離散冪函数の明示公式

増田, 哲
青山学院大学理工学部

https://doi.org/10.15017/23393

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (9), pp.56-61, 2011-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 9 (pp. 56 - 61)

離散冪函数の明示公式

増田　哲（MASUDA Tetsu）

（Received 10 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

離散冪函数の明示公式

青山学院大学 理工学部　増田 哲　(MASUDA Tetsu)

概　要　Bobenko, Pinkall により提案された離散冪函数について，Painlevé VI 方程式の超幾何タウ函数を用いた明示公式を与える．彼らの定義では，ある幾何的要請から冪指数や定義域に強い制限が課されているが，幾何を（いったん）忘れればそうした制限は不要であり，冪指数は任意の複素数に，定義域は Riemann 面の離散類似というべきものに拡張できることを示す．なお，本稿の内容は，安藤央氏，Mike Hay 氏，梶原健司氏との共同研究に基づいている．

1　離散正則函数および離散冪函数の定義

離散正則函数の定義が，Bobenko および Pinkall により提案されている [4].

定義 1.1　写像 $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{C}$ を考える．任意の $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ に対し，

$$\frac{(f_{n,m}-f_{n+1,m})(f_{n+1,m+1}-f_{n,m+1})}{(f_{n+1,m}-f_{n+1,m+1})(f_{n,m+1}-f_{n,m})}=-1 \tag{1.1}$$

が成り立つとき，f は離散正則であるという．ここで，$f_{n,m}=f(n,m)$ と記した.

条件 (1.1) は，Cauchy-Riemann 関係式の離散類似である．この定義による離散正則函数の例としては，指数函数，対数函数，冪函数（の離散版）などしか知られていない．本稿では，このうち離散冪函数に焦点を当てる.

Bobenko, Pinkall [5] による離散冪函数の定義を述べよう.

定義 1.2　写像 $f:\mathbb{Z}_+^2\to\mathbb{C}$ は離散正則であるとする．$0<\gamma<2$ に対し，$f_{n,m}$ が差分方程式

$$\gamma f_{n,m}=2n\frac{(f_{n+1,m}-f_{n,m})(f_{n,m}-f_{n-1,m})}{f_{n+1,m}-f_{n-1,m}}+2m\frac{(f_{n,m+1}-f_{n,m})(f_{n,m}-f_{n,m-1})}{f_{n,m+1}-f_{n,m-1}} \tag{1.2}$$

および初期条件

$$f_{0,0}=0,\quad f_{1,0}=1,\quad f_{0,1}=e^{\gamma\pi i/2} \tag{1.3}$$

を満たすとき，$f=f_{n,m}$ を離散冪函数と呼ぶ.

差分方程式 (1.2) は連続極限において，$\gamma f=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(=z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ に帰着する．これは，冪函数 $f(z)=z^\gamma$ が満たす微分方程式である．つまり，パラメータ γ は冪指数に対応する.

$m=0$ または $n=0$ の場合は，差分方程式 (1.2) が三項間漸化式に帰着するため，解は簡単に求まる．また，$m=1$ または $n=1$ の場合の解は Agafonov [2] により構成されており，Gauss の超幾何函数の特殊値を用いて表されることが知られている．本稿の目的のひとつは，任意の $(n,m)\in\mathbb{Z}_+^2$ に対し，離散冪函数の明示公式を与えることである.

上の定義では，離散正則函数の定義域は「第 1 象限」$\mathbb{Z}_+^2$ に限られており，冪指数 γ の範囲も $0<\gamma<2$ に制限されていて，甚だ不満である．こうした制限は，ある幾何的な要請に由来するが [1]，そうした幾何をいったん忘れれば，γ の値がとり得る範囲は $\gamma\in\mathbb{C}-2\mathbb{Z}$ に素直に拡張できる（実際には，$\gamma\in\mathbb{C}$ でよいこともわかる）．また，定義域についても，Riemann 面の離散類似というべきものに拡張できる．これらについて論じることも，本稿の目的である.

