

粒状体の弾塑性変形境界値問題に対する有限要素法

上野, 正美
九州大学農学部農業機械研究室

橋口, 公一
九州大学農学部農業機械研究室

<https://doi.org/10.15017/23247>

出版情報：九州大学農学部学藝雑誌. 32 (2/3), pp.43-50, 1977-12. 九州大学農学部
バージョン：
権利関係：



粒状体の弾塑性変形境界値問題に対する 有限要素法

上野正美・橋口公一

九州大学農学部農業機械研究室

(1977年7月5日受理)

A Finite Element Method of the Boundary Value Problems of Elasto-Plastic Deformations for Granular Materials

MASAMI UENO and KOICHI HASHIGUCHI

Laboratory of Agricultural Machinery, Faculty of
Agriculture, Kyushu University 46-05, Fukuoka 812

緒 言

農業機械、特に、トラクター、耕うん機あるいはコンバインなどのほ場作業機械の研究においては土と機械との相互作用の解明が重要かつ不可欠であり、本問題に関して多くの報告がなされている。これは、この相互作用の良否が機械の作業性能に大きな影響を及ぼすからにほかならない。しかるに、土と機械との相互作用の理論的解明はその重要性にもかかわらずほとんど進められておらず、もっぱら実験的諸報告の呈出に終始している実状である。

ところで、この相互作用に関する問題は、力学的には土に作用する応力と変形との問題、すなわち、土に関する力学的境界値問題として把握しうる。従つて、この観点から土と機械との相互作用を理論的に解明しうることになるが、一般に、これらの境界値問題の解析は困難である。一方、電子計算機の発達に伴つて Turner *et al.* (1956) によつて開発された有限要素法は金属材料を主体とした構造物の境界値問題の解析に画期的な変革をもたらし、さらに、連続体の境界値問題の解析に対する大きな可能性を与えた。これに呼応して、土質工学の分野においては Zienkiewicz など (例えば Zienkiewicz and Naylor, 1971, 1973) を中心に本法の活用が積極的に試みられている。しかるに、これらは単に弾性論に基づく解析であつたり、材料表面に過度の拘束荷重を仮定して硬化現象のみを生じさせるような特殊な状態に限定した解析であるな

ど未だに満足な成果は得られていない。

土質工学の分野におけるこのような不成功の主因は、有限要素法自体よりもむしろ土の応力-変形特性を記述する構成式の欠陥にあることが指摘され、現在この方面の研究が活発に推進されつつある。ところで、土は微小な応力変化によつても容易に塑性変形を生ずる。このため変形挙動の時間依存性を無視すれば、土の変形は弾性および塑性変形として記述しうる。本研究では橋口 (1977) によつて従来の諸構成式の不備を補うべく提案された土などの粒状体に対する弾性および塑性構成式に基づいて、平面ひずみ問題に関する有限要素法の定式化ならびにプログラミングを行なつた。さらに、三軸 (軸対称) 圧縮試験状態における4例につき実験値との比較を行ない、本有限要素法の定式化ならびにプログラミングの妥当性を検討した。

理 論

1. 有限要素法の概略

連続体の力学的境界値問題は、一般に、応力場あるいは変位場を支配する微分方程式あるいは積分方程式を解くことに帰着する。これらの解析には方程式を直接解く方法か、あるいは、それに等価な汎関数の停留値より解を得る方法 (変分法) のいずれかが使用される。後者には有名な Rayleigh-Ritz 法あるいは Galerkin 法などの方法があり、有限要素法はこれに属する近似解法の一つであることは周知の通りであ

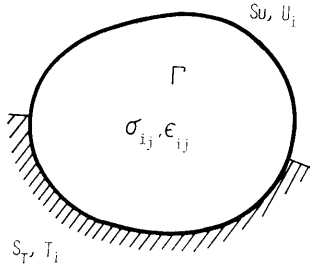


Fig. 1. Static equilibrium of a body element Γ and its boundary condition.

