/m)^2$ 　$1-$(0 でない有理数の 2 乗)

この必要条件は Morales-Ramis による可積分性の必要条件 [3][4] にさらに制約を加えた形として得られたものである．この必要条件は $k = \pm 2$ の場合に特別な形を取る．つまり $k = \pm 2$ の時に超可積分となる可能性が大きいことを示唆している．実際，$k = +2$ の時に，超可積分性の必要条件は $\lambda = (l/m)^2$ の形をとるが，この条件を満たす 2 次の同次式ポテンシャルの例は，振動数比が有理数の 2 次元の調和振動子

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(l^2 q_1^2 + m^2 q_2^2) \tag{3.8}$$

で実現される．この系での λ の値は 2 つの直線解に対応して

$$\lambda_1 = (l/m)^2, \quad \lambda_2 = (m/l)^2 \tag{3.9}$$

である．この系は明らかな第 1 積分

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{1}{2}(l^2 q_1^2 - m^2 q_2^2) \tag{3.10}$$

以外に，もう 1 つの第 1 積分

$$\Phi_2 = (p_1 + \mathrm{i} l q_1)^m (p_2 - \mathrm{i} m q_2)^l \tag{3.11}$$

を持ち，これが系の超可積分性を保証している．さて同じような状況がもう 1 つの特別な次数 $k = -2$ でも起きるのであろうか？

4　超可積分性の必要条件を満たすマイナス 2 次の同次式ポテンシャル系

ポテンシャルと直線解を平面極座標 (r, φ) を用いて表現する．k 次の同次式ポテンシャルは極座標を用いて

$$V(r, \varphi) = r^k U(\varphi) \tag{4.1}$$

と表現される．また直線解 (3.2) は

$$\varphi = \text{const.} = \varphi_0, \quad U'(\varphi_0) = 0 \tag{4.2}$$

という条件で与えられる．極座標で表したポテンシャル V のラプラシアンの表式は

$$\nabla^2 V = k^2 r^{k-2} U(\varphi) + r^{k-2} U''(\varphi) \tag{4.3}$$

なので，これからヘッシアン行列 $V''(\boldsymbol{c})$ の非自明な固有値 λ の表式

$$\lambda = \mathrm{trace}[V''(\boldsymbol{c})] - (k-1) = \nabla^2 V(\boldsymbol{c}) - (k-1) = 1 + \frac{U''(\varphi_0)}{k\,U(\varphi_0)} \tag{4.4}$$

が得られる．

$k=-2$ の時の超可積分性の必要条件は

$$\lambda := 1 + \frac{U''(\varphi_0)}{(-2)\,U(\varphi_0)} = 1 - (l/m)^2 := 1 - s^2 \tag{4.5}$$

であった．但し s はゼロでない有理数を表す．これから $U'(\varphi_0)=0$ となる全ての φ_0 に対して

$$\frac{U''(\varphi_0)}{(-2)\,U(\varphi_0)} = -s^2 \tag{4.6}$$

が条件となることが分かる．今，従属変数の変換

$$U(\varphi) = \frac{1}{[f(\varphi)]^2} \tag{4.7}$$

を行うと，関係式

$$\frac{U''(\varphi_0)}{(-2)\,U(\varphi_0)} = \frac{f''(\varphi_0)}{f(\varphi_0)} \tag{4.8}$$

から

$$f''(\varphi_0) = -s^2 f(\varphi_0) \tag{4.9}$$

が得られる．ここでさらに考えるポテンシャルは直線解を定める全ての角度 φ_0 に対し同じ有理数 s をとると仮定する．この関係式を満足する 最も簡単な関数 $f(\varphi)$ は，明らかに微分方程式

$$f''(\varphi) = -s^2 f(\varphi) \tag{4.10}$$

の解である．これは線形振動の方程式でその 2 つの解は

$$f^{(1)}(\varphi) = \sin(s\varphi), \quad f^{(2)}(\varphi) = \cos(s\varphi) \tag{4.11}$$

である．これからポテンシャルの角度依存部分は

$$U^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\sin^2(s\varphi)}, \quad U^{(2)}(\varphi) = \frac{1}{\cos^2(s\varphi)} \tag{4.12}$$

そして極座標で表したポテンシャルは

$$V^{(1)}(r,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin^2(s\varphi)}, \quad V^{(2)}(r,\varphi) = \frac{1}{r^2\cos^2(s\varphi)} \tag{4.13}$$

と求められる．

以上，超可積分性の必要条件を，最も簡単に満たすポテンシャルの 2 系列 $V^{(1)}(r,\varphi), V^{(2)}(r,\varphi)$ が得られたが，そのうち $V^{(1)}(r,\varphi)$ の直交座標における表現は，s が整数 n の場合

$$V_n = \frac{1}{r^2\sin^2(n\varphi)} = \frac{(q_1^2+q_2^2)^{n-1}}{[\mathrm{Im}(q_1+iq_2)^n]^2} \tag{4.14}$$

であり，その最初の数例は

$$V_1 = \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} = \frac{1}{q_2^2} \tag{4.15}$$

$$V_2 = \frac{1}{r^2 \sin^2(2\varphi)} = \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{4q_1^2 q_2^2} \tag{4.16}$$

$$V_3 = \frac{1}{r^2 \sin^2(3\varphi)} = \frac{(q_1^2 + q_2^2)^2}{(-3q_1^2 q_2 + q_2^3)^2} \tag{4.17}$$

$$V_4 = \frac{1}{r^2 \sin^2(4\varphi)} = \frac{(q_1^2 + q_2^2)^3}{(q_1 q_2 (q_1^2 - q_2^2))^2} \tag{4.18}$$

である．V_2 はポテンシャル (2.4) に，そして V_3 はポテンシャル (2.8) に一致する．そしてこのポテンシャルの系列は全て超可積分であることを示すことができる．実際の超可積分性の証明，すなわち (2.3) 以外の第 1 積分の表式については文献 [2] およびその参考文献を参照せよ．

このように先に得られた超可積分性の必要条件 [1] は，実際に超可積分となるポテンシャルの系列を探し出すのに有用な「役に立つ」必要条件であると結論できる．

参考文献

[1] Maciejewski, A. J., M. Przybylska, and H. Yoshida: 2008, 'Necessary conditions for super-integrability of Hamiltonian systems'. *Phys. Lett. A* **372**(34), 5581–5587.

[2] Maciejewski, A. J., M. Przybylska, and H. Yoshida: 2010, 'Necessary conditions for classical super-integrability of a certain family of potentials in constant curvature spaces'. *J. Phys. A* **43**, 382001.

[3] Morales Ruiz, J. J.: 1999, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Vol. 179 of *Progress in Mathematics*. Basel: Birkhäuser Verlag.

[4] Morales-Ruiz, J. J. and J. P. Ramis: 2001, 'A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential'. *Methods Appl. Anal.* **8**(1), 113–120.