非定常熱応力問題における数値解析手法の定式化に関する研究

落合，芳博

https://doi.org/10.11501/3088234

出版情報：九州大学，1991，博士（工学），論文博士
バージョン：
権利関係：

第７章　結言

本論文により非定常熱応力問題は熱弾性変位ポテンシャルを用いることにより、領域内にセルを設定しなくても数値解析が可能であることが示された。非定常問題において熱弾性変位ポテンシャルから求められた変位および応力に関する基本解は、瞬間点熱源による変位および応力であり、解析的に時間積分することにより非定常熱応力問題における数値解析に用いることができる。本論文では非定常熱応力の基本解を求める方法を示しており、基本解が未知の場合でも定式化が可能である。また、３次元の基本解をガンマ関数で与えることにより、高次の時間内挿への適用が容易である。これらの基本解を時間積分したものは静弾性問題におけるKelvinの基本解より特異性は弱く、解析的に処理できることが示された。また、１重層熱弾性変位ポテンシャルのみでなく、２重層熱弾性変位ポテンシャルにも言及し、基本解を法線方向微分したものも、時間に関して解析積分が可能であることを示した。定式化は、熱弾性変位ポテンシャルから求められた変位および応力と静弾性問題における変位と応力の重ね合わせにより行った。また、間接法や直接法による幾つかの定式化の可能性を示した。本論文により２次元、３次元、軸対称非定常熱応力問題がセルを用いずに数値解析可能になった。本手法は熱応力が問題になることが多い異種接合材にも適用できることを述べた。なお、熱発生を伴う非定常熱応力問題においても内部にセルを設定しなくてもよい手法を示した。熱発生を伴う場合の本手法は、熱発生の分布が形状的に複雑な場合には適した手法ではないが、熱発生の分布を単純なものと見なせる場合には効果を表す。また、本熱弾性変位ポテンシャルを用いた手法は非定常熱応力解析のみではなく、定常熱応力解析にも有効な手法であることを示した。熱弾性変位ポテンシャルを用いることにより、従来の手法に比べ容易に熱応力解析に必要な基本解が求められる。しかも、２次元問題の場合、Galerkinテンソルを用いた定式化においては、静弾性の解析に使用されるKelvin解ではなく、Galerkinテンソルから導かれる解を使用しなければならなかったが、本解法では従来のKelvin解を使用することができる。

本論文の解法によって求められた値が厳密解とよく一致することを確かめた。また、厳密解を求めることが困難な長方形孔を有する円筒の隅部の熱応力に対する応力集中の問題・偏平回転楕円体などに適用し、本手法が有効なのもであることを示した。なお、深い切り欠きがある場合やクラックのある問題などへの適用は今後の研究課題である。

謝辞

本研究は1985年より６年間にわたり行なったものである。その間、終始ご指導を賜りました大阪電気通信大学電子機械工学科の関谷壮教授の深謝致します。また、体積力法による高精度化について御教示を賜わるとともに、本研究をまとめるにあたり御指導頂きました九州大学工学部材料強弱学教室の西谷弘信教授に深甚なる謝意を捧げます。本研究の共同研究者である大阪府立大学工学部機械工学科の石田良平氏に深謝致します。最後に、学生時代に熱応力理論を御教え頂きました元大阪府立大学機械工学科教授故竹内洋一朗先生に深く謝意を捧げます。

付録１　線形時間内挿を用いた場合の温度の基本解の時間積分

境界上の温度Tと温度勾配qが時間ステップfにおいて、時間に関して線形的に変化するものと仮定すると、関数T,qは次式で与えられる。

$$T=\phi_1 T_f+\phi_2 T_{f-1} \tag{A1.1}$$

$$q=\phi_1 q_f+\phi_2 q_{f-1} \tag{A1.2}$$

上式の時間に関する内挿関数ϕ_1, ϕ_2は次式で与えられる。

$$\phi_1=\frac{t_f-\tau}{\Delta t_f}, \quad \phi_2=\frac{\tau-t_{f-1}}{\Delta t_f} \tag{A1.3}$$

ただし、Δt_fは時間ステップ幅であり、$\Delta t_f=t_f-t_{f-1}$である。式(A1.3)の線形時間内挿を用いる場合、下記の積分が必要になる。

２次元の場合

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f}T^*_2(x,t,\xi,\tau)d\tau$$
$$=-\frac{1}{4\pi\kappa\Delta t_f}\{[(t_F-t_f)+\frac{r^2}{4\kappa}][E_1(a_{f-1})-E_1(a_f)]$$
$$-\frac{r^2}{4\kappa}[\frac{1}{a_{f-1}}\exp(-a_{f-1})-\frac{1}{a_f}\exp(-a_f)]\} \tag{A1.4}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f}T^*_2(x,t,\xi,\tau)d\tau$$
$$=-\frac{1}{4\pi\kappa\Delta t_f}\{[(t_F-t_{f-1})+\frac{r^2}{4\kappa}][E_1(a_{f-1})-E_1(a_f)]$$
$$-\frac{r^2}{4\kappa}[\frac{1}{a_{f-1}}\exp(-a_{f-1})-\frac{1}{a_f}\exp(-a_f)]\} \tag{A1.5}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f}q^*_2(x,t,\xi,\tau)d\tau$$
$$=-\frac{1}{2\pi\kappa\Delta t_f}\{\frac{(t_F-t_f)}{r}[\exp(-a_{f-1})-\exp(-a_f)]$$
$$-\frac{r}{4\kappa}[E_1(a_{f-1})-E_1(a_f)]\}\frac{\partial r}{\partial n} \tag{A1.6}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} q^*_2(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2\pi\kappa\Delta t_f} \{ \frac{(t_F - t_{f-1})}{r} [\exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f)]$$

$$- \frac{r}{4\kappa} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)] \frac{\partial r}{\partial n} \tag{A1.7}$$

3次元の場合

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)}{\Delta t_f} T^*_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{r}{8\kappa^2\pi^{3/2}\Delta t_f} \{ \Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1}^{-1/2}\exp(-a_{f-1})$$

$$- a_f^{-1/2}\exp(-a_f) + \frac{1}{2a_f} [\Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1})]\} \tag{A1.8}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} T^*_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{-r}{8\kappa^2\pi^{3/2}\Delta t_f} \{ \Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1}^{-1/2}\exp(-a_{f-1})$$

$$- a_f^{-1/2}\exp(-a_f) - \frac{1}{2a_{f-1}} [\Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1})]\} \tag{A1.9}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)}{\Delta t_f} q^*_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{-1}{8\pi^{3/2}\kappa^2\Delta t_f} \{ \Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1})$$

$$- \frac{1}{a_f} [\Gamma(\frac{3}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{3}{2}, a_{f-1})]\} \frac{\partial r}{\partial n} \tag{A1.10}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} q^*_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{8\pi^{3/2}\kappa^2\Delta t_f} \{ \Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1})$$

$$- \frac{1}{a_{f-1}} [\Gamma(\frac{3}{2}, a_f) - \Gamma(\frac{3}{2}, a_{f-1})]\} \frac{\partial r}{\partial n} \tag{A1.11}$$