る。本節では有限要素法の概略を述べておく。なお、本論文では座標系として空間固定の直交デカルト座標系 x_i を採用する。また、すべてのテンソル方程式には指標に関するアインシュタインの総和規約を適用する。さらに応力は Terzaghi (1943) の提唱による有効応力を表わすものとする。

Fig. 1 に示すように、ある物体要素 Γ が物体力 f_i と表面力 T_i とを受け静的平衡を保っていると仮定する。この時、要素表面 S_u 上において変位 u_i が、残りの表面 S_T 上において表面力 T_i が境界条件として指定されている場合を考える。なお、ここでは非線形問題を扱うので変位および力はそれぞれ微小増分 (4) おきかえる。まず、指定された境界条件を満足する微小な仮想変位増分 (変分) $\delta \cdot (du_i)$ に対する仮想仕事の原理より次式が成立する。

$$\int_V d\sigma_{ij} \cdot \delta(d\epsilon_{ij}) dV - \int_V df_i \cdot \delta(du_i) dV - \int_S dT_i \cdot \delta(du_i) dS = 0 \quad (2.1)$$

ここに、 $d\sigma_{ij}$ および $d\epsilon_{ij}$ は応力増分およびひずみ増分、さらに、 $\int_V dV$ および $\int_S dS$ は体積積分および表面積分を表わす。式 (2.1) は汎関数 (ここではポテンシャル・エネルギー) の停留条件を表わしている。この式を直接、解くことは困難であるので、適当な近似化が必要となる。そこで、物体要素 Γ 内の変位増分 du_i が要素表面上の任意の節点の変位増分 Δu_i の関数として次のように近似しようと仮定する。

$$du_i = N_{ij} \cdot \Delta u_j \quad (2.2)$$

ここに N_{ij} は形状関数で普通、空間に等力な位置 x_i の多項式によつて表わされる。多項式の次数の大小によつて必要精度の近似が可能であることは言うまでもない。

これより、ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は以下のように表現される。

$$d\epsilon_{ij} = (N_{ik,j} + N_{jk,i}) \cdot \Delta u_k / 2 - B_{ijk} \cdot \Delta u_k \quad (2.3)$$

ここに、 $N_{ik,j}$ は次式を意味する。

$$N_{ik,j} = (\partial/\partial x_j) \cdot N_{ik} \quad (2.4)$$

なお、ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ と応力増分 $d\sigma_{ij}$ との関係は次の構成式で表わされると仮定する。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot d\epsilon_{kl} \quad (2.5)$$

ここに、 D_{ijkl} は構成テンソルと称される 4 階のテンソルで材料の変形特性に依存する。

式 (2.2), (2.3) および (2.5) を式 (2.1) に用いれば物体要素 Γ に関する次の剛性方程式を得る。

$$k_{ij} \cdot \Delta u_j = \Delta F_i \quad (2.6)$$

ここに、 k_{ij} および ΔF_i はそれぞれ次の関係、

$$\left. \begin{aligned} k_{ij} &= \int_V B_{ikl} D_{klmn} B_{jmn} dV \\ \Delta F_i &= \int_V N_{ij} \Delta f_j dV + \int_S N_{ij} \Delta T_j dS \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

を表わし前者は剛性テンソル、後者は物体要素 Γ に作用する等価節点外力増分である。剛性方程式 (2.6) は等価節点外力増分と節点変位増分との間の線形関係を表現したものである。これを所定の境界条件下で解いて節点変位増分 Δu_i を求めれば、上述の関係式より物体要素 Γ 内部のひずみ増分あるいは応力増分などの必要な情報が得られる。

ところで、物体要素 Γ 全体にわたる形状関数は極めて複雑であるので、一般には、三角形などの単純な形状をした多くの小要素 r_i に分割し形状関数を単純にする方法を用いている。各要素 r_i についてそれぞれ剛性方程式を作り、これらを合成すれば物体要素 Γ 全体の剛性方程式が簡単に得られる。これを

$$K_{ij} \cdot \Delta u_j = \Delta F_i \quad (2.8)$$

で表わす。ここに K_{ij} は各要素の剛性テンソルを合成したものである。

前述のように、形状関数は要素形状および位置 x_i によつて決定しうる関数であるが、構成テンソル D_{ijkl} は材料の変形特性に依存する物理量である。弾・塑性変形におけるひずみ増分は、一般に、弾性成分 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性成分 $d\epsilon_{ij}^p$ との和、

