

基底流出に関する基礎的研究：(II) 基底流出現象 の実験的検討

瀬口, 昌洋
九州大学農学部排水干拓工学教室

田中, 宏平
九州大学農学部排水干拓工学教室

戸原, 義男
九州大学農学部排水干拓工学教室

四ヶ所, 四男美
九州大学農学部排水干拓工学教室

<https://doi.org/10.15017/23248>

出版情報：九州大学農学部学藝雑誌. 32 (2/3), pp.51-64, 1977-12. 九州大学農学部
バージョン：
権利関係：



基底流出に関する基礎的研究

(Ⅱ) 基底流出現象の実験的検討

瀬口昌洋*・田中宏平

戸原義男*・四ヶ所四男美

九州大学農学部排水干拓工学教室

(1977年7月7日受理)

Fundamental Studies on Baseflow

(Ⅱ) Experimental Investigation of Baseflow Phenomena

MASAHIRO SEGUCHI, KŌHEI TANAKA, YOSHIO TOHARA
and SHIOMI SHIKASHO

Laboratory of Land-Drainage and Reclamation, Faculty
of Agriculture, Kyushu University 46-05, Fukuoka 812

1. ま え が き

基底流出現象は、本質的には地表面から浸出面（一般に河道）に至る雨水の多次元的な浸透現象と言える。しかし、この現象はかなり複雑で、かつ観測の困難な地層内を発生場としているため、この現象の実際はまだ十分に解明されていない。

このような現象を理解する第一歩として、著者らは地層を理想化した二次元的な砂モデルを作成し、室内実験を行なってきた。特に前報（瀬口ら、1974）では砂モデル内の不飽和領域から飽和領域への補給特性と基底流出のてい減特性との関連性について検討した。その結果、不飽和領域が基底流出現象に対して非常に重要な役割を果たしていることを明らかにした。

本報では、前報での検討をさらに一步進め、このような複雑な基底流出現象を数理モデル化する際、この現象の本質的要素を損わないように、いかに単純化や抽象化を行なうかについて検討した。したがって、今回は前報で詳述したと同様な室内実験を行ない、さらにこの実験結果を不飽和-飽和浸透理論およびそれに代る単純モデル化の適用により解析、検討した。

Ⅱ. 実験装置と実験方法

今回の実験装置およびこの装置に充てんされた砂

* 佐賀大学農学部

は、前報で報告した砂と同じものを使用した。しかし、今回は噴霧量の場所的な分布性を向上させるために、方向および高さの異なる4個のスプレーノズルを使用した。また砂モデルの作成方法および実験方法も前報で詳述した方法とほぼ同じ方法で行なったが、ただ実験開始の時点を実験槽下方部からの脱水開始より12時間後とした。したがって、この時点での砂モデルからの流出量はなく、またモデル内の浸透現象はほぼ停止状態に保たれているものと考えられた。

特に今回の実験は、Fig. 1のように理想化された山腹地層内の浸透現象のうち、特に蒸発や側方および鉛直浸透の激しい表層部を除いた地層をFig. 2に示される砂モデルに対応させて実験を行なった。したがって、砂モデルの上方部からの噴霧は山腹地層の表層部から下層部への浸入現象に相当することになる。

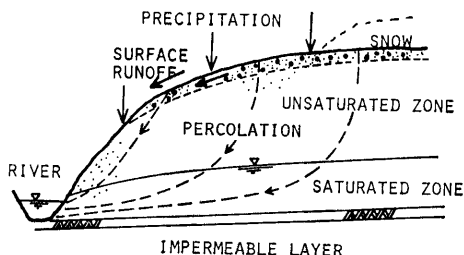


Fig. 1. Idealized cross section of small basin in the mountains.

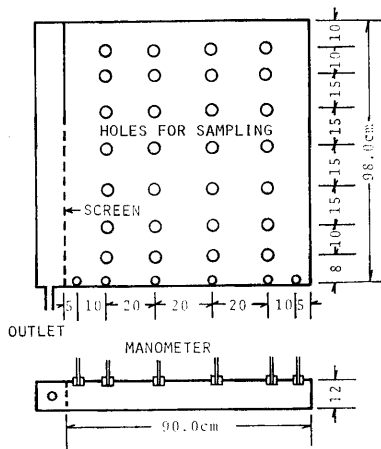


Fig. 2. Sand model for generating base-flow.

Table 1. Conditions for experiment.

	Spray intensity		Mean initial water content	
	R (mm/sec)	λ	θ (m ³ /m ³)	ω
Case (A)	0.0018	0.032	0.13	0.30
Case (B)	0.0026	0.047	0.13	0.30

λ : dimensionless spray intensity

ω : dimensionless mean initial water content

なお、今回は Table 1 に示される噴霧強度の下で実験を行なった。

Ⅲ. 実験結果と解析

1. 多孔質体内の流れの基礎式

基底流出現象の発生場である地層は、一般に応力によつて変形を受ける多孔質体とみなされる。このような多孔質体内での飽和浸透流に対する基礎式は、すでに Hilton and Cooper (1966) により誘導された。ここでは、より一般的に飽和度 S の状態での多孔質体内の浸透流の基礎式を誘導した。

まず、基礎式の誘導に先だち、次の仮定を行なった。

(1) 不飽和領域内の気相は連続体となつて大気に流通している。

(2) 応力による多孔質体の垂直方向の変形は水平方向に比して十分大である。

(3) 変形は常に同じ粒子を含有しながら生起する。

このような多孔質体内において、まず固定された単位体積要素内の浸透流および土粒子の移動についての連続性を考慮する。このとき、次式の関係が成立する。

$$\text{div}[\rho(\mathbf{V} + nS\mathbf{V}_g\mathbf{k})] = \frac{\partial(\rho nS)}{\partial t} \quad \dots\dots (1)$$

および

$$\text{div}[(1-n)\rho_s\mathbf{V}_g\mathbf{k}] = -\frac{\partial}{\partial t}[(1-n)\rho_s] \quad \dots\dots (2)$$

ここで ρ , ρ_s ; 水および土粒子の密度

$\mathbf{V}$; 土粒子の移動に相対する水の浸透流速ベクトル

n ; 間げき率

$\mathbf{V}_g$; 土粒子の垂直方向の移動速度

$\mathbf{k}$; 垂直方向の単位ベクトル

(1) および (2) 式は実質微分 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V}_g \partial/\partial z$ を用いて、次式のように展開される。

$$\text{div}(\rho\mathbf{V}) = -\left(nS\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dn}{dt} + \rho nS\frac{\partial V_g}{\partial z}\right) \quad \dots\dots (3)$$

ここで θ ; 体積含水率 ($= nS$)

および

$$(1-n)\frac{\partial V_g}{\partial z} = \frac{dn}{dt} \quad \dots\dots (4)$$

また、浸透流の運動方程式は、一般に次式で与えられる。

$$\mathbf{V} = S n(\mathbf{V}_w - \mathbf{V}_g) - K(\psi)\text{grad}(\psi + Z) \quad \dots\dots (5)$$