付録２　線形時間内挿を用いた場合の変位および応力の基本解の時間積分

２次元問題の変位に関する基本解を線形時間内挿を用いて時間積分を行うと、下記の式が得られる。

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f} u_i{}^{*}{}_{2}(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{4\pi\Delta t_f} S_1 \frac{\partial r}{\partial x_i} \tag{A2.1}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f} u_i{}^{*}{}_{2}(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{4\pi\Delta t_f} S_2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \tag{A2.2}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f} \frac{\partial u_i{}^{*}{}_{2}(x,t,\xi,\tau)}{\partial n} d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{2\pi\Delta t_f} [\frac{1}{r}S_1 n_i + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial n} S_3] \tag{A2.3}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f} \frac{\partial u_i{}^{*}{}_{2}(x,t,\xi,\tau)}{\partial n} d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{2\pi\Delta t_f} [\frac{1}{r}S_2 n_i + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial n} S_4] \tag{A2.4}$$

ただし、S_1～S_4は次式で与えられる。

$$S_1 = \frac{1}{2r}\{(t_F-t_{f-1})^2[1-\exp(-a_{f-1})]+(t_F-t_f)^2[1-\exp(-a_f)]$$
$$-2(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})[1+\exp(-a_{f-1})]$$
$$+\frac{r^2}{4\kappa}[(t_F-t_{f-1})\exp(-a_{f-1})-(t_F-t_f)\exp(-a_f)]$$
$$+\frac{r^2}{2\kappa}[(t_F-t_f)+\frac{r^2}{8\kappa}][E_i(-a_{f-1})-E_i(-a_f)]\} \tag{A2.5}$$

$$S_2 = \frac{1}{2r}\{(t_F-t_{f-1})^2[1-\exp(-a_{f-1})]+(t_F-t_f)^2[1-\exp(-a_f)]$$
$$-2(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})[1+\exp(-a_{f-1})]$$

$$+\frac{r^2}{4\kappa}[(t_F-t_{f-1})\exp(-a_{f-1})-(t_F-t_f)\exp(-a_f)]$$

$$+\frac{r^2}{2\kappa}[(t_F-t_f)+\frac{r^2}{8\kappa}][E_i(-a_{f-1})-E_i(-a_f)]\} \qquad (A2.6)$$

$$S_3=\frac{1}{4\kappa}\{(t_F-t_{f-1})\exp(-a_{f-1})-(t_F-t_f)\exp(-a_f)+\frac{r^2}{4}[E_i(-a_{f-1})-E_i(-a_f)]$$

$$+(t_F-t_f)^2[1-\exp(-a_f)]-2(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})[1-\exp(-a_{f-1})]\}$$

$$(A2.7)$$

$$S_4=\frac{1}{4\kappa}\{(t_F-t_f)\exp(-a_f)-(t_F-t_{f-1})\exp(-a_{f-1})+\frac{r^2}{4}[E_i(-a_{f-1})-E_i(-a_f)]$$

$$+(t_F-t_f)^2[1-\exp(-a_f)]-2(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})[1-\exp(-a_f)]\}$$

$$(A2.8)$$

２次元問題の応力に関する基本解を線形時間内挿を用いて時間積分を行うと、下記の式が得られる。

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f}\sigma_{kl}{}^{*}{}_2(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$=\frac{-G}{\pi r^2\Delta t_f}\langle\!\langle(\delta_{kl}-2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial n})$$

$$\times\{(t_F-t_{f-1})[1-\exp(-a_{f-1})]+(t_F-t_f)^2[1-\exp(-a_f)]$$

$$-2(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})[1+\exp(-a_{f-1})]$$

$$+\frac{r^2}{4\kappa}[(t_F-t_{f-1})\exp(-a_{f-1})-(t_F-t_f)\exp(-a_f)]$$

$$+[(t_F-t_f)\frac{r^2}{2\kappa}+\frac{r^4}{8\kappa^2}][-E_1(a_{f-1})+E_1(a_{f-1})]\}$$

$$-2(\delta_{kl}-\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial n})$$

$$\times\frac{r^2}{2\kappa}\{-(t_F-t_f)E_1(a_{f-1})+(t_F-t_f)E_1(a_f)$$

$$+\frac{r^2}{4\kappa}[\exp(-a_{f-1})/a_{f-1}-\exp(-a_f)/a_f-E_1(a_{f-1})+E_1(a_f)]\}\rangle\!\rangle \qquad (A2.9)$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f}\sigma_{kl}{}^{*}{}_2(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$
= \frac{-G\blacksquare}{\pi r^{2} \Delta t_f} \ll \left(\delta_{kl} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial n} \right)
$$

$$
\times \{ (t_F - t_{f-1})^2 [1 - \exp(-a_{f-1})] + (t_F - t_f)^2 [1 - \exp(-a_f)]
$$

$$
-2(t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[1 + \exp(-a_f)]
$$

$$
+ \frac{r^2}{4\kappa} [(t_F - t_{f-1}) \exp(-a_{f-1}) - (t_F - t_f) \exp(-a_f)]
$$

$$
+ [(t_F - t_f) \frac{r^2}{2\kappa} + \frac{r^4}{8\kappa^2}][-E_1(a_{f-1}) + E_1(a_{f-1})]\}
$$

$$
-2\left(\delta_{kl} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial n}\right)
$$

$$
\times \frac{r^2}{2\kappa} \{ -(t_F - t_{f-1}) E_1(a_{f-1}) + (t_F - t_{f-1}) E_1(a_f)
$$

$$
+ \frac{r^2}{4\kappa} \left[\frac{\exp(-a_{f-1})}{a_{f-1}} - \frac{\exp(-a_f)}{a_f} - E_1(a_{f-1}) + E_1(a_f) \right] \} \gg \qquad \text{(A2.10)}
$$

$$
\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)}{\Delta t_f} \frac{\partial \sigma_{kl}^{*2}}{\partial n} d\tau
$$

$$
= \frac{2G\blacksquare}{\pi r^3 \Delta t_f} \ll \left[n_k \frac{\partial r}{\partial x_l} + n_l \frac{\partial r}{\partial x_k} + \left(\delta_{kl} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right]
$$

$$
\times \frac{1}{2} \{ (t_F - t_{f-1})^2 [1 - \exp(-a_{f-1})] + (t_F - t_f)^2 [1 - \exp(-a_f)]
$$

$$
-2(t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[1 + \exp(-a_{f-1})]
$$

$$
+ \frac{3r^2}{4\kappa} [(t_F - t_{f-1}) \exp(-a_{f-1}) - (t_F - t_f) \exp(-a_f)]
$$

$$
+ 2[(t_F - t_f) \frac{r^2}{2\kappa} + \frac{r^4}{8\kappa^2}][E_i(-a_{f-1}) - E_i(-a_f)]\}
$$

$$
- 2\left(\delta_{kl} - \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k}\right) \frac{\partial r}{\partial n}
$$

$$
\times \frac{-r^2}{4\kappa} \{ (t_F - t_f) \exp(a_f) - (t_F - t_f) \exp(a_{f-1})
$$