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (2.9)$$

で与えられると仮定しうる。これより、非硬化材料を除く弾・塑性体に対する構成テンソルは以下のように

与えられる (山田, 1972).

a) 弾性状態: $D_{ijkl} = E_{ijkl}$

b) 塑性状態:

$$D_{ijkl} = \bar{D}_{ijkl} - E_{ijkl} \frac{E_{ijpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \cdot E_{rstu}}{g + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \cdot E_{mntu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \quad (2.10)$$

ここに, $\bar{D}_{ijkl}$ は弾・塑性構成テンソルであり, また, E_{ijkl} は弾性構成テンソルで以下の関係を表わす.

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot d\varepsilon_{kl}^e \quad (2.11)$$

さらに, f は塑性ポテンシャル, g はスカラー係数を表わす. 有限要素定式化に使用した構成テンソルに関しては次節で詳述する.

2. 土などの粒状体の弾・塑性構成式ならびに有限要素法の定式化

土などの粒状体は弾性変形のみならず顕著な塑性変形を示すので, まず, これらを適切に表現しうる妥当な構成式を規定せねばならない. 本節では, これらの構成式について述べ, 前述の構成テンソルを具体的に決定することによって有限要素法の定式化を行なう.

塑性論によれば, 塑性ひずみ増分は塑性ポテンシャル f によって次のように与えられる.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{df}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.1)$$

ここに g は式 (2.10) におけるスカラー係数である. なお, Drucker (1951) の所論に従って, 塑性ポテンシャルとして材料の降伏応力を表わす塑性条件式を採用する.

ところで, 土などの粒状体の硬化および軟化は第一義的には非回復な間ゲキ比の変化, すなわち, 塑性的な作積ひずみの変化によって規定しうると思われる. この仮説に基づいて次のような塑性条件式を仮定する.

$$f(\sigma_{ij}, \int d\varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (3.2)$$

または

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) - F\left(\int d\varepsilon_{ij}^p\right) = 0, \quad (3.3)$$

ここに $\bar{f}(\sigma_{ij})$ は荷重応力関数で粒状体においては応力空間で閉曲面を呈する. また $F\left(\int d\varepsilon_{ij}^p\right)$ は塑性体積ひずみをパラメータとした硬化関数を表わす. 本論文では式 (3.3) の形式の塑性条件式を採用するが, その具体形は後述する. 式 (3.1) および (3.3) より, スカラー係数 g は次式で与えられる.

$$g = \frac{dF}{d\left(\int d\varepsilon_{ij}^p\right)} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

ここに, δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表わす.

土などの粒状体に対する具体的な塑性条件式, 特に, 荷重応力関数は Coulomb (1776) を始め, 近年に至って Roscoe *et al.* (1963), Burland (1965) などによって種々, 提案されてきたが, 降伏面全域, とりわけ重要な軟化域における塑性挙動を適切に表現しうるものは見いだされておらず, 有限要素法活用上の難点となつてゐる. これに対して橋口 (1977) は Rowe (1962), Horne (1965) などによって提案された stress-dilatancy 式を拡張し, 中間主応力の影響を無視した主応力表示の荷重応力関数による次のような塑性条件式を提案した.

$$(K^2 - 1) \frac{\sigma_I \sigma_{III}}{\sigma_{III} - K^2 \sigma_I} - \bar{f}_0 \exp\left(-\frac{\int d\varepsilon_{ij}^p}{\alpha}\right) = 0 \quad (3.5)$$

ここに σ_I および σ_{III} はそれぞれ最大および最小主応力 ($\sigma_I \geq \sigma_{III}$), K および α は材料定数, $\bar{f}_0$ は $\bar{f}$ の初期値を表わす. 式 (3.5) の左辺第一項は荷重応力関数, さらに第二項は硬化関数を表わす. 硬化関数は等方圧縮 (密) 試験結果に基づき塑性体積ひずみと平均応力の対数 $\ln|P|$ との線型関係を仮定して決定したものである. 本研究ではこの塑性条件式を採用して有限要素法の定式化を行なう.