ここで $\mathbf{V}_w$; 真の浸透流速ベクトル

ψ ; 圧力水頭

$K(\psi)$; 水分伝導度

さらに、水の状態方程式は次式で表わされる。

$$\rho = \rho_0 \exp(\beta\psi) \quad \dots\dots (6)$$

ここで β ; 水の圧縮率

したがつて、(4)~(6) 式を利用するとき、(3) 式の各項は、 ψ によつて以下のように表わされる。すなわち

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho\mathbf{V}) = & -\rho\beta\left[K_x(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + K_y(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right. \\ & \left.+ K_z(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + 1\right)\right] \\ & -\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{K_x(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K_y(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}\right. \\ & \left.+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{K_z(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + 1\right)\right\}\right] \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで K_x , K_y , K_z ; x , y および z 方向の水分伝導度

$$nS \frac{d\rho}{dt} = nS\rho\beta \frac{d\phi}{dt} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho \frac{d\theta}{dt} = \rho C \frac{d\phi}{dt} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで C ; 比容水量 ($=d\theta/d\phi$)

$$\begin{aligned} \rho nS \frac{\partial V_g}{\partial z} &= \frac{\rho nS}{1-n} \frac{dn}{dt} \\ &= \frac{\rho nS\sigma}{1-n} \frac{d\phi}{dt} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで σ ; 単位体積要素の体積圧縮率 ($=dn/d\phi$)
ゆえに (3) 式および (7)~(10) 式により, 応力によつて変形する多孔質体内の浸透流は, 次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \rho\beta \left[K_x(\phi) \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + K_y(\phi) \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + K_z(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + 1 \right) \right] \\ + \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_x(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K_y(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial y} \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K_z(\phi) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + 1 \right) \right\} \right] \\ = \left(nS\rho\beta + \rho C + \frac{\rho nS\sigma}{1-n} \right) \frac{d\phi}{dt} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

2. 不飽和一飽和浸透理論による解析

本節では前述の砂モデルによつて得られた実験結果を不飽和一飽和浸透理論の立場から解析した.

ところで, (11) 式には簡単に把握することのできない多くのパラメータが含まれているため, この式を用いて実際の現象を解析することは容易ではない.

ここでは, この砂モデルに対し, 次の仮定を設け, (11) 式の簡略化を計つた.

(1) 砂層は剛結多孔体である. すなわち

$$V_g = 0, \quad n = \text{const.}, \quad \sigma = 0$$

(2) 浸透水は非圧縮性である. すなわち

$$\rho = \text{const.}, \quad \beta = 0$$

(3) 浸透流は鉛直 (z -方向) および水平方向 (x -方向) の二次元流である. すなわち

$$K_y(\phi) = 0$$

(4) 砂層は均質, 等方性である. すなわち

$$K_x(\phi) = K_z(\phi) = K(\phi)$$

以上の仮定により, (11) は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\} + \frac{\partial K}{\partial z} \\ = C(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

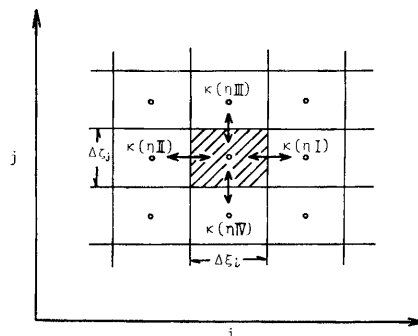


Fig. 3. Finite difference mesh.

上式から明らかなように, (12) 式は非線形放物型の偏微分方程式であるため, この式を容易に解くことはできない. 本報では差分法による数値解析を行なつた.

ところで, このような偏微分方程式を差分法で解析する場合, すべての空間的および時間的なきざみ幅に対して収束性および安定性のすぐれている implicit 型差分法が有効である. また今回のように多次元で格子点の数が多くなる場合には, 特に SLOR 法のような線反復法や ADI 法がより効果的である.

Rubin (1968), Nwa *et al.* (1973) は, このような不飽和一飽和領域の共存する多孔質体内の多次元浸透流の解析を ADI 法で, また Freeze (1971) は SLOR 法 (論文では LSOR 法と記されている) で行なっている. ここでは SLOR 法を利用した.

まず, この砂モデルに対し, Fig. 3 のような格子網を作り, この格子網に対して (12) 式の差分化を行なつた. なお, 以後の計算過程では, 次式で示される無次元量を用いた.

$$\xi = x/L, \quad \zeta = z/L, \quad \tau = K_s t / \theta_s L$$

$$\omega = \theta / \theta_s, \quad \eta = \phi / L, \quad \kappa = K / K_s$$

ここで L ; 基準長 (砂モデルの底辺長)

K_s ; 飽和水分伝導度

θ_s ; 飽和体積含水率

したがつて, (12) 式の差分式は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \xi_i} \left[\kappa(\eta I) \left(\frac{\eta_{i+1,j}^i + \eta_{i+1,j-1}^i - \eta_{i,j}^i - \eta_{i,j-1}^i}{\Delta \xi_{i+1} + \Delta \xi_i} \right) \right. \\ \left. - \kappa(\eta II) \left(\frac{\eta_{i,j}^i + \eta_{i,j-1}^i - \eta_{i-1,j}^i - \eta_{i-1,j-1}^i}{\Delta \xi_i + \Delta \xi_{i-1}} \right) \right] \\ + \frac{1}{\Delta \zeta_j} \left[\kappa(\eta III) \left(\frac{\eta_{i,j+1}^i + \eta_{i,j+1-1}^i - \eta_{i,j}^i - \eta_{i,j-1}^i}{\Delta \zeta_{j+1} + \Delta \zeta_j} + 1 \right) \right. \\ \left. - \kappa(\eta IV) \left(\frac{\eta_{i,j}^i + \eta_{i,j-1}^i - \eta_{i,j-1-1}^i - \eta_{i,j-1-1}^i}{\Delta \zeta_j + \Delta \zeta_{j-1}} + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \alpha(\eta V) \left(\frac{\eta_{i,j}^t - \eta_{i,j}^{t-1}}{\Delta \tau^t} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$\eta I = \frac{\eta_{i+1,j}^t + \eta_{i+1,j}^{t-1} + \eta_{i,j}^t + \eta_{i,j}^{t-1}}{4},$$

$$\eta II = \frac{\eta_{i,j}^t + \eta_{i,j}^{t-1} + \eta_{i-1,j}^t + \eta_{i-1,j}^{t-1}}{4},$$

$$\eta III = \frac{\eta_{i,j+1}^t + \eta_{i,j+1}^{t-1} + \eta_{i,j}^t + \eta_{i,j}^{t-1}}{4},$$

$$\eta IV = \frac{\eta_{i,j}^t + \eta_{i,j}^{t-1} + \eta_{i,j-1}^t + \eta_{i,j-1}^{t-1}}{4},$$

$$\eta V = \frac{\eta_{i,j}^t + \eta_{i,j}^{t-1}}{2}$$

$$i = 1 \sim M, j = 1 \sim N, t = 1 \sim T$$

さらに格子網に対し、 $z(j)$ 方向に SLOR 法を適用するとき、(13) 式は、 $\eta_{i,j+1}^t$ 、 $\eta_{i,j}^t$ 、 $\eta_{i,j-1}^t$ を未知数とする三項方程式となるため、Gauss の消去法により、解は容易に求められる。

一方、この砂モデルの境界は Fig. 4 のようになるため、境界条件は次式で表わされる。

$$OA \quad \dots\dots\dots \partial \eta / \partial \zeta = -1$$

$$AE \quad \dots\dots\dots \eta = 0$$

$$BE \quad \dots\dots\dots \partial \eta / \partial \xi = 0$$

$$BC \quad \dots\dots\dots \partial \eta / \partial \zeta = \lambda / \kappa - 1$$

$$OC \quad \dots\dots\dots \partial \eta / \partial \xi = 0$$

また (13) 式の解析に必要な供試土の特性を示す $\kappa(\eta) \sim \eta$ および $\omega(\eta) \sim \eta$ の関係はそれぞれ土柱法および定常法で求めた。その結果は Fig. 5 および Fig. 6 に示される。