2 Painlevé VI 方程式との関係

離散正則函数の定義に現れた条件 (1.1) は，離散 Schwarzian KdV 方程式

$$\frac{(f_{n,m}-f_{n+1,m})(f_{n+1,m+1}-f_{n,m+1})}{(f_{n+1,m}-f_{n+1,m+1})(f_{n,m+1}-f_{n,m})}=\frac{1}{t} \tag{2.1}$$

の特殊な場合と見做すことができる [1]．これと差分方程式 (1.2) との連立系にある種の簡約条件を課すことで，変形パラメータ t を独立変数とする常微分方程式として Painlevé VI 方程式が得られる [6]．ここでは要点のみを述べよう．本講究録所収の [3] も参照のこと．

従属変数 $v_{n,m}$ を

$$f_{n,m}-f_{n+1,m}=t^{-\frac{1}{2}}v_{n,m}v_{n+1,m},\quad f_{n,m}-f_{n,m+1}=v_{n,m}v_{n,m+1} \tag{2.2}$$

を満たすものとして導入しよう．従属変数 $v_{n,m}$ の変形パラメータ t に対する依存性を

$$-2t\frac{d}{dt}\log v_{n,m}=n\frac{v_{n+1,m}-v_{n-1,m}}{v_{n+1,m}+v_{n-1,m}} \tag{2.3}$$

と仮定する．

命題 2.1 変数 $w=w_{n,m}=w_{n,m}(t)$ を $w_{n,m}=t^{\frac{1}{2}}\dfrac{v_{n+1,m}}{v_{n,m+1}}$ で定めると，w は *Painlevé VI* 方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2}=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt}\\&+\frac{w(w-1)(w-t)}{2t^2(t-1)^2}\left[\kappa_\infty^2-\kappa_0^2\frac{t}{w^2}+\kappa_1^2\frac{t-1}{(w-1)^2}+(1-\theta^2)\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

を満たす．ここで，

$$\begin{aligned}\kappa_\infty^2&=\frac{1}{4}(\mu-\nu+m-n)^2, &\kappa_0^2&=\frac{1}{4}(\mu-\nu-m+n)^2,\\ \kappa_1^2&=\frac{1}{4}(\mu+\nu-m-n-1)^2, &\theta^2&=\frac{1}{4}(\mu+\nu+m+n+1)^2\end{aligned} \tag{2.5}$$

であり，パラメータ μ,ν と冪指数 γ とは，$\gamma=1+2\mu$ および $\nu=(-1)^{m+n}\mu$ で対応づけられる．

Painlevé VI 方程式は，複素パラメータを 4 つ（$\kappa_\infty,\kappa_0,\kappa_1,\theta$）持つが，上の命題では，その特殊な場合のみが現れている．簡単な考察から，パラメータの組 (2.5) は，超幾何函数で表わされる特殊解が現れる状況に対応していることがわかる．そこで，[7] に従い，Painlevé VI 方程式の超幾何函数解について簡単に言及しておこう．

まず，函数 $\tau_{n'}(a,b,c;t)\,(n'\in\mathbb{Z}_+)$ を

$$\tau_{n'}(a,b,c;t)=\det\left(\varphi(a+i-1,b+j-1,c;t)\right)_{1\le i,j\le n'} \tag{2.6}$$

および

$$\begin{aligned}\varphi(a,b,c;t)=&c_0\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b,c;t)\\&+c_1\frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(2-c)}t^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1,2-c;t)\end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] 離散 Schwarzian KdV 方程式といった場合，本来は，右辺を n のみの任意函数と m のみの任意函数の比 p_n/q_m にまで一般化したものを指す．

で導入しよう．ここで，${}_2F_1$ は Gauss の超幾何函数であり，c_0, c_1 は（t および に a,b,c 依らない）任意の複素定数である．念のため付け加えておくと，$\varphi(a,b,c;t)$ は，Gauss の超幾何微分方程式の $t=0$ の近傍での（標準的な）基本解の線型結合である．

命題 2.2 *[7]*　函数 w を

$$w = \frac{\tau_{n'}(a+1,b+1,c+1)\tau_{n'+1}(a,b+1,c)}{\tau_{n'}(a,b+1,c)\tau_{n'+1}(a+1,b+1,c+1)} \tag{2.8}$$

で定めると，w は *Painlevé VI* 方程式の解となる．但し，パラメータの値は

$$\kappa_\infty = a+n', \quad \kappa_0 = b-c+1+n', \quad \kappa_1 = c-a, \quad \theta = -b \tag{2.9}$$

である．

3　離散冪函数の明示公式

離散 Schwarzian KdV 方程式 (2.1) と差分方程式 (1.2) との連立系を，初期条件

$$f_{0,0}=0, \quad f_{1,0}=c_0, \quad f_{0,1}=c_1 t^r \tag{3.1}$$

の下で解くことを考えよう．ここで，$\gamma = 2r$ であり，c_0, c_1 は t, r に依らない任意の複素定数である．

注釈 3.1 こうして得られた函数 $f_{n,m}$ から離散冪函数の明示公式を得るには，$c_0 = c_1 = 1$ および $t = e^{\pi i}\,(=-1)$ と特殊化すればよい．

