空間均衡分析における均衡解の一意性について : I.理論的考察

川口, 雅正
九州大学農学部農業計算学講座

李, 鍾相
九州大学農学部農業計算学講座

https://doi.org/10.15017/23379

出版情報：九州大學農學部學藝雜誌. 46 (3/4), pp.177-198, 1992-02. 九州大學農學部
バージョン：
権利関係：

九大農学芸誌 (Sci. Bull. Fac. Agr., Kyushu Univ.)
第46巻 第3・4号 177-198 (1992)

空間均衡分析における均衡解の一意性について
I．理論的考察

川 口 雅 正・李 鍾 相
九州大学農学部農業計算学講座

(1991年11月14日受理)

On the Uniqueness of Equilibrium Solution in Spatial Equilibrium Analysis
I. A Theoretical Study

Tsunemasa KAWAGUCHI and Jong-Sang LEE
Seminar of Econometric Analysis in Agriculture, Faculty of Agriculture
Kyushu University 46-07, Fukuoka 812

I 緒 言

最近のわが国農業をとりまく内外の諸情勢を見ると，極めて厳しいものがあり，開放経済体制への変革の大勢は否定しえない．国内的にも種々の規制緩和が行われつつあり，農産物市場をめぐる国際的かつ国内的な産地間競争が種々の形で激化するものと考えられる．このような状況の下で，産地間競争に関する具体的かつ計量的な分析法を確立することが必要となろう．

産地間競争に関する具体的かつ計量的な分析法の一つとして空間均衡分析がよく知られている．特別の制度的，技術的な制約条件がなければ，地理的に分離した多くの産地および市場間で価格格差が単位輸送費を上回る限り生産物は高価格を求めて産地および市場間を移動し，その過程をとおして各産地の価格と供給量および各市場の価格と需要量が調整され，ついには産地および市場間の価格格差が単位輸送費に等しいかそれ以下である多数産地および市場の同時均衡が成立する．多数の主体間に成立するこのような競争均衡状態を求める問題を線形ないし非線形計画法における最大化問題として定式化しうることを示し，その最大化問題を解いて具体的かつ計量的に競争均衡状態の分析を行うのが空間均衡分析のおおまかな内容である．具体的な問題の定式化は様々であるが，以後の説明を理解しやすくするために，空間均衡分析の極めて簡単な例をあげておこう．

たとえばある農産物の産地が三つあり，第i産地の供給量 S_iはその産地での価格 PS_iの関数として次のように要約されるものとしよう．また市場が三つあり，第 j 市場の需要量 D_jはその市場での価格 PD_jの関数として次のように要約されるものとしよう．さらに第 i 産地から第 j 市場への単位輸送費 t_{ij}が次のとおりであるものとする．

$$S_1=-1.0+0.5\,PS_1$$
$$S_2=-1.5+0.6\,PS_2$$
$$S_3=-2.0+0.7\,PS_3$$
$$D_1=10.0-0.6\,PD_1$$
$$D_2=8.0-0.5\,PD_2$$
$$D_3=6.0-0.4\,PD_3$$

$$t_{11}=0.31\quad t_{12}=0.25\quad t_{13}=0.43$$
$$t_{21}=0.36\quad t_{22}=0.31\quad t_{23}=0.28$$
$$t_{31}=0.40\quad t_{32}=0.23\quad t_{33}=0.35$$

このような条件の下で自由な産地間競争が行われるものとすれば第 i 産地から第 j 市場への出荷量 x_{ij}はどのような値で均衡し，また第 i 産地における価格 PS_iと第 j 市場における価格 PD_jはどのような値で均衡するであろうか．空間均衡分析の理論によると，このような均衡状態は次のような二次計画問題を解くことによって得られる．つまり均衡価格は

双対変数

$$
\begin{array}{llll}
PD_1 - PS_1 & \leqq 0.31 & (x_{11} \geqq 0) \\
PD_1 - PS_2 & \leqq 0.36 & (x_{21} \geqq 0) \\
PD_1 - PS_3 & \leqq 0.40 & (x_{31} \geqq 0) \\
PD_2 - PS_1 & \leqq 0.25 & (x_{12} \geqq 0) \\
PD_2 - PS_2 & \leqq 0.31 & (x_{22} \geqq 0) \\
PD_2 - PS_3 & \leqq 0.23 & (x_{32} \geqq 0) \\
PD_3 - PS_1 & \leqq 0.43 & (x_{13} \geqq 0) \\
PD_3 \quad PS_2 & \leqq 0.28 & (x_{23} \geqq 0) \\
PD_3 - PS_3 & \leqq 0.35 & (x_{33} \geqq 0)
\end{array}
$$

$PD_1 \geqq 0, PD_2 \geqq 0, PD_3 \geqq 0, PS_1 \geqq 0, PS_2 \geqq 0$

$PS_3 \geqq 0$　なる条件の下で目的関数 f

$$
\begin{aligned}
f = &(10.0PD_1 - 0.3PD_1^2) + (8.0PD_2 - 0.25PD_2^2) \\
&+ (6.0PD_3 - 0.2PD_3^2) - (-1.0PS_1 + 0.25PS_1^2) \\
&- (-1.5PS_2 + 0.3PS_2^2) - (-2.0PS_3 + 0.35PS_3^2)
\end{aligned}
$$

を最大にする $PD_1, PD_2, PD_3, PS_1, PS_2, PS_3$ を求めよ

なる二次計画問題を解くことによって，また出荷量 x_{ij} はこの二次計画問題を解くために各制約条件式に対応して導入される双対変数と呼ばれる一種の補助変数（ラグランジュの乗数）x_{ij} の値として得られる．従って二次計画問題の解法もこのような双対変数の値が求まるようなものでなければならない．

容易に分かるように目的関数 f は各需要関数の価格に関する不定積分の合計から各供給関数の価格に関する不定積分の合計を引いたものとなっている．目的関数には経済学的な意味づけがなされることが多いが，その意味づけとは無関係に，この二次計画問題を解くことによって競争均衡解が得られるという保証は次の点にある．つまりこの二次計画問題の最適解がみたすべき必要十分条件（最適条件）を双対変数 x_{ij} を導入して定式化すると，その最適条件が正に産地間の競争均衡のみたすべき条件と一致する．逆にいうと，このことは極めて重要なことであるが，その最適条件が求めるべき競争均衡の条件に一致するような最大化問題を人為的に工夫し，その最大化問題を解けばよいのである．二次計画法の数学理論によると，上述の二次計画問題の最適条件は次のとおりである（カッコ内はその解釈）．

$$PD_j - PS_i \leqq t_{ij},\quad x_{ij}(PD_j - PS_i - t_{ij}) = 0$$
$$x_{ij} \geqq 0,\quad PD_j \geqq 0,\quad PS_i \geqq 0$$

（価格差は，単位輸送費 t_{ij} に等しいかそれより小さく，小さい場合には出荷 x_{ij} はゼロであり，出荷 x_{ij} が正ならば等しい；t_{ij} の値は上述のとおり）

$$\frac{\partial f}{\partial PD_j} = D_j \leqq x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$$
$$PD_j(D_j - x_{1j} - x_{2j} - x_{3j}) = 0$$

（市場の需要量はその市場への総入荷量を越えることはなく，市場における価格が正ならば需要量と総入荷量は等しく，需要量が総入荷量より小さければその市場価格はゼロである）

$$\frac{\partial f}{\partial PS_i} = -S_i \leqq -x_{i1} - x_{i2} - x_{i3}$$
$$PS_i(-S_i + x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) = 0$$

（産地から各市場への総出荷量はその産地の供給量を越えることはなく，産地価格が正ならば供給量と総出荷量とは等しく，総出荷量が供給量より小さければ産地価格はゼロである）

このような関係が i，j = 1，2，3 について成立する．

後のIIIで述べるような二次計画問題の解法で具体的にこの問題を解くと次のような最適解が得られる．このような競争均衡の状態は与件の変化によって，たとえば各市場における需要構造や各産地における供給構造の変化または輸送手段の発達による輸送費の変化によってどのような影響を受けるのであろうか．二次計画問題の解法としては，このような与件変化の影響を追跡しやすいものが望ましい．

$PD_1 = 8.8691$，$PD_2 = 8.6991$，$PD_3 = 8.7891$
$PS_1 = 8.5591$，$PS_2 = 8.5091$，$PS_3 = 8.4691$

$x_{11} = 3.2795$，$x_{12} = 0$，$x_{13} = 0$　$(S_1 = 3.2795)$
$x_{21} = 1.1211$，$x_{22} = 0$，$x_{23} = 2.4844$　$(S_2 = 3.6055)$
$x_{31} = 0.2779$，$x_{32} = 3.6505$，$x_{33} = 0$　$(S_3 = 3.9284)$
$(D_1 = 4.6785)$　$(D_2 = 3.6505)$　$(D_3 = 2.4844)$

たとえば第1の市場における需要関数，$D_1 = 10.0 - 0.6\,PD_1$，が何らかの与件変化により上方にシフトして定数項10.0がしだいに20.0まで（需要関数が $D_1 = 20.0 - 0.6\,PD_1$ となるまで）増加すると，競争均衡解は上述の値からそれぞれ次のような値へ直線的に変化し，各産地の供給量と全ての価格が上昇するが，第1の市場の需要量がかなり増加するのに反して他市場の需要量は減少することが分かる．

$PD_1=11.899$，$PD_2=11.729$，$PD_3=11.819$
$PS_1=11.589$，$PS_2=11.539$，$PS_3=11.499$

$x_{11}=4.7947$，$x_{12}=0$，$x_{13}=0$　$(S_1=4.7947)$
$x_{21}=4.1514$，$x_{22}=0$，$x_{23}=1.2722$ $(S_2=5.4236)$
$x_{31}=3.9143$，$x_{32}=2.1353$，$x_{33}=0$　$(S_3=6.0496)$
$(D_1=12.8604)$ $(D_2=2.1353)$ $(D_3=1.2722)$

この例では一つの生産物だけを取り上げ，需給構造を線形の需要関数と供給関数で要約しているが，複数の生産物を同時に考慮し，供給構造を非線形の供給関数や線形計画等の活動分析で要約したり，需要構造を非線形の需要関数で要約したりすることも可能であり，また最大化問題の変数（原変数）として価格ではなく数量（需給量および出荷量など）を用い競争均衡価格を補助的な双対変数の値として求めることもできる．このように実際には様々の問題の定式化が可能であるが，空間均衡分析の基本的な考え方はこの例でおおよそ明らかになったものと考えられる．

以上のようにして求められた競争均衡解に基づいて，制度的条件の変化や生産および需要構造の変化，輸送技術の変化等が産地間競争にどのような影響を与えるかが分析されるのである．このような分析は競争均衡解がただ一つであるという暗黙の前提の下で行われている．もしそうでなければ，得られた競争均衡解に基づいたそのような分析は意味がないか，または何らかの修正をせざるをえないからである．この重要な競争均衡解の一意性の問題は従来の空間均衡分析においてはどのように扱われてきたのであろうか．

空間均衡分析は Enke (1951)，Samuelson (1952) に始まり Takayama and Judge (1964 a, b) によって実践的な二次計画問題として展開され，その後多数の研究が行われ (Takayama and Judge, 1971 ; Judge and Takayama, 1973)，わが国においても丸山(1967)，佐々木(1969, 1970, 1971)，高山(1974)，永木(1977)，その他多数の研究が行われている．特にミルクマーケティングの分野での実践的な研究 (Rayner, 1975 ; McDowell, 1982) が注目され，文献は省略するがわが国においても林 (1984) などこの分野の研究はよく行われている．このような従来の研究を参照する限り，また空間均衡分析に関与してきた研究者の話を聞く限り，均衡解の一意性についての研究はあまり行われておらず，一つの均衡解を数値的に求めることだけですませていたようである．しかし，本当に均衡解の一意性は保証されるのであろうか．たとえば佐々木(1970)は高山崇氏への謝辞を述べるとともに，Takayama and Judge (1964 b, p. 83) と同様に，得られた均衡解は一意の解であると述べているが，別稿の事例研究で述べるように無数の解が存在するように考えられ，佐々木 (1969) にも同様の問題があるようである．他の研究についてはまだ吟味していないが，おそらく同様の問題があるのではないかと考えられる．そこで本稿では均衡解の一意性について理論的な研究を行うこととし，事例分析は別稿に譲りたい．

以後IIで非線形計画問題の最適解としての競争均衡解の一意性について分析し，IIIで二次計画問題の解法について検討を行い，比較静学的分析や解の構造の研究に適した効率的な解法について述べ，その解法に基づいて二次計画法による競争均衡解の一意性について分析し，IVで若干の結論を述べたい．

II　非線形計画問題の最適解としての均衡解の一意性

これまでの説明から明らかなように，空間均衡分析においては，競争均衡解は一般に非線形計画問題の最適解として求められる．もちろん非線形計画問題の特殊な場合として線形計画問題，二次計画問題も含まれており，最適解の中には最適条件を定式化する際に補助的に導入される双対変数の値も含まれている．空間均衡分析で利用されるような非線形計画問題を最も一般的に定式化すると次のようになるであろう．

$g1(x) \leqq 0$，$g2(x) \leqq 0$，…，$gM(x) \leqq 0$ …(1)