図示されるように、これらの関係の間にはヒステリシス現象が認められる。しかし、この現象は比較的小さいため、ここではこの現象を考慮せず、脱水過程の関係のみを考慮した。

ところで、 $\omega(\eta) \sim \eta$ および $\kappa(\eta) \sim \eta$ の間には、ある種の関数関係の存在が一般に認められている (Bear *et al.* 1968)。ここでは Taylor and Luthin (1969) の提示した関数型を用いて、次式で近似した。

$$\begin{aligned} \kappa(\eta) &= 1.0 && \dots\dots \eta \geq 0 \\ \kappa(\eta) &= \frac{1.0}{1.0 + 3000.0 \eta^4} && \dots\dots \eta < 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \omega(\eta) &= 1.0 && \dots\dots \eta \geq 0 \\ \omega(\eta) &= \frac{1.0}{1.0 + 94.0 \eta^4} && \dots\dots \eta < 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって、比容水量 $\alpha(\eta)$ は (15) 式より、次式で表わされる。

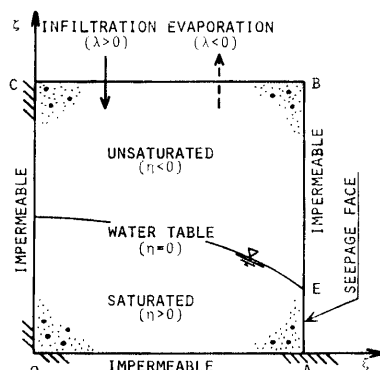


Fig. 4. Boundary conditions of the sand model.

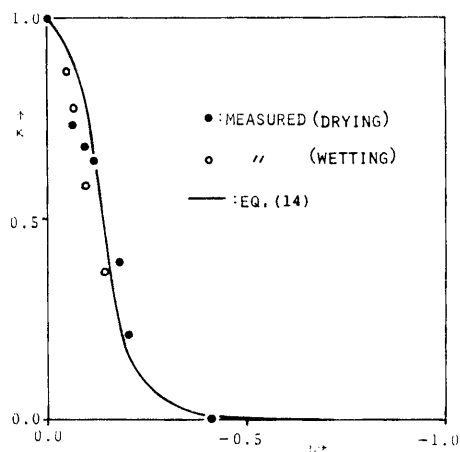


Fig. 5. Relationship between κ and η .

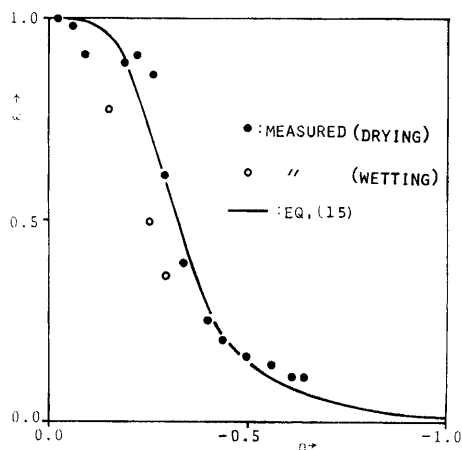
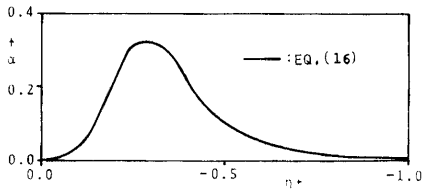


Fig. 6. Relationship between ω and η .

Fig. 7. Relationship between α and η .

$$\alpha(\eta) = 0.0 \quad \dots \eta \geq 0$$

$$\alpha(\eta) = -\frac{376.0\eta^3}{(1.0 + 94.0\eta^4)^2} \quad \dots \eta < 0 \quad \dots (16)$$

また (16) 式を図示すると Fig. 7 のようになる。

ところで $\eta_{i,j+1}^n$, $\eta_{i,j}^n$, $\eta_{i,j-1}^n$ を未知数とする三項方程式の係数の中に、これから求めようとする未知数 $\eta_{i+1,j}^n$, $\eta_{i-1,j}^n$ が含まれている。したがって、ここでは Freeze の場合と同様に、次式で示される一次外挿式および不足緩和式を用いて、これらの未知数を推定した。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{(e)i,j}^n &= \eta_{i,j}^0 & \dots t=1 \\ \eta_{(e)i,j}^n &= \eta_{i,j}^{n-1} + \frac{\Delta\tau^n}{2\Delta\tau^{n-2}} (\eta_{i,j}^{n-1} - \eta_{i,j}^{n-2}) & \dots t>1 \end{aligned} \right\} n=1$$

$$\dots (17)$$

ここで n ; 反復回数

$\eta_{(e)i,j}^n$; 第 n 次近似値の予測値

$$\eta_{(e)i,j}^n = \eta_{(e)i,j}^{n-1} + C_1 (\eta_{i,j}^{n-1} - \eta_{(e)i,j}^{n-1}) \quad \dots t \geq 1, n \geq 1$$

$$\dots (18)$$

ここで C_1 ; 不足緩和係数 ($0 \leq C_1 \leq 1$)

これらの推定値を用いて算出された第 n 次近似値 $\eta_{(e)i,j}^n$ は、さらに次式を用いて過緩和された。

$$\eta_{i,j}^n = \eta_{(e)i,j}^n + C_2 (\eta_{(e)i,j}^n - \eta_{i,j}^{n-1}) \quad \dots (19)$$

ここで C_2 ; 過緩和係数 ($1 \leq C_2 \leq 2$)

したがって、第 n 次近似の時、次式の関係が成立した場合

$$\sum_{i,j=1}^{M,N} |\eta_{i,j}^n - \eta_{i,j}^{n-1}| \leq \varepsilon \quad \dots (20)$$

第 n 次近似値 $\eta_{i,j}^n$ を (13) 式の厳密解に十分収束した解とみなした。

また、このような非定常現象の場合、境界条件 $\partial\eta/\partial z = 0$ と $\eta = 0$ との境界点 E は時間に従属している。したがって、それぞれの時点の反復計算時には、 E 点の位置は明らかにされていなければならない。ここでは (17) 式および (18) 式によって推定された $i=M$ 線上の推定値 $\eta_{(e)M,j}^n$ を用いて、 $\eta_{(e)M,j}^n > 0$ および $\eta_{(e)M,j}^n \leq 0$ の条件を満たしている E 点を試行的に推

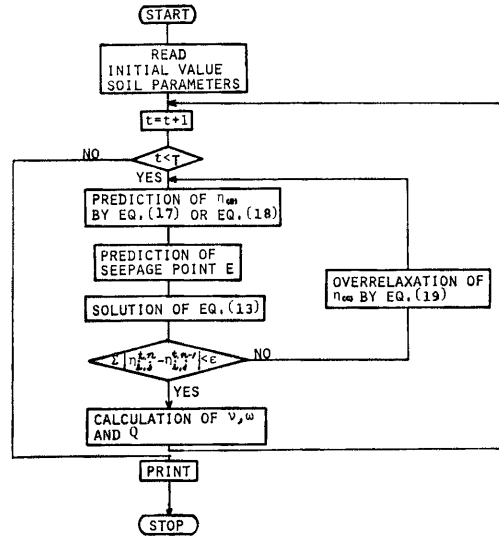


Fig. 8. Flow chart of SLOR method.