結果を述べよう．$r \notin \mathbb{Z}$ とする．

定理 3.2 各 $(n,m) \in \mathbb{Z}_+^2$ に対し，$f_{n,m}$ は以下の表示を持つ．

(I)　$n \le m$ のとき　　$n+m$ が偶数なら，$N = \dfrac{n+m}{2}$ として，

$$f_{n,m} = c_1 t^{r-n} N \frac{(r+1)_{N-1}}{(-r+1)_N} \frac{\tau_n(-N,-r-N+1,-r;t)}{\tau_n(-N+1,-r-N+2,-r+2;t)} \tag{3.2}$$

である．ここで，$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ と記した．また，$n+m$ が奇数なら，$N = \dfrac{n+m-1}{2}$ として，

$$f_{n,m} = c_1 t^{r-n} \frac{(r+1)_N}{(-r+1)_N} \frac{\tau_n(-N,-r-N,-r;t)}{\tau_n(-N+1,-r-N+1,-r+2;t)} \tag{3.3}$$

である．

(II)　$n \ge m$ のとき　　$n+m$ が偶数なら，$N = \dfrac{n+m}{2}$ として，

$$f_{n,m} = c_0 N \frac{(r+1)_{N-1}}{(-r+1)_N} \frac{\tau_m(-N+2,-r-N+1,-r+2;t)}{\tau_m(-N+1,-r-N+2,-r+2;t)} \tag{3.4}$$

であり，$n+m$ が奇数なら，$N = \dfrac{n+m-1}{2}$ として，

$$f_{n,m} = c_0 \frac{(r+1)_N}{(-r+1)_N} \frac{\tau_m(-N+1,-r-N,-r+1;t)}{\tau_m(-N,-r-N+1,-r+1;t)} \tag{3.5}$$

である．

但し，上記の定理においては（いい加減な記法ではあるが），$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$ {}_2F_1(k,b,c;t) = 0, \qquad \Gamma(-k) = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{3.6} $$

と解釈している．

注釈 3.3 明示公式に，*Painlevé VI* 方程式の超幾何タウ函数を用いてはいるが，もちろんこれらは，t, r および t^r の有理函数である．更に，$c_0 = c_1 = 1$ および $t = e^{\pi i} (= -1)$ と特殊化すれば，$r, e^{\pi i r}$ の有理函数となる．

4　定義の拡張

4.1　定義域の拡張

ここまでの議論では，離散冪函数の定義域を「第 1 象限」$\mathbb{Z}_+^2$ に限定していた．これを，ひとまず $\mathbb{Z}^2$ 平面へ拡張することを考えよう．方程式の形から，$\mathbb{Z}^2$ 上の値を決定するためには，(3.1) に加え，$(n,m) = (-1,0),(0,-1)$ での値を初期条件として与えなければならない．これらは

$$ f_{-1,0} = c_2 t^{2r}, \quad f_{0,-1} = c_3 t^{3r} \tag{4.1} $$

とするのが適当であろう．ここで，c_2, c_3 は（t, r に依存しない）任意の複素定数であり，離散冪函数の明示公式を得るには，やはり $c_2 = c_3 = 1$ および $t = e^{\pi i} (= -1)$ と特殊化すればよい．方程式 (2.1) および (1.2) の対称性より，第 2 および第 3 象限での $f_{n,m}$ の明示公式について，直ちに次の結果を得る．

命題 4.1 初期条件 $f_{0,0} = 0$, $f_{0,1} = c_1 t^r$ および *(4.1)* の下で，方程式 *(2.1)* および *(1.2)* を解くと，$n, m \in \mathbb{Z}_+$ として，

$$ f_{-n,m} = f_{n,m}|_{c_0 \mapsto c_2 t^{2r}}, \quad f_{-n,-m} = f_{n,m}|_{c_0 \mapsto c_2 t^{2r}, c_1 \mapsto c_3 t^{2r}} \tag{4.2} $$