なる条件の下で $f(x)$ を最大にする x を求めよ．ここで $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ は n 次元ユークリッド空間の変数列ベクトル，ベクトルや行列につけたプライム(′)はその転置を示し，$g1(x)$，$g2(x)$，…，$gM(x)$，$f(x)$ は n 次元ユークリッド空間において定義され連続な偏導関数を持つ（従って微分可能な）実数値関数である．実変数 x_1，x_2，…，x_n の非負条件，つまり $-x_1 \leqq 0$，$-x_2 \leqq 0$，…，$-x_n \leqq 0$ も必要な場合には上の M 個の制約条件の中に含めて考える．

また説明を簡潔にするために次のような表記法を導入しておこう．つまりそれぞれの関数の偏導関数を

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=f_1(x) \quad \frac{\partial g1(x)}{\partial x_1}=g1_1(x)$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=f_2(x) \quad \frac{\partial g1(x)}{\partial x_2}=g1_2(x)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}=f_n(x) \quad \frac{\partial g1(x)}{\partial x_n}=g1_n(x)$$

というふうに表し，x のある特定の値 $x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)'$ におけるそれらの偏導関数の値を

$$\begin{array}{ll} f_1(x^0) & g1_1(x^0) \\ f_2(x^0) & g1_2(x^0) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x^0) & g1_n(x^0) \end{array}$$

と表し，それらを列ベクトルの形で表したそれぞれの関数の $x=x^0$ における勾配（gradient）を

$$\nabla f(x^0)=\begin{bmatrix} f_1(x^0) \\ f_2(x^0) \\ \vdots \\ f_n(x^0) \end{bmatrix}, \quad \nabla g1(x^0)=\begin{bmatrix} g1_1(x^0) \\ g1_2(x^0) \\ \vdots \\ g1_n(x^0) \end{bmatrix}$$

というふうに表すことにする。

1．制約想定の考察

このような表記法を利用して上述の非線形計画問題の最適解の性格について考察してみよう。よく知られているように，上述の条件(1)の下である $x=x^0$ が $f(x)$ を極大（local maximum であり最大ではない）にするための必要条件を示す定理として Fritz John の定理がある。この定理は $f(x)$ と $g1(x)$，$g2(x)$，…，$gM(x)$ の微分可能性を仮定する以外には何の仮定もない極めて一般的なものであり私達の問題にあてはめて考えると次のように述べられている（Abadie, 1967, pp. 25-26）。

もし x^0 が条件(1)の下で $f(x)$ を極大にするならば，すべてが0ではない（少なくとも1つは0でない）次のような実数 u_0，u_1，u_2，…，u_M が存在する。

$$u_0 \geqq 0, \ u_1 \geqq 0, \ u_2 \geqq 0, \ \cdots, \ u_M \geqq 0$$

$$u_0 \nabla f(x^0) = u_1 \nabla g1(x^0) + u_2 \nabla g2(x^0) + \cdots + u_M \nabla gM(x^0) \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$u_1 g1(x^0)=0, \ u_2 g2(x^0)=0, \ \cdots, \ u_M gM(x^0)=0$$

$$g1(x^0) \leqq 0, \ g2(x^0) \leqq 0, \ \cdots, \ gM(x^0) \leqq 0$$

この Fritz John の定理は若干強い形に変形（つまり u_1，u_2，…，u_M の全部でなくその一部分と u_0 の中に少なくとも1つ0でない値があるよう変形）しうることが知られているが，ここではそのことにふれる必要はない（Mangasarian, 1969, pp. 99-101 ; Vajda, 1974, pp. 73-75）。

この Fritz John の定理は，(2)式の u_0 が正であるという保証はないので，ここでいう非線形計画問題にとっては，極めて一般的であるが利用しにくいものである。しかし，Kuhn and Tucker (1951) は制約条件(1)の関数 $g1(x)$，$g2(x)$，…，$gM(x)$ がある条件をみたすならば $u_0=1$ としてよいことを示した。この条件は制約想定（constraint qualification）と呼ばれている（Kuhn and Tucker, 1951, p. 483）。Kuhn and Tucker (1951) によって導入された制約想定はかなり厳しいものであったが，その後 Arrow *et al.* (1961, p. 178 の constraint qualification W の概念とそれに関する定理)，Abadie (1967, p. 29 の qualified for system および p. 34 の sequentially qualified for system の概念と関連する定理)，Evans (1970, p. 284 の weakly tangent の概念と関連する定理）等によって制約想定をかなりゆるめても $u_0=1$ としてよいことが示され，最後に Gould and Tolle (1971, p. 167 の定理とその説明）によって $u_0=1$ が成立するためには Evans (1970) の制約想定が成立せねばならず，これ以上ゆるめることはできないことが示された。なお制約条件(1)の関数 $g1(x)$，$g2(x)$，…，$gM(x)$ が特にすべて凸関数（convex function）であるならば，$u_0=1$ が成立するためには Arrow *et al.* (1961) によって導入された constraint qualification W が成立せねばならず，これ以上ゆるめることはできない（Arrow *et al.*, 1961, p. 182 の theorem 2）。

上述のような制約想定のどれかが成立すれば $u_0=1$ としてよいが，それらの制約想定が成立するための十分条件が具体的に検証しうる形でいくつか示されている（Arrow *et al.*, 1961, p. 183のtheorem 3 ; Abadie, 1967, p. 29 の theorem 3 ; Mangasarian, 1969, chapter 7 ; Vajda, 1974, chapter 4）。そして $u_0=1$ とした時の(2)式は，変数 x_1，x_2，…，x_n の非負条件を制約条件(1)に含めているので表現は若干異なるが，Kuhn-Tucker の最適条件と呼ばれているものと全く同じである（Kuhn and Tucker, 1951, pp. 482-483）。

2．凸計画問題の定式化

空間均衡分析においては上述のような制約想定の少なくとも1つが成立するものとして分析を進める。このことは極めて重要な点であるから十分注意しておかなければならない。なお制約条件(1)の関数 $g1(x)$，$g2(x)$，…，$gM(x)$ がすべて線形であれば，よく知られているように上述のすべての制約想定が成立する。制約想定が成立する場合を考えるのであるから次の命題が成立する。

ある x^0 が条件(1)の下で $f(x)$ を極大にするならば Kuhn-Tucker の最適条件が成立する。つまり，あ

る数 u_1, u_2, …, u_Mが存在して

$$u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0,\ \cdots,\ u_M \geqq 0$$

$$\nabla f(x^0) = u_1 \nabla g1(x^0) + u_2 \nabla g2(x^0) + \cdots + u_M \nabla gM(x^0)$$

$$u_1 g1(x^0) = 0,\ u_2 g2(x^0) = 0, \cdots, u_M gM(x^0) = 0$$

$$g1(x^0) \leqq 0,\ g2(x^0) \leqq 0, \cdots,\ gM(x^0) \leqq 0$$

なる式が成立する．なお x_1, x_2, …, x_nを原変数（primal variable）と呼ぶのに対して u_1, u_2, …, u_Mは双対変数（dual variable）と呼ばれる．

このようにある x^0が条件(1)の下で $f(x)$ を極大にすれば Kuhn-Tucker の最適条件が成立し，この Kuhn-Tucker の最適条件が正に競争均衡のみたすべき条件と一致するように非線形計画問題が工夫して作られるのである．この点は極めて重要な点である．繰り返し述べておくが，空間均衡分析で分析の対象とされる競争均衡状態のみたすべき条件と Kuhn-Tucker の最適条件とが一致するように制約条件(1)と目的関数 $f(x)$ を工夫し非線形計画問題を作るのである．そうすることによって，その非線形計画問題を解くことができれば競争均衡解が得られるという寸法である．しかし，もし条件(1)の下で $f(x)$ を極大にし Kuhn-Tucker の最適条件をみたす x^0が唯一つではなく複数個存在するとすればどうであろうか．もしそうであれば，どの x^0が現実に安定した真の均衡を与えるのか，極めて困難な問題が生じることとなる．従って空間均衡分析においては $f(x)$ を極大にする x^0ができれば唯一つであるように非線形計画問題を工夫することが要請される．

このような要請は，制約条件(1)の下での $f(x)$ の極大点が最大点でもあり，最大点はできれば唯一つであるようにすることで達成されよう．つまり Kuhn-Tucker の最適条件をみたす x^0は，(1)式の条件の下で $f(x)$ を最大にし，上述の非線形計画問題の最適解となるように工夫するのである．よく知られているように，制約条件(1)の関数 $g1(x)$, $g2(x)$, …, $gM(x)$ がすべて凸関数であり，かつ目的関数 $f(x)$ が凹関数（concave function）であるならば，Kuhn-Tucker の最適条件をみたす x^0は(1)式の下で $f(x)$ を最大にする（Kuhn and Tucker, 1951；Mangasarian, 1969, pp. 93-95）．従って通常空間均衡分析においては関数 $g1(x)$, $g2(x)$, …, $gM(x)$ は凸関数であり $f(x)$ は凹関数であるものとして分析を進める．

なお $f(x)$ を最大にするということは $(-f(x))$ を最小にすることであり，$f(x)$ が凹関数ならば $(-f(x))$ は凸関数である．従って最小化問題として定式化しなおせば関数はすべて凸関数となる．そこでこのような非線形計画問題は通常凸計画問題（convex programming problem または convex program）と呼ばれている．今後空間均衡分析で利用される非線形計画問題は以上のような理由により凸計画問題であるものとしよう．かくて考察すべき問題は，凸計画問題における Kuhn-Tucker の最適条件をみたす解（原変数の値だけでなく双対変数の値も含めて考えることが極めて重要である）が唯一つであるかどうかという，解の一意性の問題である．

3．Kuhn-Tucker の最適条件の定式化

Takayama and Judge（1971, chapter 2）も凸計画問題の最適解の存在とその一意性について考察を行っている．しかしこれから述べるように，双対変数の値は全く考慮に入れられていないようであり，また誤った存在定理が与えられているものと考えられる．双対変数の値についての考察を容易にするために，原変数 x_1, x_2, …, x_nの非負条件を明示する形に上述の Kuhn-Tucker の最適条件を変形しておこう．このように変形された Kuhn-Tucker の最適条件（Vajda, 1974, pp. 79-80 を参照）は Dorfman *et al.*（1958, chapter 8）によって極めて興味深い経済学的意味づけがなされているものである．今制約条件(1)が x_1, x_2, …, x_nの非負条件を含んでいることを明示するために(1)式を次のように表現しなおそう．

$$g1(x) \leqq 0,\ g2(x) \leqq 0, \cdots,\ gm(x) \leqq 0$$
$$-x_1 \leqq 0,\ -x_2 \leqq 0, \cdots,\ -x_n \leqq 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$
ただし $m + n = M$

すると Kuhn-Tucker の最適条件は次のようになる．

ある数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$,　$v_1, v_2, \cdots, v_n$が存在して

$$u_1 \geqq 0, u_2 \geqq 0, \cdots, u_m \geqq 0$$

$$v_1 \geqq 0, v_2 \geqq 0, \cdots, v_n \geqq 0$$

$$\nabla f(x^0) = u_1 \nabla g1(x^0) + u_2 \nabla g2(x^0) + \cdots + u_m \nabla gm(x^0) - (v_1, v_2, \cdots, v_n)'$$

$$u_1 g1(x^0) = 0, u_2 g2(x^0) = 0, \cdots, u_m gm(x^0) = 0$$

$$x^0_1 v_1 = 0, x^0_2 v_2 = 0, \cdots, x^0_n v_n = 0$$

$$g1(x^0) \leqq 0, g2(x^0) \leqq 0, \cdots, gm(x^0) \leqq 0$$

$$-x^0_1 \leqq 0,\ -x^0_2 \leqq 0, \cdots, -x^0_n \leqq 0$$

なる式が成立する．

さらにある非負の数 y^0_1, y^0_2, …, y^0_m（スラック変数

と呼ばれ原変数である）を導入して $g1(x^0)\leqq 0$, $g2(x^0)\leqq 0$, …, $gm(x^0)\leqq 0$ を

$$g1(x^0)+y^0{}_1=0,\ g2(x^0)+y^0{}_2=0,\cdots,$$
$$gm(x^0)+y^0{}_m=0$$

と変形すれば結局 Kuhn-Tucker の最適条件は次のようななじみ深いものとなる．つまり

$x^0{}_1\geqq 0, x^0{}_2\geqq 0,\cdots, x^0{}_n\geqq 0$ なる条件をみたす非負ベクトル $x^0=(x^0{}_1, x^0{}_2,\cdots,x^0{}_n)'$ に対して

$$g1(x^0)+y^0{}_1=0,\ y^0{}_1\geqq 0,\ u_1\geqq 0,\ u_1y^0{}_1=0$$
$$g2(x^0)+y^0{}_2=0,\ y^0{}_2\geqq 0,\ u_2\geqq 0,\ u_2y^0{}_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$gm(x^0)+y^0{}_m=0,\ y^0{}_m\geqq 0,\ u_m\geqq 0,\ u_my^0{}_m=0$$
$$\nabla f(x^0)+(v_1,v_2,\cdots,v_n)'=u_1\nabla g1(x^0)+u_2\nabla g2(x^0)+\cdots+u_m\nabla gm(x^0)$$
$$v_1\geqq 0, v_2\geqq 0,\cdots, v_n\geqq 0$$
$$x^0{}_1v_1=0, x^0{}_2v_2=0,\cdots, x^0{}_nv_n=0$$