Table 2. Conditions for numerical analysis by SLOR method.

Relaxation factor		Nodal spacing		Time step	
C_2	C_3	$\Delta\xi_i$	$\Delta\xi_j$	$t < 10$	$t \geq 10$
1.0	1.3	0.05	0.03	$\Delta\tau = 0.00007 \times 2.0^{(t-1)}$	$\Delta\tau = 0.03584$

定した。

以上の計算過程は Fig. 8 にまとめられる。

なお、今回の解析の条件は Table 2 に示される。

Table 1 および Table 2 の条件の下で求められた実験および解析結果は Fig. 9～20 に示される。

また、砂モデルからの流出現象の上昇時および減時の流出量をそれぞれ $\sqrt{\tau} \sim Q$ および $\tau \sim l_n Q$ の目盛の図面にプロットすると、Fig. 21 および Fig. 22 のようになる。

以上の実験および解析の結果をまとめると次のようになる。

(1) 流出量の実験値と解析値との間には、特にその上昇時および減時において、かなり大きな差異が認められる。しかし、流出量の全般的な傾向は比較的良く類似している。

(2) 流出量のピーク時附近において、解析された水分量および自由水面の値は、ともに実験値より小さくなっている。

(3) 全水頭の解析値によれば、砂モデル内の流れは大きく2種類の流れ、すなわち飽和領域および水分量

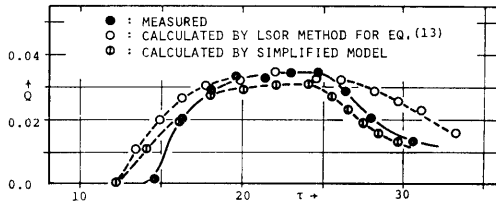


Fig. 9. Comparison of measured discharge with calculated discharge from the sand model for case (A).

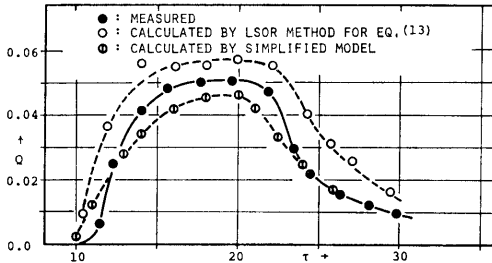


Fig. 10. Comparison of measured discharge with calculated discharge from the sand model for case (B).

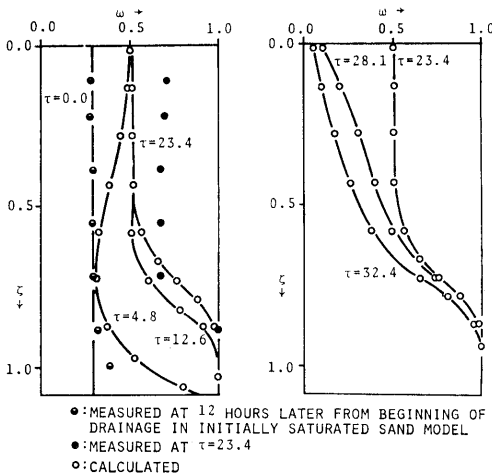


Fig. 11. Calculated and measured soil moisture profiles at $\xi=0.5$ in the sand model for case (A).

の比較的高い不飽和領域内での浸出面に向う二次元流と水分量の低い不飽和領域内での鉛直方向の一次元流より成り立っている。しかし、流出現象の初期および終期あるいは噴霧強度の弱い場合、二次元流の発生領域は減少し、逆に鉛直方向の一次元流の発生領域は増加する傾向にある。また飽和領域内の流れは、ほぼ Dupuit-Forchheimer の仮定に従う水平方向の準一

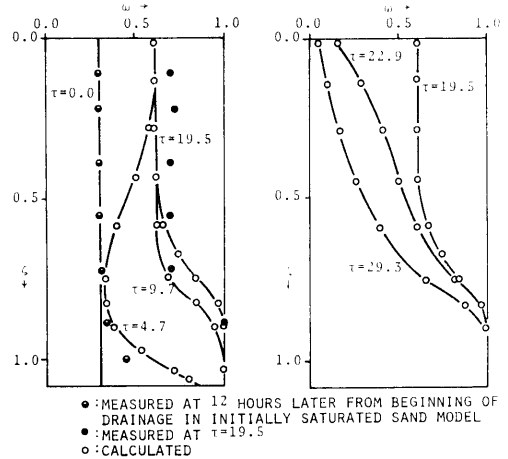


Fig. 12. Calculated and measured soil moisture profiles at $\xi=0.5$ in the sand model for case (B).

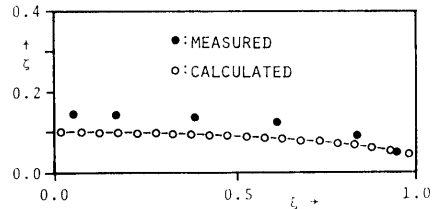


Fig. 13. Comparison of measured water table with calculated water table in the sand model at $\tau=23.4$ for case (A).

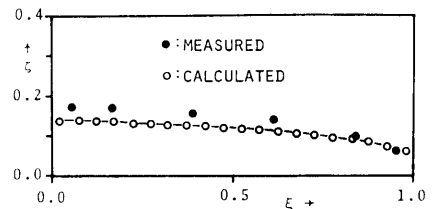


Fig. 14. Comparison of measured water table with calculated water table in the sand model at $\tau=19.5$ for case (B).

様流となっている。

(4) 砂モデルからの流出曲線は、性質の異なる三つの部分すなわち、上昇部、持続部および減部より成り立っている。特に上昇部および減部はそれぞれ $Q(\tau) = Q_0/\tau$ および $Q(\tau) = \sum_{i=1}^{1 \text{ or } 2} Q_i(\tau)e^{-\alpha_i \tau}$ の関数型で近似される。

3. 単純モデル化による解析

前節 2 の実験および解析結果を参照にすると、砂

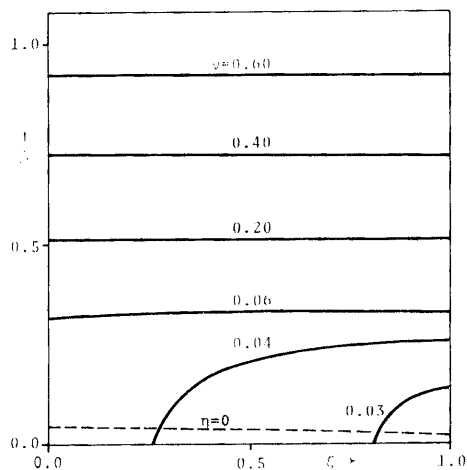


Fig. 15. Calculated total head in the sand model at $\tau=13.3$ for case (A).

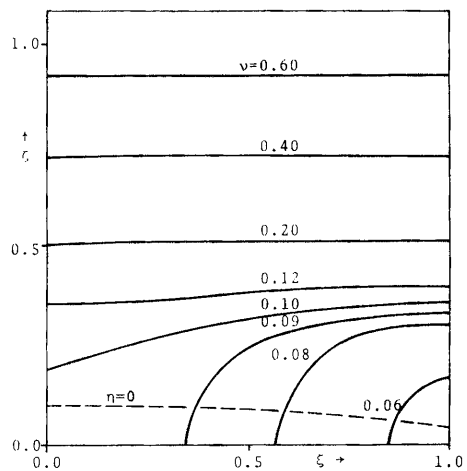


Fig. 16. Calculated total head in the sand model at $\tau=23.4$ for case (A).