ところで, 塑性条件式 (3.5) は主応力表示であるので, 有限要素法の定式化においては次のような座標変換を行なつて, 一般応力に変換する必要がある.

$$\sigma_L = \beta_{Li} \beta_{Lj} \sigma_{ij} \quad (3.6)$$

および

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_L} \cdot \frac{\partial \sigma_L}{\partial \sigma_{ij}} = \beta_{Li} \beta_{Lj} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_L} \quad (3.7)$$

ここに β_{Li} は座標変換テンソルを表わし, L は応力の主軸を表わす. なお, $\partial \bar{f} / \partial \sigma_L$ の各成分は以下のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_I} &= \frac{(K^2 - 1) \sigma_{III}}{(\sigma_{III} - K^2 \sigma_I)^2} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{II}} = 0, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{III}} &= \frac{K^2 (K^2 - 1) \sigma_I^2}{(\sigma_{III} - K^2 \sigma_I)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

一方, 土などの粒状体の変形解析においては塑性構成式のみならず弾性構成式も極めて重要であることは言うまでもない. しかるに, この方面の研究はほとんど顧みられていない現状である. 本研究では橋口 (1977) によって提案された次の構成式を採用する.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\beta}{3} \cdot \frac{dP}{P_r - P} \cdot \delta_{ij} + aNr^{N-1} d\sigma_{ij}' \quad (3.9)$$

ここに β , P_r , a および N は材料定数, σ_{ij}' は偏差応力を表わす. さらに, r は $r = (\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')^{1/2}$ を表わす. 式 (3.9) は弾性変形が平均応力のみならず, 従来, 無視されていた偏差応力にも依存することを表わす非線型の構成式である. また, これは拘束のない自由表面を有する境界値問題に対しても適用しうるように拡張されたものである.

弾性構成式 (3.9) を逆変換すれば弾性構成テンソル E_{ijkl} は次のように得られる.

$$E_{ijkl} = -\frac{A-B}{3AB} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2B} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.10)$$

ここに

$$A = \frac{\beta}{3(P_r - P)}, \quad B = aNr^{N-1}. \quad (3.11)$$

以上に示された塑性条件式 (3.5) およびこの弾性構成テンソルを式 (2.10) に用いて所求の弾塑性構成テンソルを次のように決定しうる.

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ijkl} = & -\frac{A-B}{3AB} B_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2B} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ & - G \left\{ -\frac{A-B}{3AB} \delta_{ij}\delta_{kl} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2B} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right\} \beta_{L,k}\beta_{L,q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_L} \\ & + \beta_{M,r}\beta_{M,s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_M} \left\{ -\frac{A-B}{3AB} \delta_{rs}\delta_{kl} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2B} (\delta_{rk}\delta_{sl} + \delta_{rl}\delta_{sk}) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} = & g + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}} E_{mntu} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{tu}} \\ & - \frac{\sigma_I \sigma_{III} (K^2 - 1) (\sigma_{III}^2 - K^2 \sigma_I^2)}{\alpha (\sigma_{III} - K^2 \sigma_I)^3} \\ & + \beta_{Nm}\beta_{Nn} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_N} \left\{ -\frac{A-B}{3AB} \delta_{mn}\delta_{tu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2B} (\delta_{mt}\delta_{nu} + \delta_{mu}\delta_{nt}) \right\} \cdot \beta_{Yu}\beta_{Yu} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_Y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

で与えられる.

一方, 応力が $\partial f / \partial P = 0$ を満足する限界間ゲキ状態 **critical void state** (以下 **C. V. S.** と略記) においては, 式 (2.10) で述べた弾塑性構成テンソルは使用できない. しかるに, 材料の等方性を仮定すれば **C. V. S.** における弾塑性構成テンソルを以下のように

導きうる. すなわち, **C. V. S.** では材料は完全塑性状態を示すので $d\bar{f} = 0$ となり, 応力増分は降伏曲面の接平面方向にしか変化しえない.