なる条件をみたす実数 y^0_i, u_i, v_j $(i=1, 2\cdots, m$；$j=1, 2\cdots, n)$ が存在する．

このなじみ深い Kuhn-Tucker の最適条件を簡潔に表すために次のような表記法を導入しておこう．つまり $g1(x)$, $g2(x)$, …, $gm(x)$をその要素とする m 次列ベクトル $G(x)$, $\nabla g1(x)$を転置した n 次行ベクトル $\nabla g1(x)'$, 同じく $\nabla g2(x)'$, …, $\nabla gm(x)'$をその行とする $m\times n$ 行列 $\nabla G(x)$ および n 次列ベクトル v, m 次列ベクトル y, u を導入する．

$$\begin{bmatrix} g1(x)\\ g2(x)\\ \vdots\\ gm(x)\end{bmatrix}=G(x),\quad \begin{bmatrix}\nabla g1(x)'\\ \nabla g2(x)'\\ \vdots\\ \nabla gm(x)'\end{bmatrix}=\nabla G(x)$$

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\end{bmatrix}$$

するとKuhn-Tuckerの最適条件は簡潔に

$$G(x^0)+y^0=0,\quad x^0\geqq 0,\ y^0\geqq 0$$
$$\nabla f(x^0)+v=\nabla G(x^0)'u,\quad v\geqq 0,\ u\geqq 0$$
$$x^{0\prime}v=0,\ y^{0\prime}u=0$$

と表される．なお，1組の変数 x_j, v_jの中の一方を他方の相補変数と呼び，同じく y_i, u_iの中の一方を他方の相補変数と呼ぶ $(i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n)$．

4．凸計画問題の原変数および双対変数の最適解の一意性

このように変形された Kuhn-Tucker の最適条件を利用して，まず最初に，Kuhn-Tucker の最適条件をみたす解 $x^0=(x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_n)'$および $y^0=(y^0_1, y^0_2, \cdots, y^0_m)'$の値が，つまり原変数の値がたとえ唯一つであっても，双対変数 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)'$および $v=(v_1, v_2, \cdots, v_n)'$は唯一つの値をとるとは限らず，無数の値をとりうる場合があることを明らかにしておこう．今次のような場合を考えてみよう．条件(イ), (ロ), (ハ)が成立するような場合には $u_1, u_2, \cdots, u_s$および $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n$は唯一つの値でなく無数の値をとりうる．

(イ) $x^0_1, x^0_2, \cdots, x^0_k (0\leqq k\leqq n)$は正の値であり $x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \cdots, x^0_n$は 0 である．また $v_1=v_2=\cdots=v_k=0$ であり，$v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n$は正の値である．

(ロ) $y^0_1, y^0_2, \cdots, y^0_s (0\leqq s\leqq m)$は 0 であり $y^0_{s+1}, y^0_{s+2}, \cdots, y^0_m$は正の値である．また $u_1, u_2, \cdots, u_s$は正の値であり $u_{s+1}, u_{s+2}, \cdots, u_m$は 0 である．

(ハ) 正の値をとる原変数の個数 $k+(m-s)$は制約条件式の個数 m より小さい．つまり $k+(m-s)<m$，よって $k<s$ である．なお $n<s+(n-k)$ が成立する点に注意．

つまり Kuhn-Tucker の最適条件に含まれる関係式

$$\nabla f(x^0)+(v_1, v_2, \cdots, v_n)'=$$
$$u_1\nabla g1(x^0)+u_2\nabla g2(x^0)+\cdots+u_m\nabla gm(x^0)$$

はこの場合より具体的に

$$\begin{bmatrix}f_1(x^0)\\ f_2(x^0)\\ \vdots\\ f_k(x^0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g1_1(x^0) & g2_1(x^0)\cdots gs_1(x^0)\\ g1_2(x^0) & g2_2(x^0)\cdots gs_2(x^0)\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ g1_k(x^0) & g2_k(x^0)\cdots gs_k(x^0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_s\end{bmatrix}$$

$$[u_1\ u_2\ \cdots\cdots\ u_s]'\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(ニ)$$

$$\begin{bmatrix}v_{k+1}\\ v_{k+2}\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_{k+1}(x^0)\\ f_{k+2}(x^0)\\ \vdots\\ f_n(x^0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g1_{k+1}(x^0) & g2_{k+1}(x^0)\cdots & \cdots gs_{k+1}(x^0)\\ g1_{k+2}(x^0) & g2_{k+2}(x^0)\cdots & \cdots gs_{k+2}(x^0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ g1_n(x^0) & g2_n(x^0)\cdots\cdots & \cdots gs_n(x^0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_s\end{bmatrix}$$

$$[v_{k+1}\ v_{k+2}\ \cdots\cdots\ v_n]'\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(ホ)$$

と表される．そして$k<s$より(ニ)の行列のs個の列は一次従属となり，たとえば最後のs列が他のいくつかの列の一次結合として表されるものとすれば，u_sの値をある一定の範囲で変化させて考えれば明らかなように，(ニ)および(ホ)をみたすu_1，u_2，…，u_s，v_{k+1}，v_{k+2}，…，v_nの値は無数に存在することが分かる．

なお条件(イ)を「…v_{k+1}，v_{k+2}，…，v_nは非負でこの中のいくつかは正の値である」と書きかえ，条件(ロ)を「…u_1, u_2, …, u_sは非負でこの中のいくつかは正の値であり…」と書きかえると，(ニ)および(ホ)をみたすu_1，u_2，…，u_s，v_{k+1}，v_{k+2}，…，v_nの値は，$n<s+(n-k)$が成立しているので，場合によっては無数に存在しうることとなる．さらに条件(ハ)を「…$k+(m-s)$は制約条件式の個数m以上である．つまり$k+(m-s)\geqq m$，よって$k\geqq s$である．なお$n\geqq s+(n-k)$…」と書きかえてもやはり場合によっては無数に存在しうる．

このようにKuhn-Tuckerの最適条件をみたす原変数の値が唯一つしか存在しない場合でも，双対変数の値は無数に存在しうるのである．このことは空間均衡分析にとって極めて重要な点であり，Takayama and Judge (1971) をはじめこれまでの研究者が見落としてきた点であるように思われる．

Kuhn-Tuckerの最適条件をみたす原変数の値が唯一つしか存在しない場合でも双対変数の値は無数に存在しうることは，次に述べる命題や，シンプレックス法によって線形計画問題の最適解を求め，退化した解と(最大問題の時)すべて正の非基本変数のシンプレックス基準が得られるならば，通常双対解法の計算法に従って基底変換を行い，原変数の値を変えることなく異なったシンプレックス基準を得ることができる，というよく経験する事態を考慮すれば直観的にも明らかであろう．その命題とは次のようなことである．

つまりあるx^0が上述の凸計画問題の最適解であるための必要十分条件は，そのx^0が次の線形計画問題の最適解であるということである．上述の凸計画問題の制約条件(1)の関数$g1(x)$，$g2(x)$，…，$gm(x)$をそれぞれ$x=x^0$におけるその接平面 (tangent plane) でおきかえ，また目的関数$f(x)$をその接平面から定数項を除いたものでおきかえることによって次のような線形計画問題が得られる．

$$
\begin{aligned}
&[\nabla g1(x^0)]'x \leqq [\nabla g1(x^0)]'x^0 - g1(x^0)\\
&[\nabla g2(x^0)]'x \leqq [\nabla g2(x^0)]'x^0 - g2(x^0)\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
&[\nabla gm(x^0)]'x \leqq [\nabla gm(x^0)]'x^0 - gm(x^0)\\
&x \geqq 0
\end{aligned}
$$

なる条件の下で$[\nabla f(x^0)]'x$を最大にする．

この線形計画問題において$x=x^0$の時m個の制約条件は容易に分かるように

$$g1(x^0)\leqq 0,\ g2(x^0)\leqq 0, \cdots, gm(x^0)\leqq 0$$

となる．これらのことに注意すれば明らかなように，$x=x^0$が上述の凸計画問題の最適解であるならば，上述のKuhn-Tuckerの最適条件が成立し，そのKuhn-Tuckerの最適条件はちょうどそのx^0がこの線形計画問題の最適解であるための必要十分条件と一致する．逆にある$x=x^0$がこの線形計画問題の最適解であるならば，そのための必要十分条件は容易に分かるように上述のKuhn-Tuckerの最適条件と一致し，従ってそのx^0は上述の凸計画問題の最適解である．なお制約条件が線形の場合に同様の命題が二階堂 (1960, 259-260頁) によって与えられている．

5．最適解の存在とその一意性に関する命題

次に上述の凸計画問題の最適解の存在とその一意性について別の観点から考察してみよう．今制約条件(1)をみたすxが少くとも一つ存在し，(1)式をみたすxの集合がn次元ユークリッド空間の有界閉集合であるならば，$f(x)$は連続関数であるから，Weierstrassの最大値最小値の定理（入江，1957，96および101頁；Mangasarian 1969, p. 189 and p. 198）によってよく知られているように，あるx^0が(1)式の下で$f(x)$を最大にする．また制約条件(1)も$f(x)$も線形である線形計画問題においては次の命題が成立する．

> (1)式をみたすxが少くとも1つ存在し，$f(x)$が(1)式の下で上方に有界であるならば，あるx^0が(1)式の下で$f(x)$を最大にする (Mangasarian 1969, p. 130)．

さらにIIIで説明するように，制約条件(1)が線形で$f(x)$が二次式である凸計画問題，つまり二次計画問題においても線形計画問題の場合と同じ命題が成立するものと考えられる．

線形計画問題および二次計画問題の場合，特殊な制約条件(1)と特殊な$f(x)$のゆえに，(1)式をみたすxの集合はn次元ユークリッド空間の閉集合ではあるが有界とは限らないにもかかわらず，(1)式の下で$f(x)$が上方に有界であればあるx^0が$f(x)$を最大にする．このような特殊な場合を別にすれば，次のような命題が成立する保証は何もない．

> (1)式をみたすxが少くとも1つ存在し，(1)式をみたすxの集合がn次元ユークリッド空間の閉集合であり，(1)式の下で$f(x)$が上方に有界であるな

らば，あるx^0が(1)式の下で$f(x)$を最大にする（Takayama and Judge, 1971, p. 13, Theorem 2.1.1'はこれと同様の命題である）.

このことは簡単な反例で示すことができる．たとえば一次元の場合を考え，$x \geqq 1$で定義された関数$f(x)=1-(1/x)$は上方に有界であるが最大値をとることはない．たしかに$f(x)$は上限1をもつが，上限1は$x \geqq 1$なる条件の下で達成されることはないのである．

ある任意の二組のベクトルx^a, y^a, v^a, u^aおよびx^b, y^b, v^b, u^bが次のようにKuhn-Tuckerの最適条件をみたし，

$$G(x^a)+y^a=0,\ x^a \geqq 0,\ y^a \geqq 0 \quad \cdots\cdots(3-1)$$

$$\nabla f(x^a)+v^a=\nabla G(x^a)'u^a,\ v^a \geqq 0,\ u^a \geqq 0 \quad \cdots\cdots(3-2)$$

$$(x^a)'v^a=0,\ (y^a)'u^a=0 \quad \cdots\cdots(3-3)$$

および

$$G(x^b)+y^b=0,\ x^b \geqq 0,\ y^b \geqq 0 \quad \cdots\cdots(4-1)$$

$$\nabla f(x^b)+v^b=\nabla G(x^b)'u^b,\ v^b \geqq 0,\ u^b \geqq 0 \quad \cdots\cdots(4-2)$$

$$(x^b)'v^b=0,\ (y^b)'u^b=0 \quad \cdots\cdots(4-3)$$

従ってx^aおよびx^bが(1)式の条件の下で$f(x)$を最大にするならば，この二組のベクトルの間にどのような関係が成立するか明らかにしておこう．

まず$f(x)$は連続な偏導関数を持つ（従って微分可能な）凹関数であるから，$0 \leqq t \leqq 1$なる任意の実数tについて

$$f\{(1-t)x^a+tx^b\} \geqq (1-t)f(x^a)+tf(x^b)$$

ただし$f(x)$が厳密に凹（strictly concave）で$0<t<1$かつ$x^a \neq x^b$ならば厳密な不等号

が成立し，$f(x^a)=f(x^b)$は(1)式の下での$f(x)$の最大値である．また(1)式の関数$g1(x)$, $g2(x)$, …, $gm(x)$は連続な偏導関数をもつ凸関数であることより

$$G\{(1-t)x^a+tx^b\} \leqq (1-t)G(x^a)+tG(x^b) \leqq 0$$

$$\{(1-t)x^a+tx^b\} \geqq 0$$

が成立し（$(1-t)x^a+tx^b$）は(1)式をみたす．従って$f(x)$が厳密に凹ならば$x^a=x^b$が成立する．そして厳密に凹であってもなくても$0 \leqq t \leqq 1$なる任意の実数tについて

$$f\{(1-t)x^a+tx^b\}$$
$$=f\{x^a+t(x^b-x^a)\}=f(x^a)=(\text{一定})$$

なる関係が成立する．よって

$$\frac{df(x^a)}{dt}=\nabla f\{(1-t)x^a+tx^b\}'(x^b-x^a)=0$$

$$0 \leqq t \leqq 1$$

が成立する．よって

$$\left.\begin{aligned}&\nabla f(x^a)'(x^b-x^a)=0\\&\nabla f(x^b)'(x^b-x^a)=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