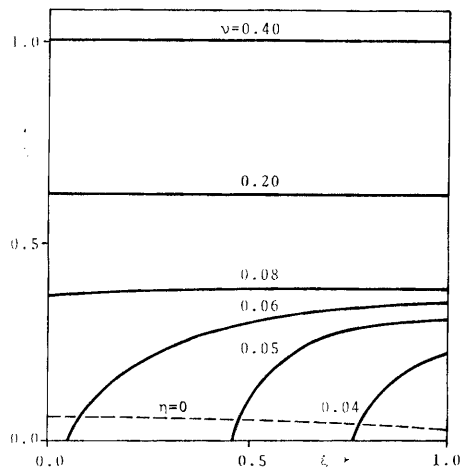


Fig. 17. Calculated total head in the sand model at $\tau=33.2$ for case (A).

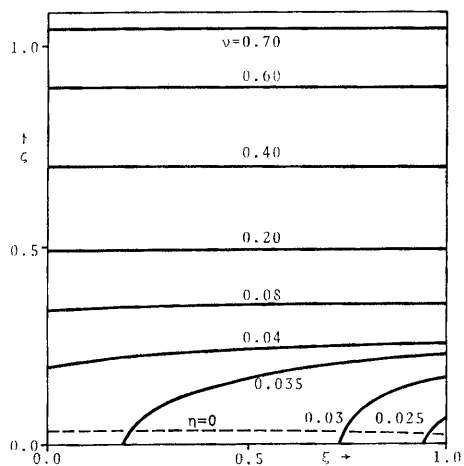


Fig. 18. Calculated total head in the sand model at $\tau=10.5$ for case (B).

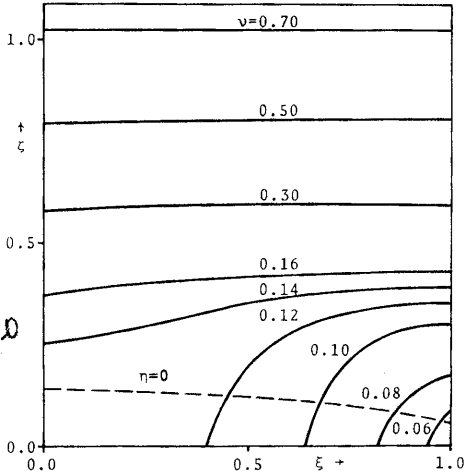


Fig. 19. Calculated total head in the sand model at $\tau=19.5$ for case (B).

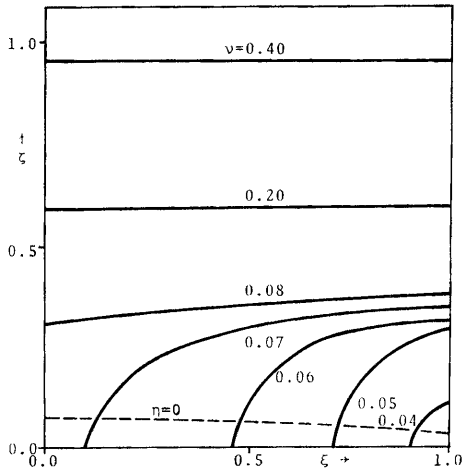


Fig. 20. Calculated total head in the sand model at $\tau=28.6$ for case (B).

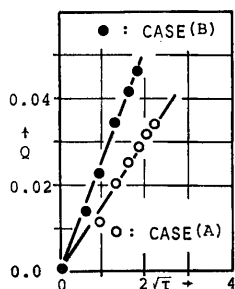


Fig. 21. Rising curves of discharge from the sand model.

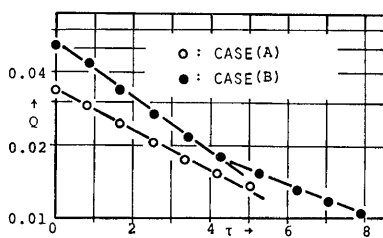


Fig. 22. Recession curves of discharge from the sand model.

モデル内の不飽和領域から飽和領域さらには浸出面に至る連続的な二次流は、Fig. 23 に示されるように近似的に2種類の流れ、すなわち不飽和領域内での鉛直流と飽和領域内での水平流とに分割される。

この場合、各の領域内の流れは、次式で表わされる。すなわち(12)式より、不飽和領域において

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \kappa(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right\} + \frac{\partial \kappa}{\partial \zeta} = \alpha(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \quad \dots(21)$$

一方、飽和領域において Dupuit-Forchheimer の仮定および連続性より

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{W}{H} \quad \dots\dots(22)$$

ここで H ; 自由水面の位置

W ; 不飽和領域から飽和領域への補給強度
したがって流出解析のように砂モデル内の浸透流の流況より砂モデルからの流出量を重視する場合には(21)式と(22)式との結合による近似的な解析も有効であると考えられる。

ところで Pikul *et al.* (1974) は(21)式と(22)式との結合による二次元流の近似的な解析を差分法により行なっている。そして彼らは、この方法の有用性を検証している。しかし、この近似的な解法も、前述の不飽和-飽和浸透理論の適用による解法と同様に、かなり面倒な数値解析を要する。

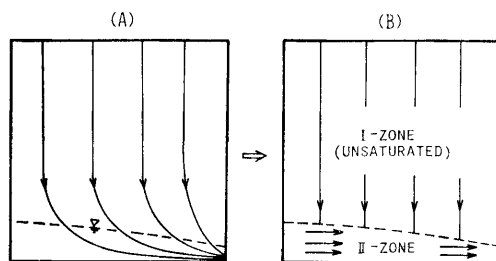


Fig. 23. Modeling of two-dimensional flow in the sand model.

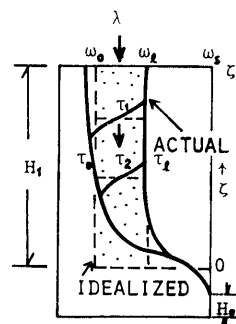


Fig. 24. Idealization of percolation in the unsaturated zone.

そこで、本節では、特に複雑な解析を要する不飽和領域内の浸透現象すなわち不飽和領域から飽和領域への雨水の補給過程を以下のように単純モデル化し、解析の簡略化を計った。

(1) 不飽和領域の全層にわたって、水分量がある限界値 ω_1 に達する時点 τ_1 までは、不飽和領域から飽和領域への補給は生じない。すなわち $W=0$

(2) τ_1 から噴霧停止時点 τ_s までの間、補給強度は噴霧強度に等しい。すなわち $W=\lambda$

(3) τ_s 以後、補給強度は指数関数的に減少する。すなわち $W=\lambda \exp \{-r(\tau-\tau_s)\}$

ここで(1)の過程は Rubin (1963) により提示された雨水の浸潤理論に基づいている。すなわち、この理論は $0 < \lambda \leq \kappa(\omega_s)$ ならば、すべての有限層において、時間の経過に伴い $\partial \omega / \partial \eta \rightarrow 0$ かつ $\omega \rightarrow \omega_1 = \kappa^{-1}(\lambda)$ となることを明らかにしている。したがって、Fig. 24 に示されるように(1)の過程は、不飽和領域の理想化された水分量分布断面が $\partial \omega / \partial \zeta \rightarrow 0$ かつ $\omega \rightarrow \omega_1$ となるまでの過程を表わしているものと仮定すれば、近似的に $\tau_1 \approx H_1(\omega_1 - \omega_0) / \lambda$ が成立する。

