九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

粒状体に関する弾塑性移行過程を考慮した構成式に基づく有限要素法

上野，正美
九州大学農学部農業機械学教室

橋口，公一
九州大学農学部農業機械学教室

https://doi.org/10.15017/23254

出版情報：九州大學農學部學藝雑誌. 32 (2/3), pp.119-124, 1977-12. 九州大學農學部
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

九大農学芸誌 (Sci. Bull. Fac. Agr., Kyushu Univ.)
第32巻 第2・3号 119-124 (1977)

粒状体に関する弾塑性移行過程を考慮した構成式に基づく有限要素法

上野正美・橋口公一
九州大学農学部農業機械学教室
(1977年9月12日受理)

A Finite Element Method Based on a Constitutive Equation of Granular Materials Taken Account of Elastoplastic Transition Process

MASAMI UENO and KOICHI HASHIGUCHI
Laboratory of Agricultural Machinery, Faculty of Agriculture, Kyushu University 46-05, Fukuoka 812

緒　　言

近年，有限要素法などの数値解析法の発達により各種材料の力学的境界問題の解析が可能になりつつあり各分野において多くの研究報告がなされている．このような状況において，材料の変形挙動をより適切に表現する構成式の確立が強く要請されている．これに応じて，特に，金属塑性論を中心に新たな塑性概念の導入あるいは展開が試みられている．さらに，これらの動向に呼応して土質力学の分野においても土の構成式の究明が活発に進められている．

ところで，従来の塑性論では材料の負荷状態を弾性状態と塑性状態とに個々に分離して定義しているために，実際の変形挙動に見られる弾性状態から塑性状態への滑らかな移行過程を説明しえない．これは構成式のもつ大きな欠点の一つで，特に，軟化現象を含む問題の解析においては許容しえない誤差を生ずる原因となる．さきに，著者らは非降状状態に対して拡張された降伏面としての負荷面の仮定に基づいて，連続的な弾塑性移行過程を考慮した新たな構成式を導出し，この問題に対する一応の解決を与えた (Hashiguchi and Ueno, 1977)．

本論文は土などの粒状体に関する一般の弾塑性変形境界値問題をより適切に解析する準備として，上述の構成式を用いて有限要素法の定式化ならびにプログラミングを行なつたものである．また，一例として軸対称圧縮問題に関する解析を試み，この解析結果と実験結果との比較を行なつて本有限要素法の妥当性を検討した．

なお，本解析には九州大学計数施設を利用した．

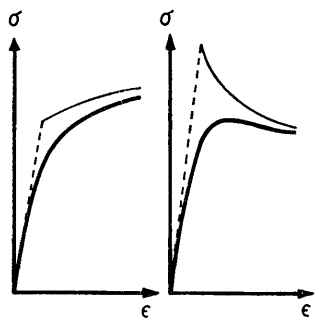
有限要素法定式化

1. 新たな塑性構成式の概要

ここでは，後節の有限要素法の定式化に採用する新たな塑性構成式について概説しておく．なお，本論文で使用する座標系は空間固定の直交デカルト座標系である．

前述のように，従来の構成式に基づく応力—ひずみ特性は実際のそれとはかなり異なつている．軸対称負荷過程に関する両者の比較によれば，特に，軟化状態において大きな相違が見られる．これらの比較を模式的に Fig. 1 に示す．同図において，太線および細線はそれぞれ実測曲線および理論曲線を表わし，細線の破線部は弾性状態に相当する．同図に見られるように実測曲線には理論曲線におけるような弾性状態と塑性状態との明確な分離点は存在せず，むしろ，両状態が共存しているとみなされ，滑らかな移行特性を示している．したがつて，従来の構成式に基づいて定式化された有限要素法により一般の弾塑性変形境界値問題の解析を行なうと許容しえない大きな誤差を生ずることになる．

さて，まず粒状体の塑性条件式は次式で与えられる



(a) (b)

Fig. 1. Typical stress-strain curves of axisymmetric loading processes. (a) Strain hardening; (b) Strain softening.