$$
+ \frac{r^2}{4\kappa} [E_1(a_f) - E_1(a_{f-1})] \} \gg \qquad \text{(A2.11)}
$$

$$
\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} \frac{\partial \sigma_{kl}^{*2}}{\partial n} d\tau
$$

$$= \frac{2G\blacksquare}{\pi r^3 \Delta t_f} \ll [n_k \frac{\partial r}{\partial x_l} + n_l \frac{\partial r}{\partial x_k} + (\delta_{kl} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k}) \frac{\partial r}{\partial n}]$$

$$\times \frac{1}{2} \{ (t_F - t_{f-1})^2 [1 - \exp(-a_{f-1})] + (t_F - t_f)^2 [1 - \exp(-a_f)]$$

$$- 2(t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[1 + \exp(-a_f)]$$

$$+ \frac{3r^2}{4\kappa} [(t_F - t_{f-1})\exp(-a_{f-1}) - (t_F - t_f)\exp(-a_f)]$$

$$- 2(\delta_{kl} - \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k}) \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\times \quad \frac{r^2}{4\kappa} \{ (t_F - t_{f-1})\exp(a_{f-1}) - (t_F - t_{f-1})\exp(a_f)$$

$$+ \frac{r^2}{4\kappa} [E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f)] \} \gg \qquad \text{(A2.12)}$$

3次元問題の変位に関する基本解を線形時間内挿を用いて時間積分を行うと、下記の式が得られる。

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)}{\Delta t_f} u_i^{*}{}_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{\pi^{3/2} r^2 \Delta t_f} \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\times \{ (t_F - t_f)^2 [\gamma(\frac{3}{2}, a_f) + 2a_f \Gamma(\frac{1}{2}, a_f) - a_f{}^2 \ \Gamma(\frac{-1}{2}, a_f)]$$

$$+ (t_F - t_{f-1})^2 [\gamma(\frac{3}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1}{}^2 \ \Gamma(\frac{-1}{2}, a_{f-1})]$$

$$- 2(t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[\gamma(\frac{3}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1} \Gamma(\frac{1}{2}, a_{f-1})] \} \qquad \text{(A2.13)}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} u_i^{*}{}_3(x, t, \xi, \tau) d\tau$$

$$= \frac{\blacksquare}{4\pi^{3/2} r^2 \Delta t_f} \frac{\partial r}{\partial x_i} \{ -2(t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[\gamma(\frac{3}{2}, a_f) + a_f \Gamma(\frac{1}{2}, a_f)]$$

$$+ (t_F - t_f)^2 [\gamma(\frac{3}{2}, a_f) + a_f{}^2 \Gamma(\frac{-1}{2}, a_f)]$$

$$+ (t_F - t_{f-1})^2 [\gamma(\tfrac{3}{2}, a_{f-1}) - a_f^2\,\Gamma(\tfrac{-1}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_{f-1})]\} \quad \text{(A2.14)}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(t_f - \tau)}{\Delta t_f} \frac{\partial u_i{}^{*}{}_3(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau$$

$$= \frac{-■}{\pi^{3/2} r^2 \Delta t_f} \ll \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\times \{ \frac{(t_F - t_f)^2}{2} [\gamma(\tfrac{5}{2}, a_f) - a_f^2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_f) + 2a_f\,\Gamma(\tfrac{3}{2}, a_f)]$$

$$+ \frac{(t_F - t_{f-1})^2}{2} [\gamma(\tfrac{5}{2}, a_{f-1}) + a_f^2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_{f-1})]$$

$$- (t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[\gamma(\tfrac{5}{2}, a_{f-1}) + a_f\,\Gamma(\tfrac{3}{2}, a_{f-1})]\}$$

$$- \frac{n_i}{2} \{ \frac{(t_F - t_f)^2}{2} [\gamma(\tfrac{3}{2}, a_f) - a_f^2\,\Gamma(\tfrac{-1}{2}, a_f) + 2a_f\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_f)]$$

$$+ \frac{(t_F - t_{f-1})^2}{2} [\gamma(\tfrac{3}{2}, a_{f-1}) + a_{f-1}{}^2\,\Gamma(\tfrac{-1}{2}, a_{f-1})]$$

$$- (t_F - t_f)(t_F - t_{f-1})[\gamma(\tfrac{3}{2}, a_{f-1}) + a_f\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_{f-1})]\} \gg \quad \text{(A2.15)}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{(\tau - t_{f-1})}{\Delta t_f} \frac{\partial u_i{}^{*}{}_3(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau$$

$$= \frac{-■}{\pi^{3/2} r^2 \Delta t_f} \ll \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\times \{ -(t_F - t_{f-1})(t_F - t_f)[\gamma(\tfrac{5}{2}, a_f) + a_f\,\Gamma(\tfrac{3}{2}, a_f)]$$

$$+ \frac{(t_F - t_f)^2}{2} [\gamma(\tfrac{5}{2}, a_f) + a_f^2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_f)]$$

$$+ \frac{(t_F - t_{f-1})^2}{2} [\gamma(\tfrac{5}{2}, a_{f-1}) - a_f^2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_{f-1}) + 2a_f\,\Gamma(\tfrac{3}{2}, a_{f-1})]\}$$

$$- \frac{n_i}{2} \{ -(t_F - t_{f-1})(t_F - t_f)[\gamma(\tfrac{3}{2}, a_f) + a_f^2\,\Gamma(\tfrac{-1}{2}, a_f)]$$

$$+ \frac{(t_F - t_f)^2}{2} [\gamma(\tfrac{3}{2}, a_f) + a_f^2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}, a_f)]$$

$$+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)-a_{f-1}\Gamma\left(\frac{1}{2},a_{f-1}\right)+2a_{f-1}{}^2\Gamma\left(\frac{-1}{2},a_{f-1}\right)\right]\Big\}\gg \tag{A2.16}$$

３次元問題の応力に関する基本解を線形時間内挿を用いて時間積分を行うと、下記の式が得られる。

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f}\sigma_{ij}{}^{*}{}_{3}(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$=\frac{\blacksquare}{\pi^{3/2}r^2\Delta t_f}\ll\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial n}-\delta_{ij}\right)$$

$$\times\Big\{\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_f\right)-a_f{}^2\Gamma\left(\frac{1}{2},a_f\right)+2a_f\Gamma\left(\frac{3}{2},a_f\right)\right]$$

$$+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_{f-1}\right)+a_f{}^2\Gamma\left(\frac{1}{2},a_{f-1}\right)\right]$$

$$-(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_{f-1}\right)+a_f\Gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)\right]\Big\}$$

$$+\delta_{ij}\Big\{\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{3}{2},a_f\right)-a_f{}^2\Gamma\left(\frac{-1}{2},a_f\right)+a_f\Gamma\left(\frac{1}{2},a_f\right)\right]$$

$$+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)+a_{f-1}{}^2\Gamma\left(\frac{-1}{2},a_{f-1}\right)\right]$$

$$-(t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})\left[\gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)+a_f\Gamma\left(\frac{1}{2},a_{f-1}\right)\right]\Big\}\gg \tag{A2.17}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f}\sigma_{ij}{}^{*}{}_{3}(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$=\frac{-\blacksquare}{\pi^{3/2}r^2\Delta t_f}\ll\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{ij}\right)$$