なる関係が成立する．さらに$g1(x)$, $g2(x)$, …, $gm(x)$は微分可能な凸関数だから

$$\left.\begin{aligned}&G(x^a) \geqq G(x^b)+\nabla G(x^b)(x^a-x^b)\\&G(x^b) \geqq G(x^a)+\nabla G(x^a)(x^b-x^a)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

なる関係が成立する．

従って（3−2）式と（4−2）式の左より$(x^b-x^a)'$を乗じて

$$(x^b-x^a)'\nabla f(x^a)+(x^t-x^a)'v^a$$
$$=(x^b-x^a)'\nabla G(x^a)'u^a$$

および

$$(x^b-x^a)'\nabla f(x^b)+(x^b-x^a)'v^b$$
$$=(x^b-x^a)'\nabla G(x^b)'u^b$$

が得られ，(5)式および（3−3）式，（4−3）式より

$$\left.\begin{aligned}&(x^b)'v^a=(x^b-x^a)'\nabla G(x^a)'u^a \geqq 0\\&(x^a)'v^b=(x^a-x^b)'\nabla G(x^b)'u^b \geqq 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

が成立する．また(6)式の左より$(u^b)'$，$(u^a)'$を乗じて

$$(u^b)'G(x^a) \geqq (u^b)'G(x^b)+(u^b)'\nabla G(x^b)(x^a-x^b)$$

$$(u^a)'G(x^b) \geqq (u^a)'G(x^a)+(u^a)'\nabla G(x^a)(x^b-x^a)$$

が得られ，（4−1）式，（4−3）式および（3−1）式，（3−3）式より

$$\left.\begin{aligned}&0 \geqq (u^b)'G(x^a) \geqq (u^b)'\nabla G(x^b)(x^a-x^b)\\&0 \geqq (u^a)'G(x^b) \geqq (u^a)'\nabla G(x^a)(x^b-x^a)\end{aligned}\right\} \cdots(8)$$

が成立する．よって(7)式と(8)式から明らかなように

$$0 \geqq (u^a)'G(x^b) \geqq (u^a)'\nabla G(x^a)(x^b-x^a)$$
$$=(x^b)'v^a \geqq 0$$

および

$$0 \geqq (u^b)'G(x^a) \geqq (u^b)'\nabla G(x^b)(x^a-x^b)$$
$$=(x^a)'v^b \geqq 0$$

また（3−1）式および（4−1）式から明らかなように

$$(u^b)'G(x^a) = -(u^b)'y^a$$
$$(u^a)'G(x^b) = -(u^a)'y^b$$

が成立し，従って

$$(x^a)'v^b = 0, \qquad (x^b)'v^a = 0$$
$$(u^a)'y^b = 0, \qquad (u^b)'y^a = 0$$

つまり，

$$\begin{bmatrix} x^a \\ y^a \\ v^a \\ u^a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} v^b \\ u^b \\ x^b \\ y^b \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} x^a \\ y^a \\ v^a \\ u^a \end{bmatrix} \geqq 0, \quad \begin{bmatrix} v^b \\ u^b \\ x^b \\ y^b \end{bmatrix} \geqq 0 \cdots (9)$$

という極めて興味深い関係が成立することが分かる．

このことより次のような命題Aが成立することが明らかであり，命題Aは解の一意性を検討する際に極めて重要である．命題Bはこれまでに本稿で述べた命題を要約したものである．

【命題A】 あるベクトル x^a，y^a，v^a，u^aが Kuhn-Tucker の最適条件をみたし，その要素のうち正の値をとっているもの（グループ P の要素と呼ぶ）が $(m+n-L)$ 個あるものとしよう．ただし L は $0 \leqq L \leqq m+n$ なる条件をみたすある整数である．この時 $(m+n-L)$ 個のグループ P の要素の $(m+n-L)$ 個の相補変数を 0 に固定した Kuhn-Tucker の最適条件をみたす解がただ1つしかないならば，このベクトル x^a，y^a，v^a，u^aは Kuhn-Tucker の最適条件をみたすただ1つの解である．

【命題B】 $L=0$ でかつ x^a，y^aの要素でグループ P の要素となっているものが m 個より少ないならば，Kuhn-Tucker の最適条件をみたす無数の解が存在する．$L>0$ でかつ m 個より少ないならば，場合によっては Kuhn-Tucker の最適条件をみたす無数の解が存在しうる．$L>0$ でかつ m 個以上であっても，場合によっては無数の解が存在しうる．

III　二次計画問題の解法と均衡解の一意性

線形計画問題の解法の一般化として早くから二次計画問題の解法に関する多数の研究が行われているが，どのような解法が二次計画問題として定式化された空間均衡分析の均衡解の比較静学的分析やその解の性格の研究に適した効率的な解法であるか考察してみよう．Takayama and Judge（1964 b）によって空間均衡分析が実践的な二次計画問題として展開された当時，よく知られた二次計画問題の解法として次のようなものがあった．つまり，Beale（1959, 1967），Wolfe（1959），Houthakker（1960），Dantzig（1963, pp. 490-497）の解法であり，Takayama and Judge（1964 b, 1971, pp. 468-483）はシンプレックス法による線形計画問題の解法（アルゴリズム）を若干修正するだけでそのまま応用しうる Wolfe（1959）の解法を利用している．Dantzig（1963）の解法は Wolfe（1959）の解法をより一層簡潔にし，かつシンプレックス法により近づけ改善したものであり，Panne and Whinston（1964 a，b）によってさらに展開され確立されたものである．Panne and Whinston（1966 a，b，1969）はさらに Dantzig の解法を展開し，Houthakker の解法および Wolfe の解法をその中により効率的な形で吸収しうること，および計算のしかたがかなり異なっている Beale の解法と比較して多くの場合計算がより効率的であることを示した．もちろん Beale（1967, pp. 154-163）が言うように，特殊な場合には必ずしもそうは言えないかも知れないが，Beale，Wolfe，Dantzig の解法のその他の理論的ないし実験的な比較研究（Boot, 1964, pp. 186-200；Raymond，1972）を参照しても Dantzig の解法は大変安定したより効率的な解法であるように思われる．

Dantzig の解法は，これまで述べたような二次計画問題をその一部として含むより一般的な計画問題，つまり Lemke and Howson（1964）によって非ゼロ和二人ゲーム（bimatrix game）の均衡点を求める問題に関連して最初に導入され，その後明確な形で定式化されその解法が研究されてきた complementary pivot の問題（Lemke, 1965，1968；Cottle and Dantzig, 1968 a，b；Cottle，1968）の解法としても効率的に適用しうるものであり，幾何学的解法にヒントを得てその後展開された二次計画問題の新たな解法（Least-Distance Programming）とも同等なアルゴリズムを与えるものであることが示された（Tucker, 1968；Cottle and Djang, 1979）．

Karmarkar（1984）に始まり Barnes（1986），Gill *et al.*（1986）などによって展開された新たな線形計画問題の解法は，Interior-Point Method ないし Barrier-Function Method（Luenberger, 1984, pp. 365-395）と呼ばれている解法であり，計算の複雑さという点ではシンプレックス法の組合せ論的複雑さではなく多項式的複雑さ（Hačijan，1979）であり，極めて効率的な計算法であると注目された．そしてこのような観点からの二次計画問題の新たな解法も展開されている

(Kapoor and Vaidya, 1986; Ye, 1989). しかしそれは実際には期待されるほど効率的な解法ではなく，特殊な場合を除けばむしろシンプレックス法の方がより効率的で安定した解法であるように考えられる (Tomlin, 1987, 1989). Tomlin (1989) は解法の評価にあたって次のような点を考慮に入れる必要があると述べている．つまり stability, ease of use, restart efficiency, compatibility with other mathematical programming procedures, usability of the solutions および raw speed である．このような点から考えると，計算のスピード (raw speed) と言う点においても特殊な場合を別としてより効率的であり，かつその他の使いやすさ (特に得られる解の有用性) という点でも，与件を変化させ最適解の軌跡をパラメトリックに求め比較静学的分析を行う場合には，ずっと便利であるシンプレックス法およびそれを基礎とする Dantzig (1963), Panne and Whinston (1964 a, b, 1969) の二次計画問題の解法がこれまでの Interior-Point Method よりも優れていると言えよう．なおパラメトリックに解の軌跡を求めるという点では，Palacios-Gomez *et al*. (1982) に示されるような二次計画問題の解法も，次に述べるような疎な行列を含む大規模な計画問題を解くという点では優れていても，それほど便利なものではない．

現実の空間均衡分析において定式化される二次計画問題では，ゼロでない要素がまばらでかつ大きな行列 (large sparse matrix) を取り扱う場合が多いように考えられる．むだなく簡潔に計画問題を定式化し，かつこのような疎な行列に関する計算を如何に効率よく行うかが大規模な計画問題の計算効率を大きく左右することが知られており，そのための種々の工夫が試みられている (Gill *et al*., 1984；Heath, 1984；Cottle and Goheen, 1978). 最近ポリトープの辺 (face) の構造の研究に基づき疎である性質 (sparsity) を保存するような新たな切除平面 (cutting plane) の形成と分技限定法 (branch and bound method) を組合わせて効率よくあるタイプの大規模な混合整数線形計画問題を解くことができるようになったと報告されているが (Crowder *et al*., 1983；Van Roy and Wolsey, 1987；Wolsey, 1989), このことは疎な計画問題に関する研究の重要性を示しているように思われる．しかしこれらの問題は今後の研究課題として残しておきたい．

最初に述べたようにここでは，二次計画問題として定式化された空間均衡分析の均衡解の比較静学的分析や，その解の性格の研究に適した効率的な解法を明らかにすることを課題としている．このような観点から考えると，Dantzig (1963), Panne and Whinston (1964 a, b, 1969) の解法が最も適しているように思われる．今村 (1969, 314-355頁) および川口 (1973, 127-183頁) は Dantzig の解法に関する研究を行っており，特に川口 (1973) は Panne and Whinston (1969) のパラメトリックな解法と同じ解法を異なった観点から考察している．そこで本稿の目的にそってこれまでの研究を総合し，パラメトリックな二次計画問題の解法を明らかにしておこう．

1．パラメトリックな解法の考え方

線形計画におけるシンプレックス法 (その双対解法) にしても，またそれと密接な関係を持つ Dantzig (1963), Panne and Whinston (1964 a, b, 1969) による二次計画問題の解法 (その双対解法) にしても，その計算の出発点として一定の条件をみたす解が必要であるが，もしそのような一定の条件をみたす解が自明でない場合には，最初に人工変数を利用するなどの補助的な方法で一定の条件をみたす解を求め，次にその解を出発点として本来の解法 (これも Wolfe (1959) の解法のように二段階になることがある) で最適解を求めることとなる．一般にこのような二段階の (Wolfe の解法では三段階の) 計算が必要とされる．しかしこれから述べるように一段階だけで計算をすべてすませることもできる．

線形計画法の場合このような方法は Self-Dual Parametric Algorithm (Dantzig, 1963, pp. 245-247) と呼ばれており，その要点は次のとおりである．線形計画問題は一般に

$Ax \leqq b$, $x \geqq 0$ なる条件の下で x に関して $f=c'x$ を最大にせよ，ただし A は与えられた $m \times n$ 行列，b は与えられた m 次列ベクトル，c は与えられた n 次列ベクトル，そして x は n 次元の変数列ベクトルである．…MLP

と定式化される．そして b のある要素が負であり，かつ c のある要素が正である場合には直ちにシンプレックス法 (その双対解法) を利用して計算を始めることはできない．しかし b と c を適当に変更すれば，その問題の最適解が自明となる．つまり ϕ をあるベクトルとして，ϕ のすべての要素をその絶対値で置き換えることによって得られるベクトルを ϕ_a で表し，

$$\phi^+ = \frac{1}{2}(\phi+\phi_a), \quad \phi^- = \frac{1}{2}(\phi-\phi_a)$$

よって $\phi=\phi^+ + \phi^-$

なる表記法を導入しよう．容易に分かるように，$\boldsymbol{\phi}^+$は $\boldsymbol{\phi}$ の負の要素をゼロで置き換えたものであり，$\boldsymbol{\phi}^-$は $\boldsymbol{\phi}$ の正の要素をゼロで置き換えたものである．そこで上述の線形計画問題において b と c を

$b=b^+ + \theta b^-$，$c=c^- + \theta c^+$

ただしパラメータ $\theta=0$

で置き換える．すると容易に分かるように最初のシンプレックス表で最適解 $x=0$ が得られる．そこでシンプレックス表を利用してパラメータ θ を 0 から次第に 1 まで増加させて最適解の軌跡をパラメトリックに求めれば $\theta=1$ の時最初に与えられた問題の最適解が得られる．このように b と c をパラメトリックに変化させて，次々と連続的に変化する問題の最適解を追いかけることによって最初の問題の最適解を求めるのである．このような解法を利用すれば，与件の変化に応じて b と c の要素が変化する場合の最適解の軌跡を全く同じ算法で求めることが出来ることとなり，比較静学的分析や最初の問題の解の構造を分析するのに極めて好都合となる．さらに Primal-Dual Algorithm (Dantzig, 1963, pp. 247-252) など，他の解法もこのようなパラメトリックな解法の特殊な場合として統一的に理解しうる (Panne and Whinston, 1968)．