と仮定する.

$$f(\sigma_{ij})-F(\varepsilon_v^p)=0 \tag{2.1}$$

ここに σ_{ij} は応力, ε_v^p は塑性体積ひずみ, f は負荷応力関数, さらに F は硬化関数を表わす. これより, 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ は次式で与えられる.

$$d\varepsilon_{ij}^p=\frac{df}{\dfrac{dF}{d\varepsilon_v^p}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial P}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.2}$$

ここに P は平均応力である.

一方, Fig. 1 に見られる実測値の特性より, 負荷時における変形は恒に塑性変形を含むとみなしうる. すなわち, 従来, 純粋弾性状態と仮定されていた降伏面内部における応力変化に対しても塑性ひずみ増分が生ずると仮定すべきである. したがつて, これらの塑性ひずみ増分を適切に表現しうる新たな塑性概念を見い出さねばならない.

そこで, 著者らは, まず, 「負荷面」と称する新たな曲面を仮定した. これは式 (2.1) の左辺の値 $f-F$ を $\dagger$ として

$$f(\sigma_{ij})-F(\varepsilon_v^p)=\dagger(\leq 0) \tag{2.3}$$

で表わされる曲面である. $\dagger=0$ のとき負荷面は降伏面に一致する. さらに, F に対する f の比を表わすパラメータ

$$\mathscr{F}=f/F(0\leq\mathscr{F}\leq 1) \tag{2.4}$$

を導入して従来の構成式 (2.2) を修正・拡張し, 一般状態に対して次の塑性構成式を与えた.

$$d\varepsilon_{ij}^p=\frac{df}{G}\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.5}$$

$$G=\frac{dF}{d\varepsilon_v^p}\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial P}-N\right)/M \tag{2.6}$$

ここに M および N は $\mathscr{F}$ の関数で, $\mathscr{F}=1$ に対して

$$M=1 \tag{2.7·a}$$

$$N=0 \tag{2.7·b}$$

を満足しなければならない. これらを満足する関数として, 例えば, 次のような関数が考えられる.

$$M=\mathscr{F}^n \tag{2.8}$$

$$N=c|\ln\mathscr{F}|^{n'} \tag{2.9}$$

ここに, c, n および n' は非負の材料定数である. $\mathscr{F}$ に対して M は単調増加関数, N は単調減少関数でいずれも非負である. なお, これらの関数は塑性ひずみ増分の大きさを制御するものであるが, M は単に従来の塑性ひずみ増分 (式 (2.2)) に対する縮率の役割をはたす. 一方, 関数 N は M のみでは説明しえない軟化領域における移行過程の表現に重要な役割をはたす. 以下に, 一例として軟化領域における軸対称圧縮過程に従つて N の作用を略述する.

1) 等方状態から $\partial f/\partial P=0$ の状態までは, 体積収縮を伴う微小な塑性変形を生じ, f および F は増加する.

2) $\partial f/\partial P=0$ から $\partial f/\partial P=N$ の状態までは f の増加および塑性的な体積膨張に伴う F の減少によつて顕著な塑性変形を生ずる.

3) $\partial f/\partial P=N$ の状態では f は最大値に達する. associated flow rule および負荷面の凸面条件によれば, この状態では $d\varepsilon_v^p/|d\varepsilon_a^p|$ は最大となるがこれは軸対称圧縮試験でよく観察される現象である. なお, $d\varepsilon_a^p$ は軸方向の塑性ひずみ増分を表わす.

4) さらに変形が進行すると f および F はともに収縮し, 最終的に critical state に達する.

以上に, 新たな塑性構成式に基づく塑性ひずみ増分とその大きさを制御する関数 M および N について述べた. 式 (2.5) に具体的な負荷応力関数 f および硬化関数 F を与えれば塑性ひずみ増分を決定しうる. なお, 負荷過程におけるひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ は弾性ひずみ増分を $d\varepsilon_{ij}^e$ として

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^e+d\varepsilon_{ij}^p \tag{2.10}$$

で与えられると仮定する.