$$\times\Big\{-(t_F-t_{f-1})(t_F-t_f)\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_f\right)+a_f\Gamma\left(\frac{3}{2},a_f\right)\right]$$

$$+\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_f\right)+a_f{}^2\Gamma\left(\frac{1}{2},a_f\right)\right]$$

$$+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_{f-1}\right)-a_f{}^2\Gamma\left(\frac{1}{2},a_{f-1}\right)+a_f\Gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right]\Big\}$$

$$
-\ \delta_{ij}\ \Big\{-(t_F-t_{f-1})(t_F-t_f)\Big[\gamma\Big(\frac{3}{2},a_f\Big)+a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{-1}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
+\ \frac{(t_F-t_f)^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{3}{2},a_f\Big)+a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
+\ \frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{3}{2},a_{f-1}\Big)-a_{f-1}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2},a_{f-1}\Big)+a_{f-1}^{2}\,\Gamma\Big(\frac{-1}{2},a_{f-1}\Big)\Big]\Big\}\ \gg \tag{A2.18}
$$

$$
\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(t_f-\tau)}{\Delta t_f}\ \frac{\partial\,\sigma_{ij}^{*3}(x,t,\xi,\tau)}{\partial n}\,d\tau
$$

$$
=\ \frac{-2G\blacksquare}{\pi^{3/2}r^{3}\Delta t_f}\ \ll\Big[\ \Big(\frac{\partial r}{\partial x_i}\,n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}\,n_i-4\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}\Big)
$$

$$
\times\ \Big\{\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{5}{2},a_f\Big)-a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2},a_f\Big)+a_f\,\Gamma\Big(\frac{3}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
+\ \frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{5}{2},a_{f-1}\Big)+a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2},a_{f-1}\Big)\Big]
$$

$$
-\ (t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})\Big[\gamma\Big(\frac{5}{2},a_{f-1}\Big)+a_f\,\Gamma\Big(\frac{3}{2},a_{f-1}\Big)\Big]\Big\}
$$

$$
-\ 2\Big(\delta_{ij}-\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\Big)
$$

$$
\times\ \Big\{\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{7}{2},a_f\Big)-a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{3}{2},a_f\Big)+2a_f\,\Gamma\Big(\frac{5}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
+\ \frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{7}{2},a_{f-1}\Big)+a_{f-1}^{2}\,\Gamma\Big(\frac{-1}{2},a_{f-1}\Big)\Big]
$$

$$
-\ (t_F-t_f)(t_F-t_{f-1})\Big[\gamma\Big(\frac{7}{2},a_{f-1}\Big)+a_f\,\Gamma\Big(\frac{5}{2},a_{f-1}\Big)\Big]\Big\}\ \gg \tag{A2.19}
$$

$$
\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{(\tau-t_{f-1})}{\Delta t_f}\ \frac{\partial\,\sigma_{ij}^{*3}(x,t,\xi,\tau)}{\partial n}\,d\tau
$$

$$
=\ \frac{-2G\blacksquare}{\pi^{3/2}r^{3}\Delta t_f}\ \ll\Big[\Big(\frac{\partial r}{\partial x_i}\,n_j+\frac{\partial r}{\partial x_j}\,n_i-4\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}\Big)
$$

$$
\Big\{-(t_F-t_{f-1})(t_F-t_f)\Big[\gamma\Big(\frac{5}{2},a_f\Big)+a_f\,\Gamma\Big(\frac{3}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
+\ \frac{(t_F-t_f)^2}{2}\Big[\gamma\Big(\frac{5}{2},a_f\Big)+a_f^{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2},a_f\Big)\Big]
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{5}{2},a_{f-1}\right)+2a_f\,\Gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)+a_f{}^2\,\Gamma\left(\frac{1}{2},a_{f-1}\right)\right] \\
&-2\left(\delta_{ij}-\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \\
&\times\Big\{-(t_F-t_{f-1})(t_F-t_f)\left[\gamma\left(\frac{3}{2},a_f\right)+a_f{}^2\,\Gamma\left(\frac{-1}{2},a_f\right)\right] \\
&+\frac{(t_F-t_f)^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{7}{2},a_f\right)+a_f{}^2\,\Gamma\left(\frac{5}{2},a_f\right)\right] \\
&+\frac{(t_F-t_{f-1})^2}{2}\left[\gamma\left(\frac{7}{2},a_{f-1}\right)+2a_{f-1}{}^2\,\Gamma\left(\frac{3}{2},a_{f-1}\right)-a_{f-1}\,\Gamma\left(\frac{5}{2},a_{f-1}\right)\right]\Big\}\gg
\end{aligned}
\tag{A2.20}
$$

付録３　相反定理による定式化[89]

Bettiの相反定理は次式で与えられる[83]。

$$\int_\Gamma p^{\circ}_i u^{*}_i d\Gamma+\int_\Omega b^{\circ}_i u^{*}_i d\Omega=\int_\Gamma p^{*}_i u^{\circ}_i \Gamma+\int_\Omega b^{*}_i u^{\circ}_i d\Omega \tag{A3.1}$$

Duhamelの相似則より表面力成分および物体力成分は次式になる[1]。

$$p^{\circ}_i=p_i+\beta T n_i \tag{A3.2}$$

$$b^{\circ}_i=b_i-\beta T_{,i} \tag{A3.3}$$

式(A3.1)～(A3.3)より

$$\int_\Gamma (p_i+\beta T n_i)u^{*}_i d\Gamma+\int_\Omega (b_i-\beta T_{,i})u^{*}_i d\Omega=\int_\Gamma p^{*}_i u_i \Gamma+\int_\Omega b^{*}_i u_i d\Omega \tag{A3.4}$$

上式の第１項の積分においてガウスの定理を用いると

$$\int_\Gamma T n_i u^{*}_i d\Gamma=\int_\Omega T_{,i} u^{*}_i d\Omega+\int_\Omega T u^{*}_{i,i} d\Omega \tag{A3.5}$$

式(A3.4),(A3.5)より

$$\int_\Gamma p_i u^{*}_i d\Gamma+\int_\Omega b_i u^{*}_i d\Omega+\beta\int_\Omega T u^{*}_{i,i} d\Omega=\int_\Gamma p^{*}_i u_i \Gamma+\int_\Omega b^{*}_i u_i d\Omega \tag{A3.6}$$

領域内部の点をqで、境界上の点をQで表し、式(A3.6)を書き改めると

$$\begin{aligned}\int_\Gamma p_i(q)u^{*}_i(Q)d\Gamma+\int_\Omega b_i(q)u^{*}_i(q)d\Omega+\beta\int_\Omega T(q)u^{*}_{i,i}(q)d\Omega\\=\int_\Gamma p^{*}_i(Q)u_i(Q)\Gamma+\int_\Omega b^{*}_i(q)u_i(q)d\Omega\end{aligned} \tag{A3.7}$$