しかしこのような解法が可能であるためには，$0\leqq\theta\leqq1$ なるすべての θ の値に対して上述の線形計画問題が最適解を持っていなければならない．そうでなければ θ を変化させて最適解を追いかけることはできないからである．つまり最初に与えられた線形計画問題 ($\theta=1$) に最適解があるならば $0\leqq\theta\leqq1$ なるすべての θ に対して最適解があることを示さねばならない．Dantzig (1963, pp. 245-247) はこのことを構成的な手法（実際に計算のアルゴリズムを構成するという手法）で証明している．しかしこのことは線形計画法の双対定理 (Dantzig, 1963, pp. 128-140；Mangasarian, 1969, pp. 126-130，二階堂，1960，172-177 頁）を利用すれば極めて簡単に証明される．つまり $\theta=0$（上述のようにこの時は明らか）と $\theta=1$ の時最適解が存在するならば，双対定理から容易に分かるように

$$Ax^0 \leqq b^-,\ x^0 \geqq 0,\ A'u^0 \geqq c^-,\ u^0 \geqq 0$$
$$Ax^1 \leqq b,\ x^1 \geqq 0,\ A'u^1 \geqq c,\ u^1 \geqq 0$$

ただし u^0，u^1はある m 次列ベクトル

なる条件をみたす x^0，x^1，u^0，u^1が存在する．従って $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について

$$A\{(1-\theta)x^0+\theta x^1\} \leqq (b^- + \theta b^-),$$
$$(1-\theta)x^0+\theta x^1 \geqq 0$$
$$A'\{(1-\theta)u^0+\theta u^1\} \geqq (c^- + \theta c^+),$$
$$(1-\theta)u^0+\theta u^1 \geqq 0$$

なる関係が成立し，このことから明らかなように

$Ax\leqq(b^+ + \theta b^-)$，$x\geqq0$なる条件の下で$x$に関して $f=(c^- + \theta c^+)'x$ を最大にする

なる線形計画問題とその双対問題とが共に実現可能解を持つことが分かり，従って双対定理によって最適解が存在することが分かる．このようなパラメトリックな解法を二次計画問題の場合にも確立することがここでの課題である．

2．二次計画問題における Kuhn-Tucker の最適条件

二次計画問題は一般に次のように定式化される．

$Ax\leqq b$，$x\geqq0$ なる条件の下で $f=c'x-(\frac{1}{2})x'Wx$ を x に関して最大にする，ただし W は対称で与えられた $n\times n$ 非負定符号行列であり，その他の記号は上述の線形計画問題 MLP の場合と同じである． ⋯MQP

ある x^0がこの二次計画問題の最適解であるための必要十分条件は，Kuhn-Tucker の最適条件が成立すること，つまり

$$Ax^0+y^0=b,\ x^0\geqq0,\ y^0\geqq0$$
$$-Wx^0-A'u^0+v^0=-c,\ u^0\geqq0,\ v^0\geqq0$$
$$x^{0\prime}v^0=0,\ y^{0\prime}u^0=0$$

なる関係をみたす m 次列ベクトル y^0，u^0および n 次列ベクトル v^0が存在する

という条件が成立することである．従ってこの二次計画問題の最適解を得るためには

$$Ax+y=b \quad \cdots\cdots Q1$$
$$-Wx-A'u+v=-c \quad \cdots\cdots Q2$$
$$x'v=0,\ y'u=0 \quad \cdots\cdots Q3$$
$$x\geqq0,\ y\geqq0 \quad \cdots\cdots Q4$$
$$u\geqq0,\ v\geqq0 \quad \cdots\cdots Q5$$

なる条件をみたす x, y, u, v を求めればよいことになる．

ところで線形計画法の場合にならって，基本変数と非基本変数を区別し，Q 1，Q 2 式をシンプレックス表

の形式で表1のように表し，これを出発点として基底変換を行い新たなシンプレックス表を次々と作って計算を進める．

表1

		x	u
v	$-c$	$-W$	$-A'$
y	b	A	0

なお $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)'$，$u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)'$，$v=(v_1, v_2, \cdots, v_n)'$なる表記法を用いるものとし，$y_i$および x_jを原変数，u_iおよび v_jを双対変数と呼ぶ（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）．また y_i，u_iの中の一方のみおよび x_j，v_jの中の一方のみが基本変数であり他方が非基本変数であるという条件を相補条件（complementary property）と呼び，1組の変数 y_i，u_iの中の一方を他方の相補変数，同じく x_j，v_jの中の一方を他方の相補変数（complementary variable）と呼ぶ（$i=1, 2, \cdots, \mathrm{m}$；$j=1, 2, \cdots, \mathrm{n}$）．容易に分かるようにQ3式は相補変数のどちらか一方が0でなければならないことを示しており，相補条件がみたされればQ3式が成立する．さらに上からr番目の基本変数と左からr番目の非基本変数とが互いに相補変数となっており，従って相補条件も満たしているシンプレックス表を標準シンプレックス表（standard simplex tableau）と呼ぶ（r=1, 2, …, m+n）．標準シンプレックス表の基本変数の値が非負でQ4，Q5式が成立しておれば最適解が得られたことになる．

3．二次計画問題のパラメトリックな解法の実行可能性

線形計画法における Self-Dual Parametric Algorithm の場合と同様に b と c を

$b=b^++\theta b^-$，$c=c^-+\theta c^+$，ただしパラメータ $\theta=0$

で置き換える．すると表1から明らかなように基本変数はすべて非負であり相補条件がみたされているから，

$v=-c^-$，$y=b^+$，$x=0$，$u=0$

なる自明の最適解が得られる．従って $\theta=0$ の時には明らかに最適解が存在する．次に $\theta=1$ の時に最適解が存在するならば $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について上述の二次計画問題 MQP が最適解を持つことを明らかにしておこう．この点は，後の5．で述べるように構成的手法でも証明しうるが，Panne and Whinston (1969，特に pp. 524-526) が明確にしていない点であるように思われる．なお任意の θ について $Ax\leqq(b^++\theta b^-)$，$x\geqq0$ なる条件をみたす x の集合が n 次元ユークリッド空間の有界閉集合であるという保証は何もないことに注意していただきたい．Markowitz (1959) の Critical Line Method はそのような場合を扱っている．

非線形計画法の場合にも一般的な双対定理が成立することが知られている（Mangasarian, 1969, pp. 113-126；Mangasarian and Ponstein, 1965）．その特殊な場合として二次計画問題についての双対定理を導くこともできるが，二次計画問題の双対定理は Dorn (1960) 等によって早くから明らかにされており，私達の問題に合わせて変形すると次のように述べられる．つまり原問題を

$Ax\leqq b$，$x\geqq0$ なる条件の下で $f(x)=c'x-(1/2)x'Wx$ を最大にする x を求めよ

のような最大化問題とすれば，その双対問題は

$Wx+A'u\geqq c$，$u\geqq0$ なる条件の下で

$g(x, u)=b'u+(1/2)x'Wx$ を最小にする

x と u を求めよ

のような最小化問題となる．そしてある x^0が原問題の最適解であるならば，ある u^0（m 次列ベクトル）が存在して x^0と u^0は双対問題の最適解となり，f の最大値 $f(x^0)$ と g の最小値 $g(x^0, u^0)$ とは一致する．逆にある x^dと u^dが双対問題の最適解であるならば，$W(x-x^d)=0$ なる条件をみたす x（x^dと等しいとは限らない）の中に原問題の最適解となるある x^0が存在し，f の最大値 $f(x^0)$ と g の最小値 $g(x^d, u^d)$ は一致する（Dorn, 1960, p.156；Mangasarian, 1969, pp. 123-126）．

なお x^1が原問題の実現可能解であり $Ax^1\leqq b$，$x^1\geqq0$ をみたし x^2と u^2が双対問題の実現可能解であり $Wx^2+A'u^2\geqq c$，$u^2\geqq0$ をみたすならば，

$f(x^1)\leqq g(x^2, u^2)$

なる関係が成立する．この命題は弱い双対定理と呼ばれており，W が非負定符号行列であることより次のように容易に導びかれる．つまり

$Ax^1\leqq b,\ u^2\geqq0$　より　$b'u^2\geqq(x^1)'A'u^2$

$Wx^2+A'u^2\geqq c,\ x^1\geqq0$　より

$(x^1)'Wx^2+(x^1)'A'u^2\geqq c'x^1$

Wが非負定符号より　$(x^1-x^2)'W(x^1-x^2)\geqq0$

なる関係が成立し，これらの式を整理すると弱い双対定理が得られる．

二次計画問題の双対定理を利用して，$\theta=1$ の時上述の二次計画問題 MQP に最適解が存在するならば，

$0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について最適解が存在することを示そう．今 $\theta=0$ と $\theta=1$ の時最適解が存在するから，双対定理によって

$$Ax^0 \leqq b^-,\ x^0 \geqq 0,\ Wx^0+A'u^0 \geqq c^-,\ u^0 \geqq 0$$
$$Ax^1 \leqq b,\ x^1 \geqq 0,\ Wx^1+A'u^1 \geqq c,\ u^1 \geqq 0$$

なる条件をみたす x^0, x^1, u^0, u^1が存在する．従って $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について

$$A\{(1-\theta)x^0+\theta x^1\} \leqq (b^+ + \theta b^-)$$
$$(1-\theta)x^0+\theta x^1 \geqq 0$$
$$W\{(1-\theta)x^0+\theta x^1\}+A'\{(1-\theta)u^0+\theta u^1\} \geqq (c^- + \theta c^+)$$
$$(1-\theta)u^0+\theta u^1 \geqq 0$$

なる関係が成立し，このことから明らかなように

$Ax \leqq (b^+ + \theta b^-)$, $x \geqq 0$ なる条件の下で x に関して $f(x) = (c^- + \theta c^+)'x - \left(\frac{1}{2}\right)x'Wx$ を最大にする

なる二次計画問題とその双対問題が共に実現可能解を持つ．従って弱い双対定理から明らかなように，任意の θ について上の二次計画問題 *MQP* の目的関数 $f(x)$ は上方に有界である．少なくとも一つの実現可能解を持ち目的関数が上方に有界な最大化二次計画問題は次に示すように最適解を持ち，従って $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について上の二次計画問題は最適解を持つ．

ところで $Ax\leqq b$, $x\geqq0$ なる条件をみたす少なくとも一つの x が存在し，この条件の下で目的関数 $f(x)=c'x-(1/2)x'Wx$ が上方に有界であるものとしよう．ここで，すべての要素が1に等しい n 次列ベクトルを e とすれば，つまり $e=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)'$ とすれば，$Ax\leqq b$, $x\geqq0$ なる条件の下で $e'x$ は非負で下方に有界であるから最小値を持ち，その最小値を $l_0\geqq0$ とする．そして，$e'x\leqq(l_0+l)$ なる新たな制約条件を追加して，

$Ax\leqq b$, $e'x\leqq(l_0+l)$, $x\geqq0$ なる条件の下で $f(x)=c'x-(1/2)x'Wx$ を x に関して最大にする，ただし l はパラメータで $l\geqq0$ なる条件をみたす

なる最大化二次計画問題を考える．この最大化問題は任意の $l\geqq0$ について，制約条件をみたす x の集合が n 次元ユークリッド空間の有界閉集合であるから，最適解を持ち $f(x)$ は最大値をとるので，その $f(x)$ の最大値を $F(l)$ で示そう．すると $F(l)$ は $l\geqq0$ なる区間で定義された非減少凹関数である．

なぜなら l の値が $0\leqq l_1<l_2$ なる任意の値 l_1, l_2 である時 $f(x)$ を最大にする x を x^1, x^2 としよう．すると $e'x^1\leqq l_0+l_1<l_0+l_2$ が成立することより $f(x^1)\leqq f(x^2)$, つまり $F(l_1)\leqq F(l_2)$ が成立する．また $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ について

$$A\{\theta x^1+(1-\theta)x^2\} \leqq b$$
$$e'\{\theta x^1+(1-\theta)x^2\} \leqq l_0 + \{\theta l_1+(1-\theta)l_2\}$$
$$\theta x^1+(1-\theta)x^2 \geqq 0$$

および $f(x)$ の定義と W が対称な非負定符号行列であることより

$$f\{\theta x^1+(1-\theta)x^2\} = \theta f(x^1)+(1-\theta)f(x^2) + \left(\frac{1}{2}\right)\theta(1-\theta)(x^1-x^2)'W(x^1-x^2) \geqq \theta f(x^1)+(1-\theta)f(x^2)$$

なる関係が成立するから，容易に分かるように

$$F\{\theta l_1+(1-\theta)l_2\} \geqq f\{\theta x^1+(1-\theta)x^2\} \geqq \theta F(l_1)+(1-\theta)F(l_2)$$

が成立する．従って $F(l)$ は $l\geqq0$ で定義された非減少凹関数であり，Fleming の定理（Mangasarian, 1969, p. 62）によって $l>0$ で連続な関数であることが分かる．