2. 有限要素法の具体的な定式化

ここでは, 粒状体の塑性変形挙動を表わすために橋口 (1977) によつて提案された次の負荷応力関数 f および硬化関数 F をそれぞれ負荷面の形状および降伏面の大きさを与える関数として採用し, 前述の新たな塑性構成式 (2.5) を用いて有限要素法の定式化を行なう.

$$f=(K^2-1)\frac{\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}}} \tag{3.1}$$

$$F=F_0\exp\left(-\frac{\varepsilon_v^p}{\alpha}\right) \tag{3.2}$$

ここに σ_{I} および σ_{III} はそれぞれ最大および最小主応力を表わし，I および III は主応力軸を表わしている．また，K および α は材料定数，F_0 は F の初期値を表わす．

これより，式 (2.6) における G は具体的に次式で与えられる．

$$G=\frac{F_0}{\alpha\mathscr{F}^n}\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon_v^p}{\alpha}\right)\cdot\left\{\frac{(K^2-1)(\sigma_{\mathrm{III}}^2-K^2\sigma_{\mathrm{I}}^2)}{(\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}})^2}c|\ln\mathscr{F}|^{n'}\right\} \tag{3.3}$$

したがつて，塑性ひずみ増分（式 (2.5)）は次のように表わされる．

$$d\varepsilon_{ij}^p=\frac{\alpha\mathscr{F}^n df}{F_0\exp\left(-\frac{\varepsilon_v^p}{\alpha}\right)}\cdot\frac{\beta_{Li}\beta_{Lj}\frac{\partial f}{\partial\sigma_L}}{\frac{(K^2-1)(\sigma_{\mathrm{III}}^2-K^2\sigma_{\mathrm{I}}^2)}{(\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}})^2}c|\ln\mathscr{F}|^{n'}} \tag{3.4}$$

ここに β_{Li} は座標変換テンソルである．

一方，有限要素法の定式化を行なうには，応力増分とひずみ増分とを次式のように関連づける構成テンソル D_{ijkl} を決定する必要がある．

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} \tag{3.5}$$

この構成テンソルは従来の有限要素法において用いられている弾塑性構成テンソルと同一型式の次式で与えられる．

$$D_{ijkl}=E_{ijkl}-\frac{E_{ijpq}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{rs}}E_{rskl}}{G+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mm}}\cdot E_{mntu}\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{tu}}} \tag{3.6}$$

ここに，E_{ijkl} は弾性構成テンソルで橋口 (1977) によつて提案された次のテンソルを用いる．

$$E_{ijkl}=-\frac{A-B}{3AB}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2B}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3.7}$$

$$A=\frac{\beta}{3(P_r-P)} \tag{3.8}$$

$$B=aN'r^{N'-1} \tag{3.9}$$

ここに P は平均応力，δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表わし，r は σ'_{ij} を偏差応力として $r=(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}$ で与えられる．さらに，a, N', β および P_r は材料定数である．

式 (3.1〜3) および (3.7) を式 (3.6) に用いれば構成テンソルは具体的に次式で与えられる．

$$\begin{aligned}D_{ijkl}=&-\frac{A-B}{3AB}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2B}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\\&-z\cdot\left\{-\frac{A-B}{3AB}\delta_{ij}\delta_{pq}\right.\\&\left.+\frac{1}{2B}(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp})\right\}\beta_{Lp}\beta_{Lq}\frac{\partial f}{\partial\sigma_L}\\&\times\beta_{Mr}\beta_{Ms}\frac{\partial f}{\partial\sigma_M}\cdot\left\{-\frac{A-B}{3AB}\delta_{rs}\delta_{kl}\right.\\&\left.+\frac{1}{2B}(\delta_{rk}\delta_{sl}+\delta_{rl}\delta_{sk})\right\}\end{aligned} \tag{3.10}$$