$u^{*}_i(q),p^{*}_i(Q),b^{*}_i(q)$として、次の基本解の系$u^{*}_i(q,p)=u^{*}_{ik}(q,p)e_k$, $u^{*}_i(Q,p)=u^{*}_{ik}(Q,p)e_k$, $p^{*}_i(Q,p)=p^{*}_{ik}(Q,p)e_k$, $b^{*}_i(q,p)=\delta_{ik}(q,p)\delta(x_q-x_p)e_k$を用いると、式(A3.7)より次式の境界積分表示を導くことができる。

$$\begin{aligned}u_k(p)=&\int_\Gamma p_i(Q)u^{*}_{ik}(Q,p)d\Gamma+\int_\Omega b_i(q)u^{*}_{ik}(q,p)d\Omega\\&-\int_\Gamma p^{*}_{ik}(Q,p)u_i(Q)\Gamma+\beta\int_\Omega T(q)u^{*}_{ik,i}(q,p)d\Omega\end{aligned} \tag{A3.8}$$

基本解u^*_{ik}の微分係数はポテンシャル問題の基本解の微分で表現可能である。

$$u^*_{ik,i}(q,p)=\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\phi_{,k}(q,p) \qquad (A3.9)$$

式(A3.8)の温度に関する領域積分は、次式で与えることができる。

$$\beta\int_{\Omega}T(q)u^*_{ik,i}(q,P)d\Omega = ■\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Omega}T(q)\phi(q,p)d\Omega \qquad (A3.10)$$

ただし、■=(1+2)$\alpha/(1-\nu)$
上式で、右辺の領域積分はポテンシャル論より次式の解である[58]。

$$\nabla^2\Phi(p)=■T(p) \qquad (A3.11)$$

関数$\Phi(p)$は熱弾性変位ポテンシャルである。熱弾性変位ポテンシャルと変位との関係および式(3.13),(A3.8),(A3.10)より次式が求められる。

$$\begin{aligned}
cu_i(P)+\int_{\Gamma}p_{ij}^*(Q,P)u_j(Q)d\Gamma(Q)=&\int_{\Gamma}u_{ij}^*(Q,P)p_j(Q)d\Gamma(Q)\\
&+\kappa\int_0^t\int_{\Gamma}\Big[u_i^*(P,t,Q,\tau)\frac{\partial T(Q,\tau)}{\partial n(Q)}\\
&-\frac{\partial u_i^*(P,t,Q,\tau)}{\partial n(Q)}T(Q,\tau)\Big]d\Gamma(Q)d\tau\\
&+\frac{\kappa}{\lambda}\int_0^t\int_{\Omega}u_i^*(x,t,\xi,\tau)W(\xi,\tau)d\Omega(\xi)d\tau\\
&+\int_{\Omega}u_i^*(x,t,\xi,0)T(\xi,0)d\Omega(\xi)
\end{aligned} \qquad (A3.12)$$

付録４　近似式

本論分に示した式を用いて、プログラムを作成する際に使用した近似式について述べる。積分指数関数$E_1()$の計算には、次の近似式を用いた[46]。

0＜x≦1 の場合

$$E_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5-\log(x)+\varepsilon(x) \tag{A4.1}$$

$$|\varepsilon(x)|<2\times10^{-7}$$

1＜x の場合

$$E_1(x)=\frac{x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4}{xe^x(x^4+b_5x^3+b_6x^2+b_7x+b_8)}+\varepsilon(x) \tag{A4.2}$$

$$|\varepsilon(x)|<2\times10^{-8}$$

ただし、

a_1=-0.57721566　，　a_2=0.99999193

a_3=-0.24991055　，　a_4=0.05519968

a_5=-0.00976004　，　a_6=0.00107857

b_1= 8.5733287401，　b_2=18.0590169730

b_3= 8.6347608925，　b_4= 0.2677737373

b_5= 9.5733223454，　b_6=25.6329561486

b_7=21.0996530827，　b_8= 3.9584969228

また、次の関係を用いた。

$$E_1(x)=-E_i(-x) \quad (x>0) \tag{A4.3}$$

本論文に使用したガンマ関数は、余誤差関数erfc(x)を用いて計算することができる。すなわち、第１種不完全ガンマ関数は次式により、第２種不完全ガンマ関数で表現することが可能である。

$$\gamma(n,a)=\Gamma(n)-\Gamma(n,a) \tag{A4.4}$$

また、第２種不完全ガンマ関数の関係式[46]

$$\Gamma(n+1,a)=n\Gamma(n,a)-a^n\exp(-a) \tag{A4.5}$$

から、本論文に必要な第２種不完全ガンマ関数は$\Gamma(1/2,a)$によって表現することが可能である。第２種不完全ガンマ関数$\Gamma(1/2,a)$は余誤差関数erfc(x)と次式の関係

がある[46]。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2},a\right)=\pi^{1/2}\mathrm{erfc}(a^{1/2}) \qquad \text{(A4.6)}$$

余誤差関数erfc(x)は次の近似式によって計算することができる[46]。

$$\mathrm{erfc}(x)=(0.3480242-0.0958798m+0.7478556m^2)m\ \exp(-x^2)+\varepsilon(x) \qquad \text{(A4.7)}$$

ここで、

$$m=\frac{1}{1+0.47047x} \qquad \text{(A4.8)}$$

$$0\leqq x<\infty \qquad |\varepsilon(x)|<2.5\times10^{-5}$$

第１種および第２種完全楕円積分関数$K(m_0)$，$E(m_0)$は次式で近似することができる[55]。

$$K(m_0)=1.3862944+0.1119723\eta+0.0725296\eta^2+(0.5+0.1213478\eta$$
$$+0.0288729\eta^2)\ln(1./\eta) \qquad \text{(A4.9)}$$

$$E(m_0)=1.+0.4630151\eta+0.1077812\eta^2$$
$$+(0.2452727\eta+0.0412496\eta^2)\ln(1./\eta) \qquad \text{(A4.10)}$$

ただし、$\eta=1-m_0^2$。

付録５　基本解の空間に関する解析的積分

境界積分方程式では、積分の精度が計算結果に大きく影響を及ぼす。解析対象領域が、円のような場合は積分精度に関する問題はほとんど生じないが、細長い棒のようにアスペクト比が大きい場合は積分精度が低下する。また、内点の関数値を計算するとき、内点が境界近傍の場合、その関数値が正しく計算できない場合がある。その原因の一つとして、数値積分の精度の低下が考えられる。解析的積分は境界積分方程式の解の精度を高めるために有効であるので、一定要素の場合について２次元定常熱伝導解析に関する基本解、静弾性問題における基本解および定常熱応力問題における基本解の解析的積分を示す。本手法は線形要素においても使用することができる。

5.1　定常熱伝導解析に関する基本解の解析的積分

図A5.1に示すような長さLの直線状の要素において、要素上の任意点(x,y)は次式で示すことが出来る。ただし、sは0からLまで変化するものとする[90]。

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{L} s \qquad (A5.1)$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{L} s \qquad (A5.2)$$

領域内あるいはいま考えている要素以外の要素上の任意点(x_i, y_i)から要素上の点(x, y)までの距離rは次式で表される。

$$r = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{1/2} = [s^2 + 2a_1 s + a_0]^{1/2} \qquad (A5.3)$$