を得る．

続いて第 4 象限であるが，素朴に解けば，初期条件が $f_{0,-1} = c_3 t^{3r}, f_{1,0} = c_0$ であるから，

$$ f_{n,-m} = f_{n,m}|_{c_1 \mapsto c_3 t^{2r}} \tag{4.3} $$

となる．しかしながら，これでは離散冪函数は $\mathbb{Z}^2$ 上の一価函数となってしまう．離散冪函数を $\mathbb{Z}^2$ 上多価とするため，Riemann 面の離散類似を導入しよう．具体的には，連続の場合と同様に，$\mathbb{Z}^2$ 平面を可算無限個だけ用意して，各々の実軸の正の部分に切れ目を入れて貼り合わせればよい．初期条件 (3.1),(4.1) を「極表示」を用いて

$$ f(1, \pi i k/2) = c_k t^{kr} \quad (k = 0,1,2,3) \tag{4.4} $$

と書くことにしよう（第 1 成分は $n + im$ の絶対値，第 2 成分は偏角を表す）．離散冪函数の定義域を「離散 Riemann 面」にまで拡張するには，この初期条件をそのまま任意の $k \in \mathbb{Z}$ に一般化すればよい．こうすれば，各 $\mathbb{Z}^2$ 平面の各象限ごとに離散冪函数の明示公式が得られる．例えば，$\frac{3}{2}\pi \leq \arg(n+im) \leq 2\pi$ においては，初期条件

$$ f(1, 3\pi i/2) = c_3 t^{3r}, \quad f(1, 2\pi i) = c_4 t^{4r} \tag{4.5} $$

の下で方程式 (2.1) および (1.2) を解けばよいので，解は，

$$f_{-n,-m} = f_{n,m}\big|_{c_0 \mapsto c_4 t^{4r}, c_1 \mapsto c_3 t^{2r}} \quad (n,m \in \mathbb{Z}_+) \tag{4.6}$$

となる．また，この設定の下で，離散冪函数 $f_{n,m}$ が $\mathbb{Z}^2$ 上一価となるための必要十分条件は,（$c_k = c_{k+4}$ および）$e^{4\pi i r} = 1$ すなわち $2r \in \mathbb{Z}$ である．これは冪指数 γ が整数であることに他ならない．

4.2　$r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ の場合

ここまでの議論では $r \in \mathbb{Z}$ の場合は除外されているが，Agafonov は，[1, 2] において，適当な極限で $r = 0$ および $r = 1$ の場合も論じている．前者は離散対数函数，後者は離散冪函数 Z^2 である．

以下では，Agafonov の議論を一般化し，離散冪函数で $r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ の場合および離散対数函数について考察する．現時点では，明示公式が得られていないので，数式処理による観察結果のみを述べる．簡単のため議論を第 1 象限に限定し，予め $c_0 = c_1 = 1$ および $t = e^{\pi i}$ と固定する．

まず，$r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ の場合を考えよう．$j \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし，函数 $\widetilde{f}_{n,m}$ を

$$\widetilde{f}_{n,m} := \begin{cases} \displaystyle\lim_{r \to j} (j - r) f_{n,m} & (r = j) \\ \displaystyle\lim_{r \to -j} \frac{f_{n,m}}{j + r} & (r = -j) \end{cases} \tag{4.7}$$

で定める．このとき，$\widetilde{f}_{n,m}$ は，方程式 (1.1) および (1.2) を，適当な初期条件の下で解いたものと一致する．初期条件を幾つか例示しよう．

(1) $r \to 1$ のとき

$$\widetilde{f}_{0,0} = 0, \quad \widetilde{f}_{1,0} = \widetilde{f}_{0,1} = 0, \qquad \widetilde{f}_{2,0} = 1, \quad \widetilde{f}_{1,1} = \frac{2i}{\pi}, \quad \widetilde{f}_{0,2} = -1. \tag{4.8}$$

(2) $r \to 2$ のとき

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}_{0,0} = 0, \quad \widetilde{f}_{1,0} = \widetilde{f}_{0,1} = 0, \quad \widetilde{f}_{2,0} = \widetilde{f}_{1,1} = \widetilde{f}_{0,2} = 0, \quad \widetilde{f}_{3,0} = \widetilde{f}_{2,1} = \widetilde{f}_{1,2} = \widetilde{f}_{0,3} = 0, \\ &\widetilde{f}_{4,0} = 1, \quad \widetilde{f}_{3,1} = \frac{4i}{3\pi}, \quad \widetilde{f}_{2,2} = -\frac{1}{3}, \quad \widetilde{f}_{1,3} = -\frac{4i}{3\pi}, \quad \widetilde{f}_{0,4} = 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