ここに，

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}=&\frac{F_0\exp\left(-\frac{\varepsilon_v^p}{\alpha}\right)}{\alpha\mathscr{F}^n}\cdot\left\{\frac{(K^2-1)(\sigma_{\mathrm{III}}^2-K^2\sigma_{\mathrm{I}}^2)}{(\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}})^2}\right.\\&\left.c|\ln\mathscr{F}|^{n'}\right\}+\beta_{Xw}\beta_{Xu}\frac{\partial f}{\partial\sigma_X}\cdot\left\{-\frac{A-B}{3AB}\delta_{mn}\delta_{tu}\right.\\&\left.+\frac{1}{2B}(\delta_{mt}\delta_{nu}+\delta_{mu}\delta_{nt})\right\}\times\beta_{Yt}\beta_{Yu}\frac{\partial f}{\partial\sigma_Y}\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{I}}}=\frac{(K^2-1)\sigma_{\mathrm{III}}^2}{(\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}})^2},\quad\frac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{II}}}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{III}}}=-\frac{K^2(K^2-1)\sigma_{\mathrm{I}}^2}{(\sigma_{\mathrm{III}}-K^2\sigma_{\mathrm{I}})^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

以上により，構成テンソル D_{ijkl} が具体的に決定されたが，次に，従来と同様の方法で下記の剛性方程式を合成する．

$$K_{ij}\cdot\Delta\bar{u}_j=\Delta T_i \tag{3.13}$$

ここに，K_{ij} は剛性テンソルで，$\Delta\bar{u}_i$ および ΔT_i はそれぞれ節点変位増分および等価節点力増分を表わす．剛性テンソル K_{ij} の具体形は次式で与えられる．

$$K_{ij}=\int_V B_{ikl}D_{klmn}B_{imn}dV \tag{3.14}$$

ここに，B_{ijk} はひずみ増分と節点変位増分とを関連づけるテンソルである．また $\int_V dV$ は体積積分を表わす．物体要素内の任意の点の変位増分 Δu_i を節点変位増分 $\Delta\bar{u}_i$ で近似する形状関数を N_{ij} とすると，要素内のひずみ増分は

$$d\varepsilon_{ij}=(N_{ik,j}+N_{jk,i})\cdot\Delta\bar{u}_k/2=B_{ijk}\cdot\Delta\bar{u}_k \tag{3.15}$$

で与えられる．なお，$N_{ik,j}$ は

$$N_{ik,j}=(\partial/\partial x_j)\cdot N_{ik} \tag{3.16}$$

を意味する．一般の弾塑性変形境界値問題の解は与え

られた境界条件下で剛性方程式（3.13）を繰返し解くことによつて得られる．

解析結果

1. 有限要素解析の具体例

前述の有限要素法の定式化に基づいてプログラミングを行ない，軟化を生ずる軸対称圧縮過程における2例について解析を試みた．本解析では Weald clay (Parry, 1959) および豊浦砂 (Miura, 1975) の材料定数を用い，これらの材料の実験値と解析値との比較を行なつた．また，著者らによつて定式化された従来の構成式に基づく有限要素法（上野・橋口，1977）による解析値も同時に示し，検討の材料とした．

有限要素解析の具体的手法は著者らの前論文（上野・橋口，1977）で述べた方法にほぼ順ずる．ただし，本プログラムでは負荷基準としてパラメータ $\mathscr{F}$ の増分 $d\mathscr{F}$ を用い，次のように，その正・負によつて負荷・除荷の判定を行なう．