さらに(2)の過程は τ_1 以後の連続性により成立する。また(3)の過程においては、以下の考察により、その妥当性を論証することができる。すなわち

(21) 式においては吸引圧に比べ重力の作用が比較的小さく、かつ水分量拡散係数 $D(\omega) = K(\eta) d\eta/d\omega$ がほぼ一定とみなされる場合、(21) 式は次式の一次元拡散型方程式となる。

$$D \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また次式の初期および境界条件を与えると

$$\begin{aligned} \tau = \tau_s \quad \dots\dots \omega &= \omega_0 \\ \zeta = 0 \quad \dots\dots \omega &= \omega_i \\ \zeta = \zeta_1 \quad \dots\dots \partial \omega / \partial \zeta &= 0 \end{aligned}$$

(23) 式の解は次式で表わされる (小平, 1971)。

$$\begin{aligned} \omega(\zeta, \tau) = \omega_i - (\omega_i - \omega_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \\ \exp\left\{-\frac{D(2n-1)^2\pi^2(\tau-\tau_s)}{4\zeta_1^2}\right\} \sin \frac{(2n-1)\pi\zeta}{2\zeta_1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

したがって、補給強度は次式のようになる。

$$\begin{aligned} W(\tau) = -D \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \\ = \frac{2D(\omega_i - \omega_0)}{\zeta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{D\pi^2(\tau-\tau_s)}{4\zeta_1^2}\right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

さらに (25) 式は次式のように近似化される。

$$W(\tau) \approx \frac{2D(\omega_i - \omega_0)}{\zeta_1} \exp\left\{-\frac{D\pi^2(\tau-\tau_s)}{4\zeta_1^2}\right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで $\tau = \tau_s$ のとき $W(\tau) = \lambda$ とするとき、補給強度は次式で表わされる。

$$W(\tau) = \lambda \exp\{-\tau(\tau - \tau_s)\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$\tau = D\pi^2/4\zeta_1^2$$

以上に述べた砂モデル内の浸透現象の単純モデル化を検証するために、このモデル化により前述の実験結果を解析した。なお、この場合、(22) 式の境界条件の都合上、予め (A)、(B) のおのおのに対し、 $\zeta = 0.030$, $\zeta = 0.035$ の飽和領域を設定した。したがってこれらの場合の毛管水帯を考慮するとき、理想化された不飽和領域はともに $H_1 = 0.74$ 程度となり、 $\omega = \lambda$ の補給が生起する時点は Fig. 25 の陰影部に相当する水分量が噴霧された時点に対応する。ゆえに (A)、(B) の各に対し、 $\tau_i = 12.2$ および $\tau_i = 9.9$ となる。

また噴霧停止以後の脱水過程における不飽和領域内の平均的な圧力水頭を、ともに -0.2 程度とするとき $D = 0.07$ となり、さらにてい減定数 r は 0.3 前後と

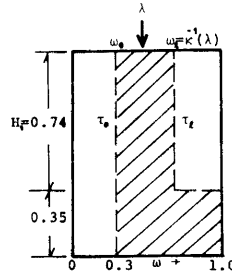


Fig. 25. Accumulated volume of spray during τ_0 to τ_i .

なる。

一方、飽和領域からの流出量は次式に示される初期および境界条件の下で、(22) 式を predictor-corrector 差分法を用いて解析し、算定した。

$$\tau = 0 \quad \dots\dots H = H_0 \quad (\text{A, B のおのおのに対し, } 0.030, 0.035)$$

$$\xi = 0 \quad \dots\dots H = H_0$$

$$\xi = 1 \quad \dots\dots \partial H / \partial \xi = 0$$

(predictor)

$$\begin{aligned} H_{i,j+1/2} = \frac{2H_{i,j+1/2} + H_{i-1,j+1/2}}{(d\xi)^2} \\ - \frac{1}{H_{i,j}} \frac{H_{i,j+1/2} - H_{i,j}}{(d\tau/2)} - \frac{1}{H_{i,j}} \left(\frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2d\xi} \right)^2 \\ - \frac{W_{i,j}}{H_{i,j}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(corrector)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{H_{i+1,j+1} - 2H_{i,j+1} + H_{i-1,j+1}}{(d\xi)^2} \right. \\ \left. + \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(d\xi)^2} \right\} \\ - \frac{1}{H_{i,j+1/2}} \left(\frac{H_{i+1,j+1} - H_{i,j}}{d\tau} \right) \\ - \frac{1}{H_{i,j+1/2}} \left(\frac{H_{i+1,j+1/2} - H_{i-1,j+1/2}}{2d\xi} \right) - \frac{W_{i,j}}{H_{i,j+1/2}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\text{ここで } i = 1 \sim n, \quad j = 0 \sim m$$

$$d\xi = 1/n, \quad d\tau = 1/m$$

さらに

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(W_{i,j} - \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{d\tau} \right) d\xi \quad \dots\dots (30)$$

これらの解析結果は Fig. 9 および Fig. 10 に示される。

また前節 2 で述べた不飽和—飽和浸透理論式 (12) 式の適用による解析値をもとに、不飽和領域内での水

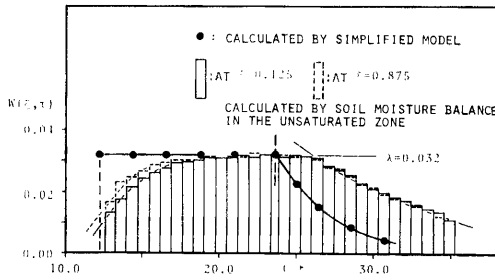


Fig. 26. Calculated recharge rate from unsaturated zone to saturated zone in the sand model for case (A).

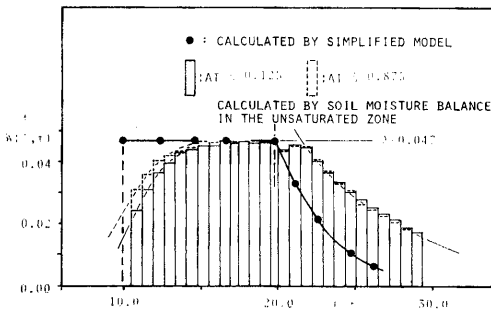


Fig. 27. Calculated recharge rate from unsaturated zone to saturated zone in the sand model for case (B).