さらに重要なことは，二次計画問題の最適条件から明らかなように，ある自然数 s と適当な値 $l_1<l_2<\cdots<l_s$ を選べば $F(l)$ は $l_i\leqq l\leqq l_{i+1}$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ s-1)$ なる区間および $l\geqq l_s$ なる区間で l の二次関数または一次関数である．そして最初の仮定より $F(l)$ は任意の l についてある値より小さく上方に有界となるから，$l\geqq l_s$ なる区間で $F(l)$ はある一定値に等しく，そのグラフは水平にならなければならない．このことは最初の二次計画問題が最大値を持つことを意味する．かくて $Ax\leqq b$, $x\geqq0$ なる条件をみたす x が少なくとも一つ存在し，その条件の下で $f(x)=c'x-(1/2)x'Wx$ が上方に有界ならば，その条件の下で $f(x)$ は最大値をとることが分かる．

4．パラメトリックな解法の基本命題

このように上述の二次計画問題 *MQP* は，$\theta=0$ の時自明の最適解を持ち，$\theta=1$ の時に最適解を持つならば $0\leqq\theta\leqq1$ なる任意の θ についても最適解を持つ．従ってパラメータ θ を0から次第に1まで増加させて，連続的に変化する問題の最適解の軌跡をパラメトリックに求めれば，$\theta=1$ の時最初に与えられた問題の最適解が得られる．逆に θ を0から1まで増加させることができない場合には，最初に与えられた問題には最適解がないことになる．具体的にそのようなアルゴ

リズムを示すための基礎として，次の二つの命題を明らかにしておこう．最初の命題は川口(1973，127-183頁）によって取り上げられた命題であり，二番目の命題は Panne and Whinston（1964 a，b，1969）によって与えられたものを一番目の命題を利用して私達の問題に合うよう変形したものである．

【命題 1】二組のベクトル x^a, y^a, u^a, v^aおよび x^b, y^b, u^b, v^bが共に上述の Q 1, Q 2 式をみたすならば(b と c は任意の θ に対応するものでよい)

$$(x^b-x^a)'(v^b-v^a)+(y^b-y^a)'(u^b-u^a)$$
$$=(x^b-x^a)'W(x^b-x^a)\geqq 0$$

なる関係が成立する．また s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}をある定数として

$$h_1=-s_{11}l_1-s_{12}l_2$$
$$h_2=-s_{21}l_1-s_{22}l_2$$

なる条件をみたす任意の h_1, h_2, l_1, l_2について $h_1l_1+h_2l_2\geqq 0$ が成立するならば

$s_{11}\leqq 0$,　$s_{22}\leqq 0$,　$s_{11}s_{22}-(1/4)(s_{12}+s_{21})^2\geqq 0$

よって $s_{11}s_{22}=0$ ならば $s_{12}=-s_{21}$が成立する．

【証明】二組のベクトルが Q 1 式をみたすことより

$$A(x^b-x^a)+(y^b-y^a)=0$$

よって左より $(u^b-u^a)'$を乗じて

$$(u^b-u^a)'A(x^b-x^a)+(u^b-u^a)'(y^b-y^a)=0$$

が，同じく Q 2 式をみたすことより

$$-W(x^b-x^a)-A'(u^b-u^a)+(v^b-v^a)=0$$

よって左より $(x^b-x^a)'$を乗じて

$$-(x^b-x^a)'W(x^b-x^a)-(x^b-x^a)'A'(u^b-u^a)$$
$$+(x^b-x^a)'(v^b-v^a)=0$$

が成立し，得られた二つの式を加えることによって容易に前半の命題が得られる．

後半は

$$h_1l_1+h_2l_2=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} -s_{11} & -s_{12} \\ -s_{21} & -s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} -s_{11} & -\dfrac{s_{12}+s_{21}}{2} \\ -\dfrac{s_{12}+s_{21}}{2} & -s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

なる関係が成立し

$$\begin{bmatrix} -s_{11} & -\dfrac{s_{12}+s_{21}}{2} \\ -\dfrac{s_{12}+s_{21}}{2} & -s_{22} \end{bmatrix}$$

が非負定符号行列となることより明らかである【証明終り】．

表 1 の標準シンプレックス表を計算に便利なように次のように変形して表 1 A としておこう．表 1 A の右はしに付け加えられた θ 列は，基本変数となることはないが，シンプレックス表の基底変換を行う場合には他の列と同様に扱われるものとする．

表 1 A

		x	u	θ
v	$-c^-$	$-W$	$-A'$	$-c^+$
y	b^+	A	0	b^-

この表 1 A に何回かの基底変換をほどこすと次に示す標準シンプレックス表 2 が得られるものとしよう．

表 2

		l_i	l_j	θ
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
h_i	S_{i0}	$\cdots S_{ii}\cdots\cdots$	$S_{ij}\cdots$	r_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
h_j	S_{j0}	$\cdots S_{ji}\cdots\cdots$	$S_{jj}\cdots$	r_j
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

表 2 において h_iと h_jは上から i 番目と j 番目の基本変数であり l_iと l_jは左から i 番目と j 番目の非基本変数であり，h_iと l_iおよび h_jと l_jは互いに相補変数となっている．すると標準シンプレックス表 1 A の性質が標準シンプレックス表 2 にも引きつがれることを示す次の命題 2 が成立する．

【命題 2】標準シンプレックス表 2 において $S_{ii}\leqq 0$, $S_{jj}\leqq 0$ が成立する．そして $S_{ii}S_{jj}=0$ ならば $S_{ij}=-S_{ji}$ が成立する．また h_iと l_jが共に原変数であるか共に双対変数である(つまり h_iと l_jが同種の変数である)ならば $S_{ij}=-S_{ji}$が成立し，h_iと l_jのどちらか一方が原変数で他方が双対変数である（つまり h_iと l_jが異種の変数である)ならば $S_{ij}=S_{ji}$が成立する．従って h_iと l_jが異種の変数で $S_{ii}S_{jj}=0$ ならば $S_{ij}=S_{ji}=0$ が成立する．以上の命題は i と j を入れかえても成立する．

【証明】標準シンプレックス表２は，基本変数の順序及び非基本変数の順序を全く同様に入れかえることによって，次のような標準シンプレックス表２'になる．

表２'

		$v_a \quad y_b \quad u_a \quad x_b$	θ
x_a	⋮		⋮
u_b	⋮	$[\overline{S_{ij}}]$	⋮
y_a	⋮		⋮
v_b	⋮		⋮

ただし x_a, u_b, y_a, v_bはそれぞれ基本変数となっている x, u, y, v の要素をまとめて適当な次数の列ベクトルとして表したものであり，v_a, y_b, u_a, x_bはそれぞれ非基本変数となっている v, y, u, x の要素をまとめて適当な次数の列ベクトルとして表したものである．もちろん x_aと v_a, y_bと u_b, y_aと u_a, x_bと v_bはそれぞれ同じ次数の列ベクトルであり互いに相補変数ベクトルとなっている．行列 $[\overline{S_{ij}}]$ は表２の行列 $[S_{ij}]$ の行と列を全く同様に変数の入れかえに対応して入れかえたものである．なお基本変数の中に v_bが含まれなかったりする他の場合にも，同様の論法で同じ結論が得られるので，最も一般的な場合について証明しておこう．

標準シンプレックス表２'に対応してＱ１,Ｑ２式は，変数の順序および等式の順序を適当に入れかえることにより，次のように変形される．

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_a \\ b_b \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{Q1'}$$

$$-\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c_a \\ -c_b \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{Q2'}$$

ここで

$$\overline{W}=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix},\ W_{11}'=W_{11},\ W_{22}'=W_{22}$$

$$W_{21}'=W_{12}$$

は変数及び等式の順序の入れかえに対応して W の行と列を入れかえることによって得られる対称な非負定符号行列である．

そこでＱ１'とＱ２'式を書きかえると次のようになる．次式の基本変数の係数行列を H，非基本変数の係数行列を $\bar{H}$ とすれば，H は正則である．

$$\begin{bmatrix} W_{11} & A_{21}' & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ A_{11} & 0 & I_3 & 0 \\ W_{21} & A_{22}' & 0 & -I_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_a \\ u_b \\ y_a \\ v_b \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} -I_1 & 0 & A_{11}' & W_{12} \\ 0 & I_2 & 0 & A_{22} \\ 0 & 0 & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{12}' & W_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ y_b \\ u_a \\ x_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_a \\ b_b \\ b_a \\ c_b \end{bmatrix}$$

ただし，I_1, I_2, I_3, I_4は適当な次数の単位行列である．従って H の対称な小行列 H_0

$$H_0=\begin{bmatrix} W_{11} & A_{21}' \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix},$$ ここでA_{21}の各行は一次独立でなければならない

も正則であり，対称な逆行列 $H_0^{-1}=M$

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},\ M_{11}'=M_{11},\ M_{22}'=M_{22}$$

$$M_{21}'=M_{12}$$

ただし M は H_0と同じ次数の小行列に分割されている

が存在する．そして

$$R_1=W_{21}M_{11}+A_{22}'M_{21},\quad R_2=W_{21}M_{12}+A_{22}'M_{22}$$

$$R_3=R_1A_{11}'-A_{12}',\quad R_4=R_1W_{12}+R_2A_{22}-W_{22}$$

ここで明らかに $R_4=R_4'$が成立する

なる記号を用いると

$$[\overline{S_{ij}}]=H^{-1}\bar{H}$$

$$=\begin{bmatrix} -M_{11} & M_{12} & M_{11}A_{11}' & R_1' \\ -M_{21} & M_{22} & M_{21}A_{11}' & R_2' \\ A_{11}M_{11} & -A_{11}M_{12} & -A_{11}M_{11}A_{11}' & -R_3' \\ -R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{bmatrix}$$

この行列は要素の符号を無視すると対称な行列となっている

なる関係が成立する．このことおよび $[\overline{S_{ij}}]$ と $[S_{ij}]$ の関係から明らかなように，h_iと l_jが同種の変数ならば $S_{ij}=-S_{ji}$が成立し，異種の変数ならば $S_{ij}=S_{ji}$なる関係が成立する．

また標準シンプレックス表２の変数の値はＱ１，Ｑ２式をみたすから（なお b と c は任意の θ の値に対応するものであってよい），非基本変数のうち l_iと l_jだけを変化させて基本変数の値を調整すると，l_iと l_jの任意の増分 Δl_iと Δl_jに対応する h_iと h_jの増分 Δh_iと Δh_jは

$$\Delta h_i = -S_{ii}\Delta l_i - S_{ij}\Delta l_j$$
$$\Delta h_j = -S_{ji}\Delta l_i - S_{jj}\Delta l_j$$

と表され，命題1から明らかなように（他の非基本変数の増分は0だから）

$$\Delta h_i \times \Delta l_i + \Delta h_j \times \Delta l_j \geqq 0$$

が成立し，従って命題1より $S_{ii} \leqq 0$, $S_{jj} \leqq 0$ が成立しかつ $S_{ii}S_{jj}=0$ ならば $S_{ij}=-S_{ji}$ が成立する．このことより h_i と l_j が異種の変数で $S_{ii}S_{jj}=0$ ならば $S_{ij}=-S_{ji}$ かつ $S_{ij}=S_{ji}$ ゆえ $S_{ij}=S_{ji}=0$ が成立する．なお容易に分かるように i と j を入れかえても同様の結論が得られる【証明終り】．

標準シンプレックス表の構造は以後の分析にとって大変重要であるから，この点について若干付け加えておきたい．つまり標準シンプレックス表2’の変数の順序を入れかえると次のような大変見やすい標準シンプレックス表2”が得られる．

そしてこのシンプレックス表2”の変数もQ1，Q2式をみたすから，非基本変数ベクトルの値を変化させ（その任意の増分を Δv_a, Δu_a, Δx_b, Δy_b とする）基本変数ベクトルの値をQ1,Q2式が成立するように調整すれば（その増分を Δx_a, Δy_a, Δv_b, Δu_b とする），命題1から明らかなように

$$\begin{bmatrix}\Delta v_a\\ \Delta u_a\\ \Delta x_b\\ \Delta y_b\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\Delta x_a\\ \Delta y_a\\ \Delta v_b\\ \Delta u_b\end{bmatrix}=$$

$$-\begin{bmatrix}\Delta v_a\\ \Delta u_a\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}-M_{11} & M_{11}A'_{11}\\ A_{11}M_{11} & -A_{11}M_{11}A'_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta v_a\\ \Delta u_a\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\Delta x_b\\ \Delta y_b\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}R_4 & R_2\\ R'_2 & M_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_b\\ \Delta y_b\end{bmatrix}\geqq 0$$

なる関係が成立する．この式よりたとえば

$$\begin{bmatrix}M_{11} & -M_{11}A'_{11}\\ -A_{11}M_{11} & A_{11}M_{11}A'_{11}\end{bmatrix} \text{および} \begin{bmatrix}-R_4 & -R_2\\ -R'_2 & -M_{22}\end{bmatrix}$$

が非負定符号行列であることが分かる．

5．パラメトリックな解法のアルゴリズム

パラメータ θ を0から1まで次第に増加させて最適解の軌跡をパラメトリックに求めるためのアルゴリズムは以上の命題を利用して次のように与えられる．なお説明を分かりやすくするために，図1でこのアルゴリズムのフローチャートを示しておく．