$$\text{負荷}：d\mathscr{F}\geq 0 \qquad (4.1\cdot a)$$

$$\text{除荷}：d\mathscr{F}<0 \qquad (4.1\cdot b)$$

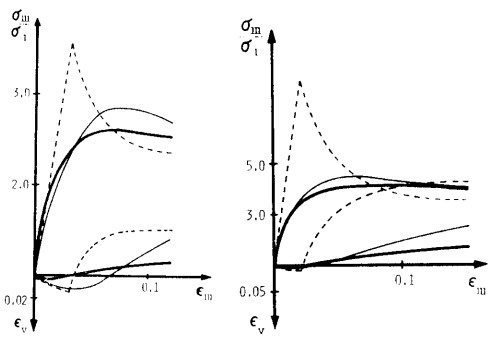
すなわち，負荷面 f および降伏面 F が互いに接近する状態が負荷過程を表わし，逆に，離反する状態が除荷過程を表わす．また，本プログラムでは従来行なつていた降伏時における増分解の修正を行なう必要はない．ただし，特に $\mathscr{F}\ll 1$ の状態では境界値として与える増分値の大きさが適切でないと大きな誤差を生ずる危険性がある．したがつて，その選択には十分な注意が必要である．

解析に用いた Weald clay および豊浦砂の材料定数は以下の通りである．

Weald clay：$\beta=0.0213$, $P_r=1.26$ [psi]
$a=0.00185$ [in²/lb], $N'=1.0$, $\alpha=0.0382$
$K=2.2$, $C=1.0$, $n=0.0$, $n'=1.5$

豊浦砂：$\beta=0.032$, $P_r=99.0$ [kg/cm²]
$a=0.001$ [cm²/kg], $N'=1.0$, $\alpha=0.1$
$K=3.3$, $C=1.0$, $n=0.0$, $n'=2.0$

一方，軸対称圧縮試験における応力径路は以下の通りである．まず，所定の応力 $P=-F_0$ まで試料を等方的に圧縮し，さらに軸対称圧縮開始時の等方圧 P_0 まで等方的に除荷する．この状態より，側圧 $[\sigma_I(=P_0)]$ を一定に保つたまま軸圧 (σ_{III}) を変化させて圧縮する．計算では軸圧のかわりに軸ひずみ増分 ($d\varepsilon_{III}$) を計算条件として与える．計算対象材料の $-F_0$ 値および P_0 値はそれぞれ次の通りである．



(a) Weald clay. (b) Toyoura sand.

Fig. 2. Comparisons between analitical results and experimetal results of axisymmetric compression processes.

Weald clay：$-F_0=-120$ [psi], $P_0=-10$ [psi]
豊浦砂：$-F_0=-150$ [kg/cm²],
$P_0=-5$ [kg/cm²]

なお，本解析に用いた要素形状は三角形要素で，形状関数 N_{ij} は位置の一次関数を用いた．さらに，要素分割および拘束条件などは著者らの前論文（前述）に示した通りである．また，一回の増分計算で与えた軸ひずみ増分値は $d\varepsilon_{III}=0.00125$ であり，繰返し計算数は100回であつた．

2. 解析結果と実験結果との比較

解析結果と実験結果との比較は Fig. 2 a, b に示してある．同図では横軸に軸ひずみ ε_{III} をとり，縦軸に主応力比 σ_{III}/σ_I および体積ひずみ ε_v をとり，軸ひずみの変化に伴う主応力比および体積ひずみの変化を表わしたものである．太線は実験値を表わし細線は本有限要素法による解析値を示す．また，破線は従来の構成式に基づく有限要素法による解析値を表わしている．

これらの比較より，本有限要素法による解析結果は解析困難な軟化現象を含む軸対称圧縮過程における変形挙動，特に，弾性状態から塑性状態への滑らかな移行過程を十分適切に表現していると思われる．また，これらの解析値は従来の有限要素法による解析値に比べ非常に大きな改良がなされているといえる．以上のことより，本論文で定式化した有限要素法は一般の弾塑性変形境界値問題の解析にも十分過応しうるものと思われる．なお，Fig. 2 において体積ひずみの理論値と実測値との間には幾分の差が見られるが，これは式（3.1, 2）に示した関数が必ずしも適切でないことによるものと思われる．よつて，これらの関数を改良し構成式をより精密化するための研究をも進めてゆか

ねばならない.