分収支から算定した飽和領域への補給量と本節のモデル化によつて算定した不飽和領域から飽和領域への補給量とを対比させると Fig. 26 および Fig. 27 のようになる。

以上の結果に示されるように、流出現象の上昇時を除いて、解析値の全般的な流出量の傾向は実験値と比較的良く一致している。また、単純モデル化による不飽和領域から飽和領域への補給強度の傾向は、てい減部を除いて (12) 式の解析値から算定した補給強度の傾向と、その発生時点および全般的な傾向において比較的良く類似している。

IV. 検 討

1. 解析結果について

前章で述べたように、不飽和-飽和浸透理論式(12)式の適用による解析値と実験値との間には、大小の差異が認められた。この原因として、次の3点が考えられる。

(1) 解析に使用された基礎式 (12) 式が物理的厳密性において不十分である。すなわち (12) 式の成立過程において用いられた種々の仮定が、この砂モデルお

よびその内部の浸透現象に対して的確でない。

(2) 供試土の特性間の関係式 (14) 式および (15) 式が、この砂モデルに充てんされた供試土の特性間の関連性を正確に表わしていない。

(3) 差分法により求められた解析値が基礎式 (12) 式の十分に近似された解でない。

これらのうち、どの原因が、どれほどのオーダで影響しているかは明らかではない。しかし Fig. 11 および Fig. 12 に示される土層内の水分量分布の時間的推移が常識的である点、あるいは Fig. 9 および Fig. 10 に示される流出量の実験値と解析値との全般的な流出傾向が比較的良く類似している点などを考慮するとき、この主要な原因として (2) が考えられる。

そこで、まず解析値に使用された (14) 式および (15) 式から算出された値と実測値 ($\kappa'(\eta)$ および $\omega'(\eta)$) との比較を行なつた。その結果は Table 3 および Table 4 に示された。

これらの表から明らかなように、 $\eta < -0.4$ において両式の実測値に対する近似度の低さが目立つ。特に $\eta < -0.4$ の部分において、(14) 式より算定される $\kappa(\eta)$ の値は実際の値に比べ、かなり大きくなっているものと考えられる。

いま η の低い部分のみの近似度を向上させるために、かりに (14) 式を次式のように修正し、 $\kappa(\eta)$ を小さくしてみる。

$$\kappa(\eta) = \frac{1.0}{1.0 + 5000.0\eta^4} \quad (31)$$

この場合、 $\eta = -0.41$ のとき $|\kappa(\eta) - \kappa'(\eta)| / \kappa'(\eta)$ 0.40 となり、 $\eta = -0.4$ 附近の (31) 式の実測値 $\kappa'(\eta)$ に対する近似度は (14) 式よりもかなり向上している。そこで、(15) 式および (31) 式を用いて、Rubin and Steinhardt (1963) の雨水浸潤理論にしたがい流出量ピーク時点 ((A) の場合 $t = 23.4$, (B) の場合 $t = 19.5$) における不飽和領域の水分量を算定すると Table 5 のようになる。

この表から明らかなように、(31) 式による算定値と実験値とほぼ等しくなり、Fig. 11 および Fig. 12 に見られるような大きな差異は認められない。したがつて、 η の比較的小さい部分においても近似度の良い $\kappa(\eta)$ を解析に用いるならば、上昇時およびてい減時における不飽和領域内の浸透現象は抑制され、さらに貯留効果が作用するために、前章Ⅲで明らかにしたような解析値と実験値との間の差異はかなり減少するものと考えられる。

特に本報では、取り扱い上の便利さから、 $\kappa(\eta) \sim \eta$

Table 3. Comparison of κ' with κ .

η	-0.063	-0.093	-0.119	-0.183	-0.206	-0.416
κ'	0.731	0.680	0.646	0.391	0.212	0.005
κ	0.951	0.817	0.624	0.229	0.156	0.011
$ \kappa - \kappa' $	0.31	0.20	0.03	0.41	0.26	1.20

 κ' : measured κ : calculated from Eq. (14)Table 4. Comparison of ω' with ω .

η	-0.01	-0.02	-0.06	-0.09	-0.12	-0.19	-0.22	-0.26
ω'	0.98	1.00	0.98	0.91	0.89	0.89	0.91	0.86
ω	1.00	1.00	1.00	0.99	0.98	0.89	0.82	0.70
$ \omega - \omega' $	0.22	0.00	0.02	0.09	0.10	0.00	0.10	0.19

η	-0.29	-0.34	-0.40	-0.44	-0.50	-0.56	-0.61	-0.64
ω'	0.61	0.39	0.25	0.20	0.16	0.14	0.11	0.11
ω	0.60	0.44	0.29	0.22	0.15	0.10	0.07	0.06
$ \omega - \omega' $	0.02	0.13	0.16	0.10	0.06	0.29	0.36	0.45

 ω' : measured ω : calculated from Eq. (15)Table 5. Comparison of ω' with ω in the unsaturated zone at $\tau=19.5$ [case (B)] and 23.4 [case (A)].

Case	Measured (ω')	Calculated (ω)
(A)	0.67	0.69 (0.51)
(B)	0.73	0.70 (0.61)

() : calculated by using Eq. (14) and Eq. (15)

および $\omega(\eta) \sim \eta$ の関係を Taylor and Luthin (1969) の提示した関数型で近似した。しかし、このような関数による近似では、 η の全域にわたって実測値 $\kappa'(\eta)$ を精度良く表わすことはできない。このような不備を除くためには、実測値 $\kappa'(\eta)$ および $\omega'(\eta)$ をそのまま利用し、任意の η に対する $\kappa(\eta)$ および $\omega(\eta)$ は $\kappa'(\eta)$ および $\omega'(\eta)$ より補間法により推定する方法が適当と考えられる。

一方、単純モデル化の適用による解析法と実験値との流出現象の上昇時における差異は不飽和領域内の浸潤過程を大胆な仮定の下で取り扱ったためと考えられる。このことは、Fig. 26 および Fig. 27 に示される2種類の方法により算定された不飽和領域から飽和領

域への補給強度の傾向を見ても明らかである。したがって、不飽和領域内の浸透現象の単純モデル化を適切に行ない、不飽和領域から飽和領域への補給強度を正しく与えれば、このような不飽和領域と飽和領域との流れの結合による単純モデル化により、砂モデルからの流出現象は満足すべき精度で解析されうるものと考えられる。

2. 数値計算について

ここでは、特に複雑な不飽和-飽和浸透理論式(12)の数値計算について検討した。

前述したように本報では不飽和-飽和浸透理論式(12)式を implicit 型差分法により解析したが、このように差分法を用いる場合、収束速度すなわち計算時間および数値解の精度が重要な問題となってくる。この収束速度および精度は空間的なきざみ幅 $\Delta \xi_i$, $\Delta \xi_j$, さらに時間的なきざみ幅 $\Delta \tau^i$ に大きく関係している。また SLOR 法の適用の場合、不足緩和係数 C_2 および過緩和係数 C_3 も収束速度に大きく影響してくる。したがって、この方法で数値計算を行なう際、 $\Delta \xi_i$, $\Delta \xi_j$, $\Delta \tau^i$, C_2 および C_3 をいかに決定するかが、非常に重要な課題である。

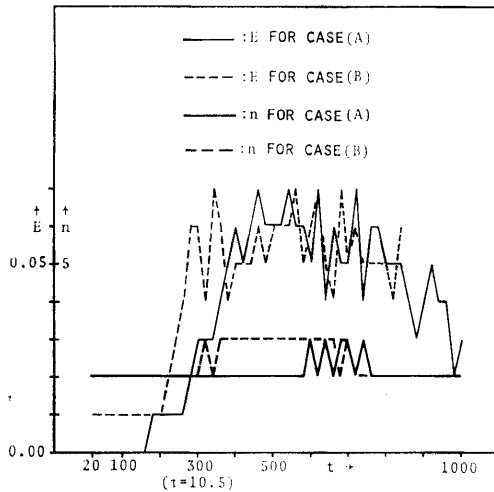


Fig. 28. Variations of n and E with time step t .