これより, 塑性ひずみ増分は次のように与えられる.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ik}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{jl}} \right) d\varepsilon_{kl} / \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}} \right) \quad (3.14)$$

よつて, **C. V. S.** における弾塑性構成テンソルは

$$\bar{D}_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijklst} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ks}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{lt}}}{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{mn}}} \quad (3.15)$$

で与えられる. さらに, このテンソルの具体形は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ijkl} = & -\frac{A-B}{3AB} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2B} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ & - \left[\left\{ \frac{A-B}{3AB} \delta_{ij}\delta_{st} + \frac{1}{2B} (\delta_{is}\delta_{jt} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_{it}\delta_{js}) \right\} \beta_{L,k}\beta_{L,s} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_L} \right. \\ & \left. + \beta_{M,l}\beta_{M,t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_M} \right] / \left(\beta_{Nm}\beta_{Nn} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_N} \right) \left(\beta_{Nm}\beta_{Nn} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_N} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

解 析 結 果

1. 有限要素解析の具体的手法

境界値問題に対する有限要素解析は以下の手順で行なわれる.

a. 問題に応じて与えられたデータ (節点座標, 節点番号および材料定数など) に基づいて前述の剛性方程式を組立てる.

b. この剛性方程式を与えられた境界条件下で解き (本プログラムでは共役傾斜法を採用) 節点変位増分および節点荷重増分を求める.

c. 前述の議論に従つて, 節点変位増分から各要素のひずみ増分および応力増分を求める.

d. 塑性状態にある要素の除荷・負荷判定を行なう. これらの判定は塑性仕事増分 $dW^p (= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p)$ の正負によつてなされる. すなわち

$$\left. \begin{array}{l} \text{負荷: } dW^p > 0 \\ \text{除荷: } dW^p < 0 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

となる. なお, 軟化域では境界条件として変位増分を与えなければこれらの判定は不可能である.

e. 一段階の試験変位増分により弾性状態にあつた

要素が塑性状態に突入したり、C. V. S. 面を貫通して硬化域から軟化域へあるいはこの逆方向へ移行している場合には、降伏曲面や C. V. S. 面からの応力増分の超過量を除去し誤差の集積を抑制する必要がある。そこで、試験増分ベクトルのノルムと適正増分ベクトルのノルムとの比を求め、さらに、それらの中の最小値を増分倍率としすべての増分解に乘じて解の修正を行なう。

f. これらの修正増分解に基づいて節点変位、節点荷重、ひずみおよび応力などを算定し、各要素の負荷状態を分類して次の増分計算の準備を行なう。以上で一段階の増分計算が終了したことになる。

g. a ~ f までの計算過程を所定の値を得るまで繰り返して行なう。

以上に定式化した有限要素法の妥当性を検討するために軸対称圧縮（側圧一定）試験結果と同一条件下における解析結果との比較を4例について行なった。対象材料は Parry (1959) および Miura (1975) の実験報告に見られるそれぞれ Weald clay および豊浦砂の2種類で、これらの材料定数は次の通りである。

Weald clay : $\beta = 0.0213$, $P_r = 1.26 \text{ p.s.i.}$, $N = 1.0$
 $a = 0.00263 \text{ l/p.s.i.}$, $\alpha = 0.0382$, $K = 2.2$

豊浦砂 : $\beta = 0.032$, $P_r = 99.0 \text{ kg/cm}^2$, $N = 1.0$
 $a = 0.001 \text{ cm}^2/\text{kg}$, $\alpha = 0.1$, $K = 3.3$

また、試験条件は以下の通りである。まず、試料を等方的に圧縮し降伏させた後に、所定の値 $P_{y0} = f_0$ まで加圧し、さらに、軸対称圧縮開始の初期値 P_0 に応力を設定する。これらの応力変化はすべて等方的に行なわれる (Fig. 2a 参照)。その後、側圧 (σ_1) を一定に保つたまま軸圧 (σ_{III}) を変化させる（解析では軸ひずみ増分を与える）。負荷経路は $P_{y0} - P_0$ として硬化域で圧縮を行なうものと、一度、設定初期値 P_0 まで除荷した後に弾性状態より圧縮し軟化域に至らせる経路の2種類である (Fig. 2b 参照)。