【STEP 0】 表1Aを準備する．この表は $\theta=0$ の時の自明な最適解を与える標準シンプレックス表であり，言うまでもなく命題2が成立している．パラメータ θ の現在値を今後 θ_T で示すこととし，$\theta_T=0$ としておく．またこの表の基本変数の値のいくつかは0となっている場合が多いと考えられるが，基本変数の値を微小量変化させ（つまり摂動させ）正の値にしたPerturbed Problem (Dantzig, 1963, pp. 231-237) を考えることにより，以後の計算過程においては，その値が0となる基本変数は高々1つであるものと考えて分析を進めることが許される．このような手法は摂動法 (Perturbation Method) と呼ばれているが，この摂動法を利用することにより一般性を失うことなく，最初のシンプレックス表の基本変数の値はすべて正で，計算過程で0となる基本変数は高々1つであるものと考えてよい．もちろん摂動法は理論的考察においては極めて重要であるが，私達の経験によると実際には摂動法にたよらなくともスムーズにこれから述べる計算は終了する．

【STEP 1】 $\theta=\theta_T$ に対応する最適解を与える標準シンプレックス表を一般に次の表S1Aのように表し，基本変数の列ベクトルをhで表す．

表2”

		v_a	u_a	x_b	y_b	θ
x_a	⋮	$-M_{11}$	$M_{11}A'_{11}$	R'_1	M_{12}	⋮
y_a	⋮	$A_{11}M_{11}$	$-A_{11}M_{11}A'_{11}$	$-R_3'$	$-A_{11}M_{12}$	⋮
v_b	⋮	$-R_1$	R_3	R_4	R_2	⋮
u_b	⋮	$-M_{21}$	$M_{21}A'_{11}$	R'_2	M_{22}	⋮

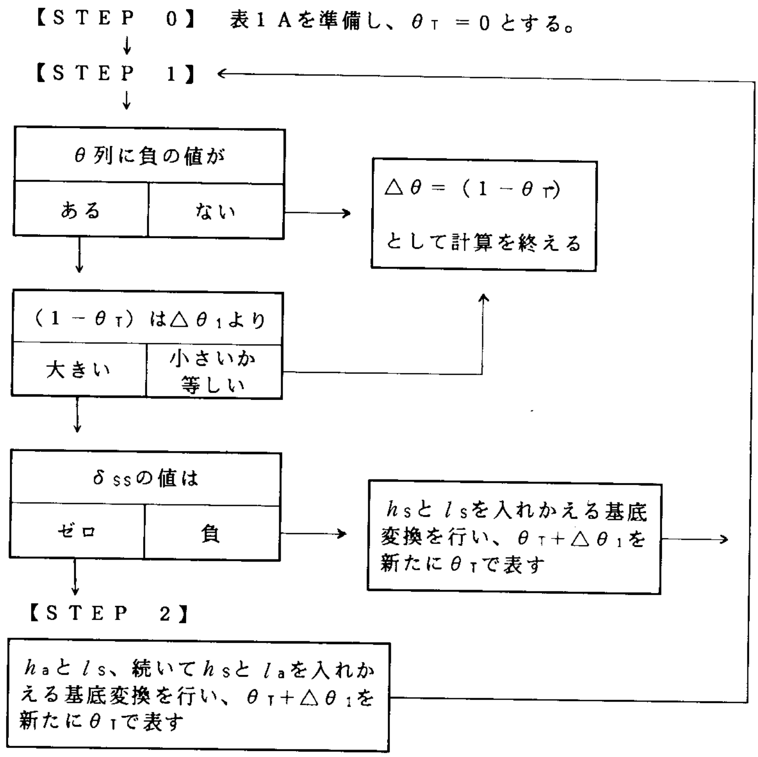

図1　アルゴリズムのフローチャート

表S1A

$\theta=\theta_T$		l_1	l_2	.....	l_{m+n}	θ
h_1	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	.....	δ_{1m+n}	r_1
h_2	δ_{20}	δ_{21}	δ_{22}	.....	δ_{2m+n}	r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
h_{m+n}	$\delta_{m+n,0}$	$\delta_{m+n,1}$	$\delta_{m+n,2}$	.....	$\delta_{m+n,m+n}$	r_{m+n}

$$, \quad h=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{m+n} \end{bmatrix}$$

表S1B

$\theta=\theta_T+\Delta\theta_1$		l_1	...... l_a	...... l_s	...... l_{m+n}	θ
h_1	δ'_{10}	δ_{11}	...... δ_{1a}	...... δ_{1s}	...... δ_{1m+n}	r_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_a	δ'_{a0}	δ_{a1}	...... δ_{aa}	...... δ_{as}	...... δ_{am+n}	r_a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_s	0	δ_{s1}	...... δ_{sa}	...... δ_{ss}	...... δ_{sm+n}	r_s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_{m+n}	δ'_{m+n0}	$\delta_{m+n,1}$	...... $\delta_{m+n,a}$	...... $\delta_{m+n,s}$	...... $\delta_{m+n,m+n}$	r_{m+n}

もし θ 列に負の値がなければ，任意の $\Delta\theta \geqq 0$ に対して $h(\Delta\theta)$

$$h = h(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{m+n,0} \end{bmatrix} + (\Delta\theta) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{m+n} \end{bmatrix}$$

が $\theta = \theta_T + \Delta\theta$ に対する最適解であり，$\Delta\theta = (1-\theta_T)$ とすれば $\theta = 1$ の時の最適解が得られ計算は終る．

もし θ 列に少なくとも1つ負の値が存在するならば，$\Delta\theta$ を増加させてゆくと $h(\Delta\theta)$ のある要素(ある基本変数）がゼロから負に転じるので，最初にゼロから負に転じる要素を h_s で表そう．摂動法を利用して考えると，最初にゼロから負に転じる要素はただ一つであり，かつ $\delta_{so} > 0$ となる．また明らかに $r_s < 0$ である．従って

$$\theta = \theta_T + \Delta\theta, \quad 0 \leqq \Delta\theta \leqq \frac{\delta_{s0}}{-r_s} = \Delta\theta_1, \ \Delta\theta_1 > 0$$

なる θ に対する最適解は $h = h(\Delta\theta)$ で与えられ，もし $(1-\theta_T) \leqq \Delta\theta_1$ が成立するならば $\Delta\theta = (1-\theta_T)$ とすれば $\theta = 1$ の時の最適解が得られ計算は終る．

もし $(1-\theta_T) > \Delta\theta_1$ が成立するならば $\theta = \theta_T + \Delta\theta_1$ の時の最適解を与える標準シンプレックス表を次の表S1Bのように書くことができる．ここで基本変数の値は $h = h(\Delta\theta_1)$ となり，摂動法を利用して考えると $h_s = 0$ であるが他の基本変数の値は正である．命題2により $\delta_{ss} \leqq 0$ である．従ってもし $\delta_{ss} = 0$ ならばSTEP 2へ進む．もし $\delta_{ss} < 0$ ならば δ_{ss} を変換軸として h_s と l_s を入れ変える基底変換をする（θ 列も他の列同様に扱う）．そうすると基本変数の値（h_s と l_s は入れ変わっている）は変換前と同じであるが，θ 列の s 行目の値は $r'_s > 0$ となっている標準シンプレックス表が得られる．なお命題2で示したシンプレックス表の対称性を利用して計算を効率よく行いうる．そこで $(\theta_T + \Delta\theta_1)$ の値を新たに θ_T で表し，その他の変数や数値を新たにSTEP 1の最初の標準シンプレックス表S1Aの対応する位置の記号で表すものとして，STEP 1の最初にもどる．

【STEP 2】 $\theta = 1$ の時最適解が存在するならば，s 行目の値（δ_{s1}，…，δ_{sm+n}）の中に少なくとも1つ負の値が存在しなければならない．なぜなら，s 行目の方程式は

$$(\delta_{s0} + r_s\Delta\theta) = \delta_{s1}l_1 + \delta_{s2}l_2 + \cdots + \delta_{sm+n}l_{m+n} + h_s$$

と書かれ，δ_{s1}，δ_{s2}，…，δ_{sm+n} がすべて正か0であるならば，$\Delta\theta > \Delta\theta_1$ なる $\Delta\theta$ に対してこの方程式をみたす非負の変数の値は存在しないこととなり，従って $\theta = 1$ の時Q 1, Q 2式をみたす非負の変数の値は存在しないこととなるが，これは $\theta = 1$ の時に最適解が存在するという仮定に反するからである．s 行目の値の中に負の値が少なくとも1つ存在するならば，$\delta_{ss} = 0$ であるから，命題2より s 列目（l_s の列）の値の中に少なくとも1つ正の値が存在することが分かる．

そこで非基本変数 l_s の値を0から増加させ，基本変数の値を調整してゆくと，ある基本変数（h_s ではない）がゼロから負に転じるので，最初にゼロから負に転じる基本変数を h_a で表そう．摂動法を利用して考えると，最初にゼロから負に転じる基本変数はただ1つであり，かつ $\delta'_{a0} > 0$ となる．また明らかに $\delta_{as} > 0$ である．従って $\delta_{ss} = 0$ と命題2より $\delta_{sa} = -\delta_{as} < 0$ が成立する．そこで δ_{as} を変換軸として h_a と l_s を入れかえる基底変換に続いて，δ_{sa} を変換軸として h_s と l_a を入れかえる基底変換を行えば（θ 列も他の列同様に扱う），新たな標準シンプレックス表が得られ，摂動法を利用して考えると s 行目の基本変数（l_a）だけが0で他の基本変数は正である．また明らかに θ 列の s 行目の値は $r''_s > 0$ となっている．

なお $\delta_{aa} < 0$ ならば，δ_{aa} を変換軸として h_a と l_a を入れかえ，ひきつづき δ_{ss} の所（この時負に変わっている）を変換軸として h_s と l_s をいれかえても，変数の位置が入れかわるだけで他は同じ標準シンプレックス表が得られる．

そこで $\theta_T + \Delta\theta_1$ の値を新たに θ_T で表し，その他の変数や数値を新たにSTEP 1の最初の標準シンプレックス表S1Aの対応する位置の記号で表すものとして，STEP 1の最初にもどる【以上】.

このようなアルゴリズムで摂動法を利用して計算を進めると，STEP 1の初めにもどるごとに θ_T の値が増加し，θ_T の値が増加するごとに新たな基底（基本変数の組）が現れ，同じ基底が2度と現れることはない．と言うのは θ_T の値が $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \cdots\cdots$ と増加してゆくものとすれば，$\theta_T = t_i (i = 0, 1, 2\cdots\cdots)$ に対応する基底は $\theta > t_{i+1}$ なる任意の θ に対して基本変数の値のうちの少なくとも1つは負となるから t_{i+1}，t_{i+2}……に対応する基底とは異なるからである．また θ が1に達するまではこのような計算が中断することはない．従って有限回のくり返しのうち必ず $\theta = 1$ に到達する．というのは，もし到達しないとすれば，異なる基底が無数に存在しなければならないこととなるが，実際には異なる基底は有限個しか存在しないからである．

なお実際の計算においては，命題2で述べられている標準シンプレックス表の性質をうまく利用して，効率よく計算を行うための種々の工夫をすることができるが，本稿の目的と直接関係がないのでその説明は省略する．また摂動法を利用しないとSTEP 1のh_sとなりうる基本変数が複数個存在し，$\delta_{s0}=0$従って$\Delta\theta_1=0$となることもあるが，h_sとして適当な基本変数，たとえば選択しうるものの中で一番上の基本変数をh_sとして同じアルゴリズムで計算をしてゆくと，リサイクリングが発生することなくスムーズに計算が終るようである．同じことがSTEP 2のh_aの選択に関しても言えよう．要するに私達の経験によると，実際の計算においては摂動法を利用しなくてもスムーズに計算が終る．

6．パラメトリックな解法の有用性と均衡解の一意性

今述べたアルゴリズムは空間均衡分析の均衡解の比較静学的分析や，その解の性格の研究に適した効率的な解法である．第一に，二次計画問題$Ax\leqq b$, $x\geqq 0$なる条件の下で$f(x)=c'x-(1/2)x'Wx$を最大にするxを求める問題を以上のように解いた後，さらにパラメータtを0からある値kまで増加させ

> $Ax\leqq b+t(\Delta b)$, $x\geqq 0$なる条件の下で$f(x)=[c+t(\Delta c)]'x-(1/2)x'Wx$を最大にする$x$を求めよ，ただし$\Delta b$と$\Delta c$は新たに$b$と$c$を変化させる方向を示す与えられた$m$次および$n$次列ベクトルである

なる問題の最適解の軌跡を求める場合を考えてみよう．この場合には最初の表1 Aのθ列の右側にt列を次のようにつけておき，t列も非基本変数の列と同様に扱い，θを0から1まで変化させたあと，θ列とパラメータθの代わりにt列とパラメータtを利用して上述のアルゴリズムのSTEP 1から計算を始め，tを0から指定されたある正の値kまで全く同じアルゴリズムに従って変化させて最適解の軌跡を求めることができる．さらにもう1つの違った方向にもbとcを変化させてみたい時には，t列同様に，その変化の方向を示す列をさらに表1 Aに付け加えておきさえすればよい．以下同様である．