今回の場合、数回の試行の結果、 $C_2=1.0$ および $C_3=1.3$ とした。また $4\delta_1$, $4\delta_2$ および 4τ は、計算時間および計算機の容量 (FACOM 230-75) を考慮し、Table 2 のように決定した。なお、この場合、砂モデルは 20 (ξ -方向) $\times 36$ (ζ -方向) = 720 個の格子網に分割された。

また本報では、第 n 次近似値 q_i^n が (20) 式の条件 ($\varepsilon=0.07$) を満たした時、その値を差分式 (13) 式の厳密解に十分近似した数値解とみなした。ところで、(A), (B) の場合の時間ステップ 20 回ごとの時点の反復回数 (n) と $E = \sum_{i,j=1}^{M,N} |q_i^n - q_i^{n-1}|$ とを図示すると Fig. 28 のようになる。

この図に示されるように、(A) および (B) の場合、 $t=300$ 回 ($\tau=10.5$) 前後において、 E の値は急増し、また n の回数も 2 回から 3 回へと増加する傾向にある。ところで、この $\tau=10.5$ の時点は、丁度砂モデルの内部に飽和領域が生じ、このモデルからの流出が生じ始める時点に対応している。このように砂モデルの内部に不飽和領域と飽和領域とが共存し、モデル内部の浸透現象および浸出面附近の境界条件が煩雑化する場合、収束速度および数値解の精度はかなり低下してくる。

また、本報では第 n 次近似値 q_i^n の収束判定の基準式として (20) 式を用いたが、この式は、すべての格子点上で q_i^n の精度がほぼ等しくなっていると言う前提の下で使用した。しかし、実際には、不飽和領域と飽和領域との境界面や浸出面附近の格子点上で、 q_i^n の精度は低下する傾向にあつた。したがって、こ

れらの格子点上の数値の精度は、他の格子点上の数値解の精度に比べ、劣っていると考えられる。

このような不合理を除くためには、(20) 式に代り次式で示される収束判定の基準式が有効であると考えられる。

$$|q_i^n - q_i^{n-1}| \leq \varepsilon \quad \dots\dots\dots (32)$$

しかし、今回のような二次元の非定常現象を解析する際、非常に計算時間が費されることが予想され、(32) 式の適用は実行しなかつた。

3. 基底流出現象の数値モデル化について

数値モデルは、一般に対象とする現象を数式で表現した模型の一種と言える。特に自然界の現象は、種々の因子が相互に依存しているため、非常に複雑な様相を呈している。このような現象を単純な数式で表現することは非常に困難である。したがって、一般には、観測あるいは実験により、現象の特徴、本質を把握し、さらに単純化、抽象化し、その数式化が行なわれる。

本報では、基底流出現象の本質を山腹地層内を発生場とし、さらに地表面から河道に至る多次元的な浸透現象としてとらえた。そしてこの現象を二次元の不飽和・飽和浸透に基づく数式化および不飽和領域内を発生場とする鉛直流と飽和領域内を発生場とする準一様な水平流との結合に基づく数式化を行なつた。またこれらの数式化により、砂モデルからの流出現象はほぼ表現されうることを前章で明らかにした。

ところで、これらの数式化が基底流出現象の数値モデルとして有用であるためには、これらが適用上簡便であり、また多くの実際の現象を的確に表現しなければならない。

このような点に留意し、上述の 2 種類の数式化について検討してみると、まず前者は後者に比べ物理的厳密性においてすぐれていることは明白である。しかし上述したように、この点は数値モデルの不可欠な条件ではない。特に砂モデルの解析結果から推測されるように、前者を適用する際、地層内の土壌物理的な特性間の関連性すなわち $\kappa(\eta) \sim \eta$ および $\omega(\eta) \sim \eta$ の関係がかなり正確に把握されなければならない。しかし、非常に複雑で広範囲にわたる実際の流域の地層について、これらの関連性が正確に把握されたとしても、前者を長期間にわたって適用する際、非常に複雑でばく大な数値計算が必要となり、全面的に大型計算機に依存しなければならない。一方、後者は浸透現象を一次元流れの組み合わせによりモデル化しているため、計算過程は非常に簡略化される。特に不飽和領域内の流れのモデル化に工夫を凝らせば、適用上の簡便

性および精度の向上は十分期待される。また、われわれが一般に入手しうる資料は数万分の一の地形図と流出量および降雨量ぐらいである。このような点を考慮するとき、後者の数式化は、今後の基底流出現象の数理解モデル化への指針を示すものと考えられる。

V. ま と め

本報では、基底流出現象の数理解モデル化への指針を得るために、実験的な検討を行なった。特に、ここでは、基底流出現象を本質的には山腹地層内を発生場とし、さらに地表面から河道に至る多次元的な浸透現象と見なし、その地層に対応する理想的な砂モデルを用いて基底流出実験を行なった。そしてその実験結果を二次元の不飽和・飽和浸透理論および浸透現象の単純モデル化の適用により解析し、検討を加えた。

その結果、実際流域への適用上の簡便さ、および解析精度などの点を考慮するとき、不飽和領域内での鉛直流と飽和領域内での準一様な水平流との結合による単純モデル化が、基底流出現象の数理解モデル化への方向を示すものとして注目される。

今後は、さらに、この数理解モデル化への方向に従って、基底流出現象の数理解モデル化の具体化について詳細に検討する。

参 考 文 献

- Bear, J., D. Zaslavsky and S. Irmay 1968 *Physical Principle of Water Percolation and Seepage*. UNESCO, Paris (France), pp. 347-366
- Freeze, R. A. 1971 Three-dimensional, transient saturated-unsaturated flow in a ground-water basin. *Water Resources Res.*, 7: 347-366
- Hilton, H. and Jr. Cooper 1966 The equation of ground-water flow in fixed and deforming coordinates. *J. Geophys. Res.*, 71: 4785-4790
- 小平吉男 1971 物理数学 第2巻. 文献社, 東京, 286-289頁
- Nwa, E. U., G. S. Taylor, R. B. Curry and E. P. Taiganides 1973 Theoretical two-dimensional analysis of natural rainfall. *J. Agr. Eng. Res.*, 18: 281-292
- Pikul, M. F., R. L. Street and I. Remson 1974 A numerical model based on coupled one-dimensional Richards and Boussinesq equation. *Water Resources Res.*, 10: 295-302
- Rubin, J. 1968 Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated partly and saturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 32: 607-615
- Rubin, J. and R. Steinhardt 1963 Soil water relations during rain infiltration, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 27: 246-251
- 瀬口昌洋・田中宏平・戸原義男 1974 基底流出に関する基礎的研究 (1). 九大農学芸誌, 29: 117-129
- Taylor, G. S. and J. N. Luthin 1969 Computer method for transient analysis of water table aquifer. *Water Resources Res.*, 5: 144-152

Summary

The experimental and analytical investigations were made to obtain a better approach to modeling of the base-flow phenomena, using a sand-model and two kinds of mathematical model.

The mathematical models described herein are as follows:

- (1) two-dimensional model with unsaturated-saturated transient seepage flow;
- (2) two-dimensional model with the combined flow of unsaturated vertical flow and saturated horizontal flow.

As a result, the authors obtained the following conclusions.

- (1) In the analysis of the experimental results by using the former mathematical model, it is very important to adopt the correct functional relationships between hydraulic conductivity and pressure head, and soil moisture content and pressure head.
- (2) In the analysis of the experimental results by using the latter mathematical model, it is very important to model the unsaturated vertical flow, namely the re-charge process from the unsaturated zone to the saturated zone, correctly.
- (3) The former mathematical model is more troublesome than the latter one

in the application. In addition, it is very difficult to obtain the correct relationships between hydraulic conductivity and pressure head, and between soil moisture content and pressure head in a complex and large basin. These facts suggest that the latter mathematical model will offer a better way to modeling the base-flow phenomena.