一方、計算条件は以下の通りである。まず、軸対称試験ではその対称性より試料全体の1/4について解析すればよい。この領域を12個の節点を有する12個の三角形要素に分割した。要素分割状態および拘束（境界）条件を Fig. 3 に示す。なお、一段階の増加計算に与える増分の大きさは $d\epsilon_{III} = 0.0025$ で、繰返し計算数は60~200回であった。

2. 解析結果と実験結果との比較

解析結果と実験結果の比較を Fig. 4 に示す。これらの図では横軸に軸ひずみ ϵ_{III} を表わし、縦軸に主応力比 σ_{III}/σ_1 および体積ひずみ $\int d\epsilon_r$ を表わしてい

(a)

Test Number	Kind of Soil	Stress Path
A-I	Weald clay	$0 \rightarrow -30 \text{ psi} (P_0 = P_{y0})$
A-II	"	$0 \rightarrow -120 (P_{y0}) \rightarrow -10 (P_0)$
B-I	Toyoura Sand	$0 \rightarrow -150 \text{ kg/cm}^2 (P_0 = P_{y0})$
B-II	"	$0 \rightarrow -150 (P_{y0}) \rightarrow -5 (P_0)$

(b)

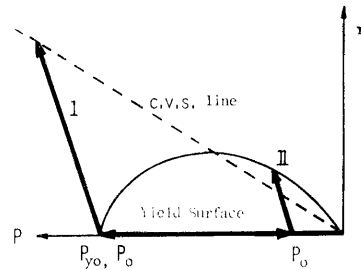


Fig. 2. Conditions of triaxial compression tests.

(a) Experimental conditions.

(b) Stress paths in the (P, r) plane.

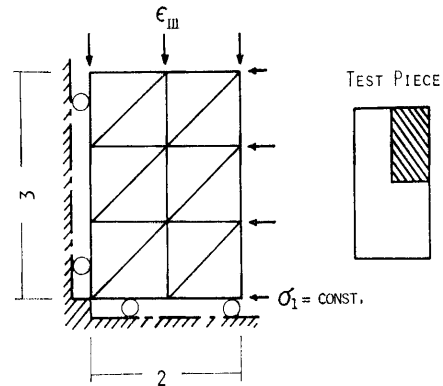


Fig. 3. Calculus condition: Finite element division and support (boundary) condition.

る。同図 a, b, c および d はそれぞれ Fig. 2a における試験番号 A-I, A-II, B-I および B-II に関する比較を表わしている。なお、太い実線は実験値を示し、細い実線は理論値を表わし、さらに、破線は弾性状態を表わしている。

以上の比較よりわかるように、粘土および砂のいずれについても解析結果は実験結果を大まかに表現していると思われる。とくに、硬化域における変形挙動はかなり良く近似されるようである。また、従来の解析では表現しえなかつた軟化域における変形挙動もある程度、表現していると思われる。これらのことより本論文で定式化した有限要素法は一般の境界値問題に