(3) $r \to -1$ のとき

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}_{0,0} = 0, \quad \widetilde{f}_{1,0} = \widetilde{f}_{0,1} = \infty, \quad \widetilde{f}_{2,0} = \widetilde{f}_{1,1} = \widetilde{f}_{0,2} = \infty, \\ &\widetilde{f}_{3,0} = 1, \quad \widetilde{f}_{2,1} = \frac{2 - \pi i}{2}, \quad \widetilde{f}_{1,2} = \frac{-2 - \pi i}{2}, \quad \widetilde{f}_{0,3} = -1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4) $r \to -2$ のとき

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}_{0,0} = 0, \quad \widetilde{f}_{1,0} = \widetilde{f}_{0,1} = \infty, \quad \widetilde{f}_{2,0} = \widetilde{f}_{1,1} = \widetilde{f}_{0,2} = \infty, \\ &\widetilde{f}_{3,0} = \widetilde{f}_{2,1} = \widetilde{f}_{1,2} = \widetilde{f}_{0,3} = \infty, \quad \widetilde{f}_{4,0} = \widetilde{f}_{3,1} = \widetilde{f}_{2,2} = \widetilde{f}_{1,3} = \widetilde{f}_{0,4} = \infty, \\ &\widetilde{f}_{5,0} = 1, \quad \widetilde{f}_{4,1} = \frac{4 - 3\pi i}{4}, \quad \widetilde{f}_{3,2} = -\frac{3(4 + \pi i)}{4}, \\ &\widetilde{f}_{2,3} = \frac{3(-4 + \pi i)}{4}, \quad \widetilde{f}_{1,4} = \frac{4 + 3\pi i}{4}, \quad \widetilde{f}_{0,5} = 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

直ちに見てとれるように，$r \in \mathbb{Z}_{>0}$ のときは，r が大きくなるほど値 0 をとる領域が原点の周囲に拡がっていき，$r \in \mathbb{Z}_{<0}$ のときは，r の絶対値が大きくなるほど値 ∞ をとる領域が原点の周囲に拡がっていく．値が ∞ となるような領域（および原点）は，定義域からは除外されるべきであろう．

4.3 離散対数函数

最後に，離散対数函数についての観察結果を述べよう．新しい従属変数を

$$\widehat{f}_{n,m} = \lim_{r\to 0} \frac{f_{n,m}-1}{r} \tag{4.12}$$

で導入する．このとき，$\widehat{f}_{n,m}$ は，方程式 (1.1) および

$$1 = n\frac{(\widehat{f}_{n+1,m}-\widehat{f}_{n,m})(\widehat{f}_{n,m}-\widehat{f}_{n-1,m})}{\widehat{f}_{n+1,m}-\widehat{f}_{n-1,m}} + m\frac{(\widehat{f}_{n,m+1}-\widehat{f}_{n,m})(\widehat{f}_{n,m}-\widehat{f}_{n,m-1})}{\widehat{f}_{n,m+1}-\widehat{f}_{n,m-1}} \tag{4.13}$$

を初期条件

$$\widehat{f}_{0,0} = \infty, \qquad \widehat{f}_{1,0} = 0, \quad \widehat{f}_{0,1} = \pi i, \qquad \widehat{f}_{2,0} = 1, \quad \widehat{f}_{0,2} = 1+\pi i, \quad \widehat{f}_{1,1} = \frac{\pi i}{2} \tag{4.14}$$

の下で解いたものと一致する．

注釈 4.2 離散冪函数で $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ の場合および離散対数函数は，*Gauss* の超幾何微分方程式において，（原点での）局所解の特性指数の差 $1-c$ が整数となり，対数項 $\log t$ が現れる状況に対応している．

参考文献

[1] S. I. Agafonov, Imbedded circle patterns with the combinatorics of the square grid and discrete Painlevé equations, Discrete Comput. Geom. **29** (2003) 305–319.

[2] S. I. Agafonov, Discrete Riccati equation, hypergeometric functions and circle patterns of Schramm type, Glasg. Math. J. **47** (2005) 1–16.

[3] 安藤央，離散冪函数と Painleve VI 方程式との関係，本講究録所収

[4] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, J. Reine Angew. Math. **475** (1996) 187–208.

[5] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discretization of surfaces and integrable systems, Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996), 3–58, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **16**, Oxford Univ. Press, New York, 1999.

[6] F. W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos and Y. Ohta, On discrete Painlevé equations associated with the lattice KdV systems and the Painlevé VI equation, Stud. Appl. Math. **106** (2001) 261–314.

[7] T. Masuda, Classical transcendental solutions of the Painlevé equations and their degeneration, Tohoku Math. J. **56** (2004) 467–490.