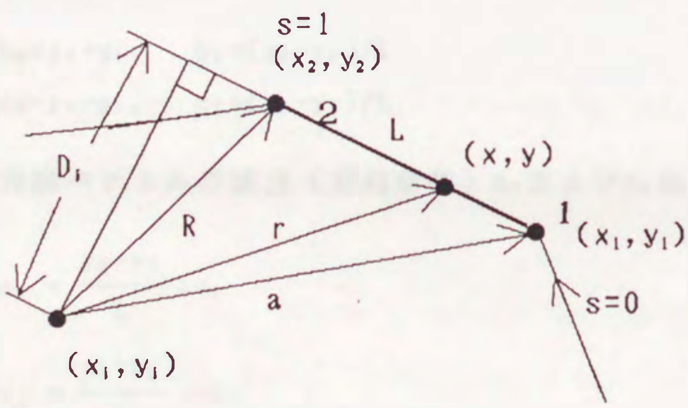
ただし、

$$a_1 = \frac{1}{L}\{(x_1 - x_i)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_i)(y_2 - y_1)\} \qquad (A5.4)$$

$$a_0 = (x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2 \qquad (A5.5)$$

ここで、積分I_{kL}、I_{km}を次式のように定義する。

$$I_{kL} = \int_0^L s^k \ln\frac{1}{r}\, ds \qquad (A5.6)$$



図A5.1　解析積分のための記号

$$I_{km}=\int_0^L \frac{s^k}{r^m}\,ds \tag{A5.7}$$

また、積分$A_{xx..xyy..yk}$を次式のように定義する。

$$A_{\underbrace{xx..x}_{n}\underbrace{yy..y}_{m}k}=\int_0^L \frac{(x-x_i)^n(y-y_i)^m}{r^k}\,ds \tag{A5.8}$$

$\partial r/\partial x$および$\partial r/\partial y$は式(A5.3)より、

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_i}{r} \tag{A5.9}$$

で与えられ、さらに、$x-x_i$および$y-y_i$は式(A5.1),(A5.2)より

$$x-x_i=(x_1-x_i)+\left(\frac{x_2-x_1}{L}\right)s=b_0+b_1s \tag{A5.10}$$

$$y-y_i=(y_1-y_i)+\left(\frac{y_2-y_1}{L}\right)s=c_0+c_1s \tag{A5.11}$$

で与えられる。ただし、

$$b_0=x_1-x_i, \quad b_1=(x_2-x_1)/L \tag{A5.12}$$

$$c_0=y_1-y_i, \quad c_1=(y_2-y_1)/L \tag{A5.13}$$

単位法線ベクトルの成分（方向余弦）n_xおよびn_yは次式で与えられる。

$$n_x=\frac{y_2-y_1}{L}=c_1 \tag{A5.14}$$

$$n_y=\frac{x_1-x_2}{L}=-b_1 \tag{A5.15}$$

図A5.1に示すように任意点(x_i,y_i)から境界要素までの距離D_iは次式で与えられる。

$$D_i=b_0c_1-b_1c_0 \tag{A5.16}$$

２次元定常熱伝導問題における基本解の要素に沿った積分は次式のように表すことができる。

$$\int_0^L T^*_2(x,\xi)ds = \frac{1}{2\pi} I_{0L} \tag{A5.17}$$

$$\int_0^L \frac{\partial T^*_2(x,\xi)}{\partial n} ds = -\frac{D_i}{2\pi} I_{02} \tag{A5.18}$$

5.2 静弾性問題における基本解の解析的積分

2次元静弾性解析において一定要素を用いた場合の解析的積分について示す。2次元静弾性解析における基本解は平面ひずみの場合、式(4.20),(4.21)で与えられる。式(A5.3),(A5.6),(A5.7),(A5.8)を用いることにより、解析的積分は以下のように求めることができる。

$$\int_0^L u_{xx}^* ds = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)I_{0L} + A_{xx2}] \tag{A5.19}$$

$$\int_0^L u_{yy}^* ds = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)I_{0L} + A_{yy2}] \tag{A5.20}$$

$$\int_0^L u_{xy}^* ds = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} A_{xy2} \tag{A5.21}$$

$$\int_0^L p_{xx}^* ds = -\frac{D_i}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)I_{02} + 2A_{xx4}] \tag{A5.22}$$

$$\int_0^L p_{yy}^* ds = -\frac{D_i}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)I_{02} + 2A_{yy4}] \tag{A5.23}$$

$$\int_0^L p_{xy}^* ds$$

$$= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [2D_i A_{xy4} + (1-2\nu)(b_1 A_{x2} + c_1 A_{y2})] \tag{A5.24}$$

$$\int_0^L p_{yx}^* ds$$

$$= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [2D_i A_{xy4} - (1-2\nu)(b_1 A_{x2} + c_1 A_{y2})] \tag{A5.25}$$

同様に内点の応力に関する境界積分表示における積分項も同様に解析的に積分できる。2次元平面ひずみ問題における基本解は式(4.26),(4.27)で与えられている。解析積分を実行すると次式が得られる。

$$\int_0^L D_{xxx}ds=[(1-2\nu)A_{x2}+2A_{xxx4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.26}$$

$$\int_0^L D_{yyy}ds=[(1-2\nu)A_{y2}+2A_{yyy4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.27}$$

$$\int_0^L D_{yxx}ds=[-(1-2\nu)A_{y2}+2A_{xxy4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.28}$$

$$\int_0^L D_{xyy}ds=[-(1-2\nu)A_{x2}+2A_{xyy4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.29}$$

$$\int_0^L D_{xxy}ds=[(1-2\nu)A_{y2}+2A_{xxy4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.30}$$

$$\int_0^L D_{yxy}ds=[(1-2\nu)A_{x2}+2A_{xyy4}]\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \tag{A5.31}$$

$$\int_0^L S_{xxx}ds=[2D_i(A_{x4}-4A_{xxx6})+4\nu c_1A_{xx4}+2(1-2\nu)c_1(A_{xx4}+I_{\theta 4}) \\ -(1-4\nu)c_1I_{\theta 2}]\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.32}$$

$$\int_0^L S_{yyy}ds=[2D_i(A_{y4}-4A_{yyy6})-4\nu b_1A_{yy4}-2(1-2\nu)b_1(A_{yy4}+I_{\theta 4}) \\ +(1-4\nu)b_1I_{\theta 2}]\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.33}$$

$$\int_0^L S_{yxx}ds=\{2D_i[(1-2\nu)A_{y4}-4A_{xxy6}]+4\nu b_1A_{yy4}-2(1-2\nu)b_1A_{yy4} \\ +(1-4\nu)b_1I_{\theta 2}\}\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.34}$$

$$\int_0^L S_{xyy}ds=\{2D_i[(1-2\nu)A_{x4}-4A_{xyy6}]+4\nu c_1A_{xy4}+2(1-2\nu)c_1A_{yy4} \\ -(1-4\nu)c_1I_{\theta 2}\}\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.35}$$

$$\int_0^L S_{xxy}ds=\{2D_i[\nu A_{x4}-4A_{xxy6}]+2\nu(c_1A_{xy4}-b_1A_{xx4})$$

$$+(1-2\nu)(2c_1A_{xx4}-b_1I_{04})\}\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.36}$$

$$\int_0^L S_{yxy}ds=\{2D_i[\nu A_{y4}-4A_{xyy6}]+2\nu(-b_1A_{xy4}+c_1A_{yy4})$$

$$+(1-2\nu)(-2b_1A_{yy4}+c_1I_{04})\}\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \tag{A5.37}$$