表1A'

		x	u	θ	t
v	$-c^-$	$-W$	$-A'$	$-c^+$	$-\Delta c$
y	b^+	A	0	b^-	Δb

第二にこのアルゴリズムの基礎である命題2は，二次計画問題として定式化された空間均衡分析の均衡解の性格の研究，特に解の一意性の研究にとって極めて重要である．今最初の二次計画問題の最適解が得られ，その最適解を与える標準シンプレックス表がたとえばSTEP 1の始めのシンプレックス表S 1 Aのように表されるものとしよう．そしてたとえば$\delta_{10}=0$でかつ$\delta_{11}=0$であるものとしよう．するとh_1が原変数でl_1が双対変数ならば，命題2から明らかなように，原変数である$h_i(i\geqq 2)$の行とl_1の列との交点の値δ_{i1}はゼロである．従ってl_1を0から増加させて基本解の値を調整すれば，h_1は0のままであるから，原変数の同じ値に対して最適解となる無数の双対変数の値がありうることが分かる．逆にh_1が双対変数でl_1が原変数であるならば，双対変数である$h_i(i\geqq 2)$の行とl_1の列との交点の値δ_{i1}はゼロである．従ってl_1を0から増加させて基本解の値を調整すれば，双対変数の同じ値に対して最適解となる無数の原変数の値がありうることが分かる．かくて容易に分かるように，原変数（双対変数）の値が最適解においてただ一つしかない場合でも，双対変数（原変数）の値はただ一つではなく無数にありうる．これはIIにおいて，より一般的な凸計画問題として定式化された空間均衡分析の均衡解の一意性について得られた結論を再確認するものである．二次計画問題として定式化された空間均衡分析の均衡解が明らかにただ1つであるのは，上述のシンプレックス表で退化しない基本解が得られる場合に限られ，その他の場合にはIIの命題Aに基づき解の一意性についての慎重な検討が必要である．

IV　要　　　約

産地間競争に関する具体的かつ計量的な分析法の一つとして空間均衡分析がよく知られているが，この分析によって得られる競争均衡解はただ一つであるという暗黙の前提の下で種々の考察が行われている．しかし，もし競争均衡解が複数個存在するならば，そのような考察は無意味であるか，または何等かの修正をせざるを得ない．本稿では解の一意性が成立すると考えられていた空間均衡分析の競争均衡解が場合によってはただ一つとは限らず無数の競争均衡解が存在すること，従って解の一意性についての慎重な検討が必要であることを理論的に明らかにした．つまり「I　緒言」で問題の所在を明確にし，「II　非線形計画問題の最適解としての均衡解の一意性」において最も一般的な形で場合によっては競争均衡解がただ一つとは限らず無

数の解が存在することを明らかにした．また「III 二次計画問題の解法と均衡解の一意性」では，二次計画問題として定式化された空間均衡分析においてより具体的にこの点を明らかにするために，まず二次計画問題の解法について検討を行い，この目的に適した効率的な解法を明らかにし，この解法に基づいて場合によっては競争均衡解がただ１つとは限らず無数の解が存在することを明らかにした．以上のような理論的考察の重要性と正当性を裏付けるための事例分析は別稿に譲ることとした．

文　　献

Abadie, J. 1967 On the Kuhn-Tucker Theorem. *In* "Nonlinear Programming." ed. by J. Abadie, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 19-36

Arrow, K. J., L. Hurwicz and H. Uzawa 1961 Constraint Qualifications in Maximization Problems. *Naval Research Logistics Quarterly,* 8 (1)：175-191

Barnes, E. R. 1986 A Variation on Karmarkar's Algorithm for Solving Linear Programming Problems. *Mathematical Programming,* **36**：174-182

Beale, E. M. L. 1959 On Quadratic Programming. *Naval Research Logistics Quarterly,* **6**：227-243

Beale, E. M. L. 1967 Numerical Methods. *In* "Nonlinear Programming." ed. by J. Abadie, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 135-205

Boot, J. C. G. 1964 *Quadratic Programming-Algorithms-Anomalies-Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam

Cottle, R. W. 1968 The Principal Pivoting Method of Quadratic Programming. *In* "Mathematics of the Decision Sciences Part 1." ed. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Jr., American Mathematical Society, pp. 144-162

Cottle, R. W. and G. B. Dantzig 1968 a Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming. *Linear Algebra and its Applications,* **1**：103-125

Cottle, R. W. and G. B. Dantzig 1968 b Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming. *In* "Mathematics of the Decision Sciences Part 1." ed. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Jr., American Mathematical Society, pp. 115-136

Cottle, R. W. and M. S. Goheen 1978 A Special Class of Large Quadratic Programs. *In* "Nonlinear Programming 3." ed. by O. L. Mangasarian *et al.,* Academic Press, New York, pp. 361-390

Cottle, R. W. and A. Djang 1979 Algorithmic Equivalence in Quadratic Programming, I：A Least-Distance Programming Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications,* **28**(3)：275-301

Crowder, H., E. L. Johnson and M. Padberg 1983 Solving Large-Scale Zero-One Linear Programming Problems. *Operations Research,* **31** (5)：803-834

Dantzig, G. B. 1963 *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Dorfman, R., P. A. Samuelson and R. M. Solow 1958 *Linear Programming and Economic Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York 安井琢磨ら訳 1958 ドーフマン，サミュエルソン，ソロー 線形計画と経済分析．岩波書店，東京

Dorn, W. S. 1960 Duality in Quadratic Programming. *Quarterly of Applied Mathematics,* **18** (2)：155-162

Enke, S. 1951 Equilibrium Among Spatially Separated Markets：Solution by Electric Analogue. *Econometrica,* **19**(1)：40-47

Evans, J. P. 1970 On Constraint Qualifications in Nonlinear Programming. *Naval Research Logistics Quarterly,* **17**(3)：281-286

Gill, P. E., W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin and M. H. Wright 1986 On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method. *Mathematical Programming,* **36**：183-209

Gill, P. E., W. Murray, M. A. Saunders and M. H. Wright 1984 Sparse Matrix Methods in Optimization. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.,* **5**(3)：562-589

Gould, F. J. and J. W. Tolle 1971 A Necessary and Sufficient Qualification for Constrained Optimization. *SIAM J. Appl. Math.,* **20**(2)：164-172

Hačijan, L. G. 1979 A Polynomial Algorithm in Linear Programming. *Soviet Math. Dokl.,* **20** (1)：191-194

林　基 1984 生乳の需給調整．土屋圭造編：農産物の過剰と需給調整．農林統計協会，東京，145-165頁

Heath, M. T. 1984 Numerical Methods for Large Sparse Linear Least Squares Problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.,* **5**(3)：497-513

Houthakker, H. S. 1960 The Capacity Method of Quadratic Programming. *Econometrica,* **28** (1)：62-87

今村幸生 1969 農業経営設計の理論と応用．養賢堂，東京

入江昭二 1957 位相解析入門．岩波書店，東京

Judge G. G. and T. Takayama (ed.) 1973 *Studies in*

Economic Planning over Space and Time. North-Holland Publishing Co., Amsterdam
Kapoor, S. and P. M. Vaidya 1986 Fast Algorithms for Convex Quadratic Programming and Multicommodity Flows. *Proc. 18th Ann. ACM Sym. Theo. Comp.*: 147-159
Karmarkar, N. 1984 A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica,* **4**(4)：373-395
川口雅正 1973 農業の経営戦略-不安定性と農業経営計画．明文書房，東京
Kuhn, H. W. and A. W. Tucker 1951 Nonlinear Programming. *In* "Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability." ed. by J. Neyman, University of California Press, Berkeley, pp. 481-492
Lemke, C. E. 1965 Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. *Management science,* **11**(7)：681-689
Lemke, C. E. 1968 On Complementary Pivot Theory. *In* "Mathematics of the Decision Sciences Part 1." ed. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Jr., American Mathematical Society, pp. 95-114
Lemke, C. E. and J. T. Howson, Jr. 1964 Equilibrium Points of Bimatrix Games. *J. Soc. Indust. Appl. Math.,* **12**(2)：413-423
Luenberger, D. G. 1984 *Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts
Mangasarian, O. L. 1969 *Nonlinear Programming.* McGraw - Hill, Inc., New York 関根智明訳 1972 非線形計画法．培風館，東京
Mangasarian, O. L. and J. Ponstein 1965 Minmax and Duality in Nonlinear Programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **11**：504-518
Markowitz, H. M. 1959 *Portfolio Selection-Efficient Diversification of Investments.* John Wiley & Sons, Inc., New York 鈴木雪夫監訳 1969 ポートフォリオ選択論-効率的な分散投資法．東洋経済新報社，東京
丸山義皓 1967 地域間分析のための諸計画モデルの検討．農業経済研究，**38**(4)：160-165
McDowell, F. H., Jr. 1982 *Domestic Dairy Marketing Policy : An Interregional Trade Approach.* Ph. D. Thesis, University of Minnesota
永木正和 1977 野菜の価格と市場対応．明文書房，東京
二階堂副包 1960 現代経済学の数学的方法．岩波書店，東京
Palacios - Gomez, F., L. Lasdon and M. Engquist 1982 Nonlinear Optimization by Successive Linear Programming. *Management Science,* **28**(10)：1106-1120
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1964 a The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming. *Operational Research Quarterly,* **15**(4)：355-388
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1964 b Simplicial Methods for Quadratic Programming. *Naval Research Logistics Quarterly,* **11**：273-302
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1966 a A Parametric Simplicial Formulation of Houthakker's Capacity Method. *Econometrica,* **34**(2)：354-380
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1966 b A Comparison of Two Methods for Quadratic Programming. *Operations Research,* **14**：422-441
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1968 An Alternative Interpretation of the Primal-Dual Method and Some Related Parametric Methods. *International Economic Review,* **9**(1)：87-99
Panne, C. V. D. and A. Whinston 1969 The Symmetric Formulation of the Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica,* **37**(3)：507-527
Raymond, J. B., Jr. 1972 A Computer Comparison of Four Quadratic Programming Algorithms. *Management Science,* **18**(11)：632-643
Rayner, A. J. 1975 *Regional Price Differentiation Policies for Milk in England and Wales : An Empirical Evaluation Using a Spatial Equilibrium Framework.* University of Manchester
Samuelson, P. A. 1952 Spatial Price Equilibrium and Linear Programming. *The American Economic Review,* **42**：283-303
佐々木康三 1969 東日本の生乳市場に関する地域間均衡．農業経済研究，**41**(3)：106-116
佐々木康三 1970 東日本養豚の地域間均衡．農業経済研究，**42**(1)：11-19
佐々木康三 1971 ブロイラー養鶏の地域間均衡．農業経済研究，**43**(1)：25-32
高山 崇 1974 空間・時間均衡論．工藤 元ら編：改稿近代農業経済学．明文書房，東京，383-412 頁
Takayama, T. and G. G. Judge 1964 a Equilibrium Among Spatially Separated Markets : A Reformulation. *Econometrica,* **32**(4)：510-524
Takayama, T. and G. G. Judge 1964 b Spatial Equilibrium and Quadratic Programming. *Journal of Farm Economics,* **46**：67-93
Takayama, T. and G. G. Judge 1971 *Spatial and Temporal Price and Allocation Models.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam
Tomlin, J. A. 1987 An Experimental Approach to Karmarkar's Projective Method for Linear Programming. *Mathematical Programming Study,* **31**：175-191
Tomlin, J. A. 1989 A note on Comparing Simplex and Interior Methods for Linear Programming.

In "Progress in Mathematical Programming." ed. by N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, pp. 91-103

Tucker, A. W. 1968 A Least-distance Approach to Quadratic Programming. *In* "Mathematics of the Decision Sciences Part 1." ed. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Jr., American Mathematical Society, pp. 163-176

Vajda, S. 1974 *Theory of Linear and Non-Linear Programming.* Longman Group Limited, London

Van Roy, T. J. and L. A. Wolsey 1987 Solving Mixed Integer Programming Problems Using Automatic Reformulation. *Operations Research,* **35**(1) : 45-57

Wolfe, P. 1959 The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica,* **27**(3) : 382-398

Wolsey, L. 1989 Strong Formulations for Mixed Integer Programming: A Survey. *Mathematical Programming,* **45** : 173-191

Ye, Y. 1989 An Extension of Karmarkar's Algorithm and the Trust Region Method for Quadratic Programming. *In* "Progress in Mathematical Programming." ed. by N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, pp. 49-63

Summary

Spatial equilibrium analysis is well known as a quantitative method to analyze the structure of interregional competition of agricultural products. And the uniqueness of equilibrium solution is essential to the application of this analysis. Usually researchers take it for granted that the uniqueness holds. But, if the uniqueness does not hold, conclusion of the application is meaningless or it must be corrected.

In this paper, we show theoretically that some spatial equilibrium models, which have been thought to have unique equilibrium solution respectively, have not unique but infinitely many equilibrium solutions respectively and that it is very important to carefully check the uniqueness of equilibrium solution.

In Section I : Introduction, we make clear the subject in this paper. In Section II : On the Uniqueness of Equilibrium Solution as Optimal Solution of Nonlinear Programming, we show the point mentioned above in most general form. In Section III : An Algorithm for Solving Quadratic Programming Problems and the Uniqueness of Equilibrium Solution, we show an efficient algorithm to parametrically solve quadratic programming problems based on Dantzig-Panne and Whinston's method, and show the point mentioned above more concretely based on this algorithm for the case of spatial equilibrium models specified as quadratic programming problems. In Section IV : Conclusion, we summarize the point mentioned above briefly. In another paper, we will make a case study to show the importance and correctness of the conclusion of this paper.