摘　　要

本論文では，粒状体の弾塑性変形解析において最も重要な問題の一つである弾性状態から塑性状態への滑らかな移行過程を説明しうる新たな塑性構成式に基づいて，有限要素法の定式化およびプログラミングを行なつた．本有限要素法の妥当性を検討するために軸対称圧縮問題に関する解析を行ない，本解析結果と実験結果とを比較し，同時に従来の構成式に基づく有限要素法による解析結果との比較を行なつた．これらの比較より本論文で定式化した有限要素法は軸対称圧縮過程における応力－ひずみ特性を十分適切に解析しうることが明らかになつた．また，本有限要素法は一般の弾塑性変形境界値問題の解析にも適用しうると思われるので今後はトラクタなどのほ場用機械の支持力・沈下問題などの具体的問題の解析を進める．

文　　献

橋口公一　1977　粉粒状体の弾塑性構成式に関する一考察．日機論，**368**：1242–1250

Hashiguchi, K. and M. Ueno 1977 Elasto-plastic constitutive laws of granular materials. *In* "Constitutive Equation of Soils", Speciality Session of 9th ICSMFE, ed. by S. Murayama and A. N. Schofield, Japan. Soc. SMFE, Tokyo, pp. 73–82

Miura, N. 1975 Effect of water on the behaviour of a quartz-rich sand under high stresses. *Soils and Foundations*, **15**：1–12

Parry, R. H. G. 1959 Triaxial compression and extention tests on remoulded saturated clay. *Geotech.*, **10**：166–180

土野正美・橋口公一　1977　粒状体の弾塑性変形境界値問題に関する有限要素法．九大農学芸誌，**32**：43–50

Summary

Recently, by the development of finite element methods it has become able to analyze the kinematic boundary value problems of continuum materials. In these situations, to find suitable constitutive equations is eagerly requested. In compliance with these requests, many studies on elastoplastic constitutive equations not only for metals but also for granular materials like soils have been actively advanced and many reports have been presented.

By the way, the smooth continuous transition processes from elastic (sub-yield) states to plastic (yield) states shown in experimental results cannot be expressed by the usual constitutive equations, because in these equations the kinematic state of materials is distinctly divided into an elastic state and a plastic state. This is one of large defects included in the usual constitutive equations. On the other hand, the authers have proposed a new plastic constitutive equation taken account of this continuous transition process (Hashiguchi and Ueno, 1977). In this equation, it is assumed that a plastic deformation occurs from the beginning of deformations, i. e., the plastic deformation always occurs in loading process. Now, the plastic strain increment in loading processes is defined as follows.

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{Mdf}{\dfrac{dF}{d\varepsilon_{v}^{p}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial P}-N\right)}\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$$

where f is a loading function, F is a hardening function, ε_v^p is a current plastic volumetric strain, σ_{ij} is a current stress, P is a mean stress, M and N are functions of the parameter $f/F(0\leqq f/F\leqq 1)$. M and N control the magunitudes of plastic strain increments, especially N is useful for the expression of a strain softening behavior.

In this paper, the new plastic constitutive equation mentioned above was employed to the formulation and the programming of the finite element method for analyzing boundary value problems of elastoplastic deformations of granular mate-

rials. Two examples of axisymmetric compression processes were analyzed by this finite element method and compared with experimental results of Weald clay (Parry, 1959) and Toyoura sand (Miura, 1975), and further compared with analytical results calculated by the usual method.

These comparisons show that this finite element method gives more suitable values to experimental results than the usual method and expresses fairly well the characteristics of transition processes. Therefore, it seems that this finite element method is capable to analyze adequately the general boundary value problems. Hereafter, we shall analyze practical problems for agricultural machinery, e. g., a sinkage problem of tractor wheels by use of this finite element method.