5.3　定常熱応力問題における基本解の解析的積分

５・２節で定式化された２次元定常熱応力問題に対する境界積分方程式の解析的積分を示す。式(5.37),(5.38),(5.40)(5.41)で与えられる基本解の解析的積分は、次式で与えられる。

$$\int_0^L u_x{}^*{}_2(x,\xi)ds=\frac{\blacksquare}{4\pi}[b_0I_{0L}+\frac{1}{2}b_0L+b_1I_{1L}+\frac{1}{4}b_1L^2] \tag{A5.38}$$

$$\int_0^L u_y{}^*{}_2(x,\xi)ds=\frac{\blacksquare}{4\pi}[c_0I_{0L}+\frac{1}{2}c_0L+c_1I_{1L}+\frac{1}{4}c_1L^2] \tag{A5.39}$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_x{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n}ds=\frac{\blacksquare}{4\pi}\{(I_{0L}+\frac{L}{2})c_1-D_i(b_0I_{02}+b_1I_{12})\} \tag{A5.40}$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_y{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n}ds=\frac{\blacksquare}{4\pi}\{-(I_{0L}+\frac{L}{2})b_1-D_i(c_0I_{02}+c_1I_{12})\} \tag{A5.41}$$

$$\int_0^L \sigma_{xx}{}^*{}_2(x,\xi)ds=\frac{G\blacksquare}{2\pi}\{A_{xx2}-(\frac{L}{2}-I_{0L})\} \tag{A5.42}$$

$$\int_0^L \sigma_{yy}{}^*{}_2(x,\xi)ds=\frac{G\blacksquare}{2\pi}\{A_{yy2}-(\frac{L}{2}-I_{0L})\} \tag{A5.43}$$

$$\int_0^L \sigma_{xy}{}^*{}_2(x,\xi)ds=\frac{G\blacksquare}{2\pi}A_{xy2} \tag{A5.44}$$

$$\int_0^L \frac{\partial \sigma_{xx}{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n}ds=\frac{G\blacksquare}{2\pi}\{-D_i(I_{02}+2A_{xx4})+2c_1A_{x2}\} \tag{A5.45}$$

$$\int_0^L \frac{\partial \sigma_{yy}{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n}ds=\frac{G\blacksquare}{2\pi}\{-D_i(I_{02}+2A_{yy4})-2b_1A_{y2}\} \tag{A5.46}$$

$$\int_0^L \frac{\partial \sigma_{xy}{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n} ds = \frac{G_m}{2\pi}\{-D_i(2A_{xy4})+c_1 A_{y2}-b_1 A_{x2}\} \quad (A5.47)$$

ソース点と観測点が一致する場合、解析積分は次式で与えられる。

$$\int_0^L \frac{\partial u_x{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n} ds = \frac{m}{4\pi}\{(1.5-\ln L)c_1\}L \quad (A5.48)$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_y{}^*{}_2(x,\xi)}{\partial n} ds = \frac{-m}{4\pi}\{(1.5-\ln L)b_1\}L \quad (A5.49)$$

$$\int_0^L u_k{}^*{}_2(x,\xi) ds = 0 \quad (A5.50)$$

I_{0L}、I_{1L}の積分を具体的に示すと次式のようになる。

$$I_{0L} = -\frac{1}{2}\{L\ \ln(L^2+2a_1L+a_0)-2L+2a_1 I_{12}+2a_0 I_{02}\} \quad (A5.51)$$

$$I_{1L} = -\frac{1}{4}\{L^2\ln(L^2+2a_1L+a_0)-(L^2-2a_1L)-2(-a_0+2a_1{}^2)I_{12}-2a_1a_0{}^2 I_{02}\}$$

(A5.52)

また、積分$A_{x..xy..yk}$は次式で与えられる。

$$A_{x2} = b_0 I_{02}+b_1 I_{12} \quad (A5.53)$$

$$A_{y2} = c_0 I_{02}+c_1 I_{12} \quad (A5.54)$$

$$A_{x4} = b_0 I_{04}+b_1 I_{14} \quad (A5.55)$$

$$A_{y4} = c_0 I_{04}+c_1 I_{14} \quad (A5.56)$$

$$A_{xx2} = b_1{}^2L+(2b_0b_1-2a_1b_1{}^2)I_{12}+(b_0{}^2-a_0b_1{}^2)I_{02} \quad (A5.57)$$

$$A_{yy2} = c_1{}^2L+(2c_0c_1-2a_1c_1{}^2)I_{12}+(c_0{}^2-a_0c_1{}^2)I_{02} \quad (A5.58)$$

$$A_{xy2} = b_1c_1L+(b_0c_1+b_1c_0-2b_1c_1a_1)I_{12}+(b_0c_0-b_1c_1a_0)I_{02} \quad (A5.59)$$

$$A_{xx4} = b_0{}^2 I_{04}+2b_0b_1 I_{14}+b_1{}^2 I_{24} \quad (A5.60)$$

$$A_{yy4} = c_0{}^2 I_{04}+2c_0c_1 I_{14}+c_1{}^2 I_{24} \quad (A5.61)$$

$$A_{xy4} = b_0c_0 I_{04}+(b_0c_1+b_1c_0)I_{14}+b_1c_1 I_{24} \quad (A5.62)$$

$$A_{xxx4} = b_0{}^3 I_{04}+3b_0{}^2b_1 I_{14}+3b_0b_1{}^2 I_{24}+b_1{}^3 I_{34} \quad (A5.63)$$

$$A_{yyy4} = c_0{}^3 I_{04}+3c_0{}^2c_1 I_{14}+3c_0c_1{}^2 I_{24}+c_1{}^3 I_{34} \quad (A5.64)$$

$$A_{xyy4} = b_0{}^2c_0 I_{04}+(b_0{}^2c_1+2b_0b_1c_0)I_{14}+(2b_0b_1c_1+b_1{}^2c_0)I_{24}+b_1{}^2c_1 I_{34} \quad (A5.65)$$

$$A_{xyy4} = c_0{}^2b_0 I_{04}+(c_0{}^2b_1+2c_0c_1b_0)I_{14}+(2c_0c_1b_1+c_1{}^2b_0)I_{24}+c_1{}^2b_1 I_{34} \quad (A5.66)$$

$$A_{xxx6}=b_0^3 I_{06}+3b_0^2 b_1 I_{16}+3b_0 b_1^2 I_{26}+b_1^3 I_{36} \tag{A5.67}$$

$$A_{yyy6}=c_0^3 I_{06}+3c_0^2 c_1 I_{16}+3c_0 c_1^2 I_{26}+c_1^3 I_{36} \tag{A5.68}$$

$$A_{xxy6}=b_0^2 c_0 I_{06}+(b_0^2 c_1+2b_0 b_1 c_0) I_{16}+(2b_0 b_1 c_1+b_1^2 c_0) I_{26}+b_1^2 c_1 I_{36} \tag{A5.69}$$

$$A_{xyy6}=c_0^2 b_0 I_{06}+(c_0^2 b_1+2c_0 c_1 b_0) I_{16}+(2c_0 c_1 b_1+c_1^2 b_0) I_{26}+c_1^2 b_1 I_{36} \tag{A5.70}$$