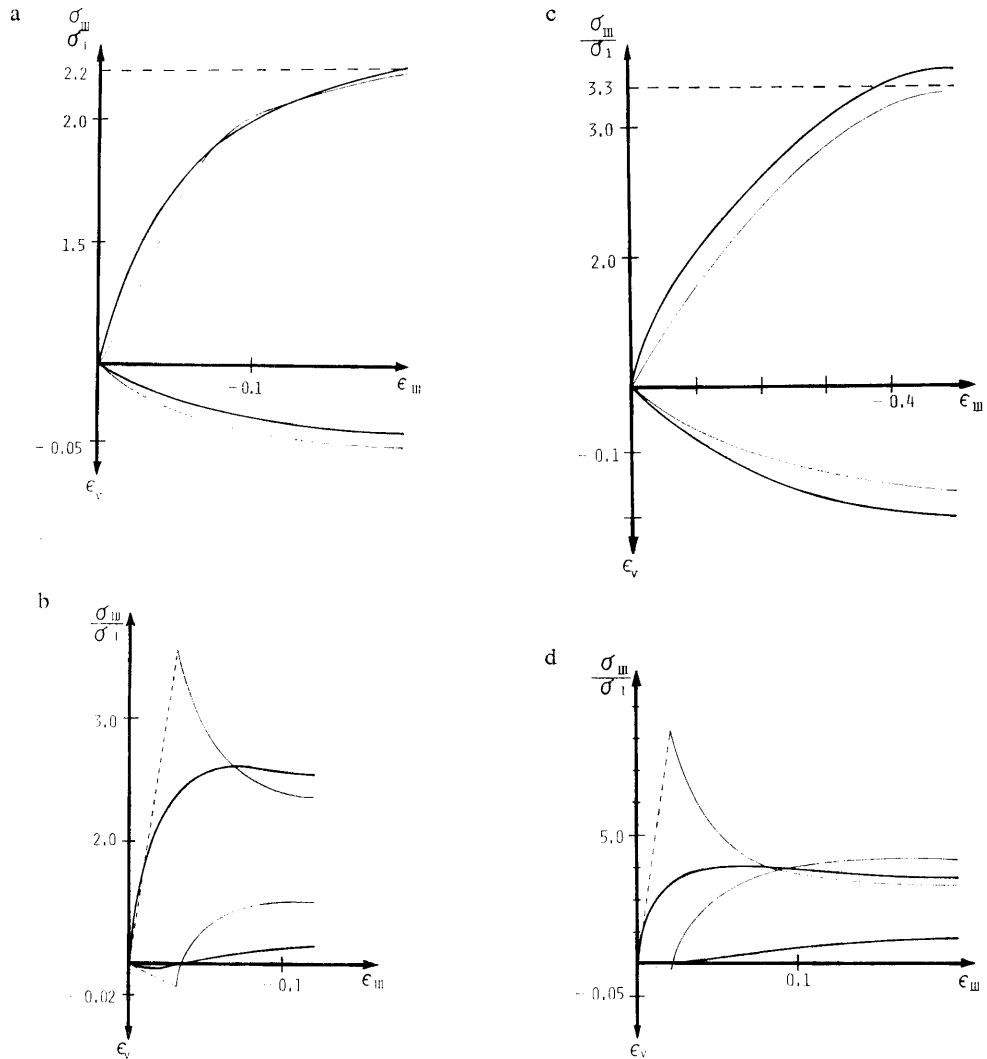


Fig. 4. Comparisons with the experimental and calculated results under the triaxial compression conditions.

a, Comparison for A-I; b, Comparison for A-II;
c, Comparison for B-I; d, Comparison for B-II.

対しても十分に適用しうるものと思われる。

ただし、応力経路が弾性状態を経て塑性状態に至る場合 (Fig. 2 b における II の経路) には、解析値は弾性状態と塑性状態とが明確に分離しているために、Fig. 4 b および d に見られるような鋭利な折れ曲りを示し、実験値に見られる滑らかな応力 ひずみ特性は表現しえない。さらに、軟化域においては体積ひずみを過度に評価する傾向がある。以上に述べた解析結果の欠点は弾性および塑性構成式自体の不十分さに起因すると思われるが、弾性状態から塑性状態への滑らか

な移行過程は既往の塑性論では説明しえないものと思われる。今後、これらの諸点を考慮に入れた一層進んだ構成式の究明を進めつつ、これらに基づいてさらに妥当な粒状体に関する有限要素法を確立してゆかねばならない。

摘 要

本論文では、ほ場用作業機械などに見られる土と機械との相互作用を解明するための予備的研究として、まず、土などの粒状体に対する弾塑性構成式に基づい

て平面ひずみ問題に関する有限要素法の定式化ならびにプログラミングを行なった。さらに、この有限要素法の妥当性を検討するために粘土および砂の軸対称圧縮試験結果と解析結果との比較を行なった。これらの比較よりわかるように、本論文で定式化した有限要素法は従来の諸論では説明しえなかつた弾性状態および軟化状態を含む粒状体の一般的な弾塑性変形境界値問題の解析に適用しうと思われる。なお、今後は本プログラムを用いて農用トラクターの沈下現象などの具体的問題の解析を進めるつもりである。

なお、本研究における計算には九州大学中央計数施設の計算機 FACOM-230 を利用した。

文 献

- Burland, J. B. 1965 The yielding and dilation of clay. Correspondence, *Geotech.*, 15: 250-255
- Coulomb, C. A. 1776 Essai sur une application des regles de maxims et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture. *Mem. Math. Acad. Sci. Paris*, 7: 343-382
- Drucker, D. C. 1951 A more fundamental approach to stress-strain relations. *Proc. 1st National Congress for Appl. Mech., A. S. M. E.*, 487-491
- 橋口公一 1977 粉粒状体の弾塑性構成式に関する一考察. *日機論*, 368: 1242-1250
- Horne, M. R. 1965 The behaviour of an assembly of round, rigid, cohesionless particles. *Proc. Royal Soc. London, Sr. A*, 286: 62-97
- Miura, N. 1975 Effect of water on the behaviour of a quartzrich and under high stresses. *Soils and Foundations*, 15: 1-12
- Parry, R. H. G. 1959 Triaxial compression and extension tests on emoulded saturated clay. *Geotech.*, 10: 166-180
- Roscoe, K. H., A. N. Schofield and A. Thurairajah 1963 Yielding of clays in states wetter than critical. *Geotech.*, 13: 211-240
- Rowe, P. W. 1962 The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc. Royal Soc. London, Sr. A*, 269: 500-527
- Terzaghi, K. 1943 Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York
- Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp 1956 Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, 23: 805-823
- 山田嘉昭 1972 コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 東京
- Zienkiewicz, O. C. and D. J. Naylor 1971 The adoption of critical state soil mechanics theory for use in finite elements. In "Roscoe Memorial Symp.," Cambridge (England), pp. 210-300
- Zienkiewicz, O. C. and D. J. Naylor 1973 Finite element studies of soils and porous media. In "Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics," ed. by J. T. Oden and E. R. A. Oliverira, UAH Press, pp. 459-493

Summary

In this paper, an incremental finite element method was formulated and a program for plane strain problems was prepared in order to analyze numerically boundary value problems of the elasto-plastic deformations for granular materials like soils. Elasto-plastic constitutive equations proposed by one of the authors were adopted to this finite element formulation and programming. A constitutive tensor D_{ijkl} plays very important roll on the finite element method. In elastic stress states, the elastic constitutive tensor E_{ijkl} was used for D_{ijkl} . On the other hand, the elasto-plastic constitutive tensor $\bar{D}_{ijkl}$ was used for D_{ijkl} in plastic stress states. By composing these constitutive tensors and the shape function for triangular element, a stiffness equation is obtained as follows.

$$K_{ij} \Delta u_j = \Delta F_i$$

where K_{ij} is a stiffness tensor, Δu_i is a nodal displacement increment and ΔF_i is a nodal load increment. Nodal displacement increments and nodal load increments are obtained as the solutions of this equation under the given boundary conditions, and then, strain increments and stress increments are calculated.

Four examples for the condition of triaxial compression were analized. These

examples were composed of two kinds of soils, i. e., Weald clay and Toyoura sand, and of two different stress paths where the initial conditions at the beginning of compression are an isotropic plastic state or an elastic state. The strain increment was 0.0025 in one stage of the iterative calculations, and iterative numbers were 60–200 times. These calculated results were compared with experimental results of the triaxial compression tests for Weald clay (by Parry 1959) and Toyoura sand (by Miura 1975). The comparisons show that the calculated results can roughly trace the experimental curves.

According to these comparisons, the finite element method formulated in this paper seems to be applicable to arbitrary boundary value problems of elasto-plastic deformations for granular materials. Henceforth, by use of this finite element method, we shall analyze the practical problems, the load-sinkage problem of farm tractors, for example.