積分I_{02}, I_{12}は具体的に次式で表される。

$$I_{02}=\frac{1}{B}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{L+a_1}{B}\right)-\tan^{-1}\frac{a_1}{B}\right\} \tag{A5.71}$$

$$(B\equiv(a_0-a_1^2)^{1/2}>0)$$

$$I_{02}=\frac{L}{a_1(L+a_1)} \qquad (a_0=a_1^2)$$

$$I_{12}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{L^2+2a_1 L+a_0}{a_0}\right)-a_1 I_{02} \tag{A5.72}$$

式(A5.71)でBは、常に実数であり、点(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_i, y_i)が直線上に並んだ場合、$B=0$である。なお、式(A5.8)の積分I_{km}は式(A5.3)を用いて部分積分を行い(55)、

$$R^2=L^2+2a_1 L+a_0 \tag{A5.73}$$

$$a_3=a_0-a_1^2 \tag{A5.74}$$

と置くと、積分は次式のようになる。

$$I_{04}=\frac{L+a_1}{2a_3 R^2}-\frac{a_1}{a_3 a_0}+\frac{1}{2a_3} I_{02} \tag{A5.75}$$

$$I_{14}=\frac{(L+a_1)L}{2a_3 R^2}-\frac{a_1}{2a_3} I_{02} \tag{A5.76}$$

$$I_{24}=\frac{(2a_1^2-a_0)L+a_1 a_0}{2a_3 R^2}-\frac{a_1}{2a_3}+\frac{a_0}{2a_3} I_{02} \tag{A5.77}$$

$$I_{34}=\frac{(3a_0-4a_1^2)a_1 L+a_0(a_0-2a_1^2)}{2a_3 R^2}-\frac{a_0-2a_1^2}{2a_3}+\frac{1}{2}\ln[R^2/a_0]-\frac{a_1(3a_0-2a_1^2)}{2a_3} I_{02} \tag{A5.78}$$

$$I_{06}=\frac{L+a_1}{4a_3}\left[\frac{1}{R_4}+\frac{3}{2a_3 R^2}\right]-\frac{a_1}{4a_3}\left[\frac{1}{a_0^2}+\frac{3}{2a_3 a_0}\right]+\frac{3}{8a_3^2} I_{02} \tag{A5.79}$$

$$I_{16} = -\frac{a_1 L + a_0}{2a_3 R^4} - \frac{3a_1(L+a_1)}{8a_3^2 R^2} + \frac{1}{2a_3 a_0} + \frac{3a_1^2}{8a_3^2 a_0} - \frac{3a_1}{8a_3^2} I_{02} \tag{A5.80}$$

$$I_{26} = \frac{(2a_1^2 - a_0)L + a_1 a_0}{4a_3 R^4} + \frac{(a_0 + 2a_1^2)(L+a_1)}{8a_3^2 R^2} - \frac{a_1}{4a_3 a_0} - \frac{(a_0+2a_1^2)a_1}{8a_3^2 a_0} + \frac{a_0 + 2a_1^2}{8a_3^2} I_{02} \tag{A5.81}$$

$$I_{36} = \frac{1}{4a_3 R^4} \left\{ \frac{(L+a_1)L^3}{R^2} - \frac{3a_1[(2a_1^2 - a_0)L + a_1 a_0]}{2a_3} \right\} + \frac{3a_1^2}{8a_3^2} - \frac{3a_1 a_0}{8a_3^2} I_{02} \tag{A5.82}$$

特に、$a_1^2 = a_0$の場合は

$$R = L + a_1 \tag{A5.83}$$

となり、積分は次式のように与えられる。

$$I_{04} = -\frac{1}{3R^3} + \frac{1}{3a_1^3} \tag{A5.84}$$

$$I_{14} = \frac{(L+3a_1)L^2}{6R^3 a_1^2} \tag{A5.85}$$

$$I_{24} = \frac{L^3}{3R^3 a_1} \tag{A5.86}$$

$$I_{34} = \frac{-L^3}{3R^3} + \frac{-L^2}{2R^2} + \frac{-L}{R} + \ln[|R/a_1|] \tag{A5.87}$$

$$I_{06} = \frac{-1}{5R^5} + \frac{1}{5a_1^5} \tag{A5.88}$$

$$I_{16} = \frac{-L}{5R^5} + \frac{-1}{20R^4} + \frac{1}{20a_1^4} \tag{A5.89}$$

$$I_{26} = \frac{(L^2 + 5a_1 L + 10a_1^2)L^3}{30R^5 a_1^3} \tag{A5.90}$$

$$I_{36} = \frac{(L+5a_1)L^4}{20R^5 a_1^2} \tag{A5.91}$$

付録6　非定常軸対称問題における基本解の積分表示

第3・3節において級数表現で軸対称非定常熱応力問題における基本解を示した。ここでは、基本解の積分表示を示す。

$$\phi^*(x,t,\xi,\tau)=\frac{-m}{2[4\pi(t-\tau)]^{1/2}}\int_0^1 w^{1/2}\exp(-pw)I_0(2cpw)dw \qquad (A6.1)$$

$$u_r^*(x,t,\xi,\tau)=\frac{m}{\pi^{1/2}[4(t-\tau)]^{3/2}}$$

$$\times\int_0^1 w^{1/2}\exp(-pw)[rI_0(2cpw)-r_0I_1(2cpw)]dw \qquad (A6.2)$$

$$u_z^*(x,t,\xi,\tau)=\frac{m(z-z_0)}{\pi^{1/2}[4(t-\tau)]^{3/2}}\int_0^1 w^{1/2}\exp(-pw)I_0(2cpw)dw \qquad (A6.3)$$

ただし、$p=s/[4(t-\tau)]$, $c=rr_0/s$, $s=r^2+r_0{}^2+(z-z_0)^2$である。時間積分を行うと次式が得られる。

$$\int_{t_f}^{t_F}\phi^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$=\frac{m(s+2e)^{1/2}}{2\kappa\pi}E(m_0)-\frac{m(t_F-t_f)^{1/2}}{4(\kappa\pi)^{1/2}}\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw$$

$$+\frac{m(t_F-t_f)^{1/2}}{4(\kappa\pi)^{1/2}}\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw \qquad (A6.4)$$

$$\int_{t_f}^{t_F}u_r^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$=\frac{m}{2\kappa\pi}\{\frac{r+r_0}{(a+b)^{1/2}}K(m_0)-\frac{1}{2r}(a+b)^{1/2}[K(m_0)-E(m_0)]\}$$

$$+\frac{m}{8\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times[r\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw-r_0\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

$$-\frac{m}{8\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [r\int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw - r_0\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

(A6.5)

$$\int_{t_f}^{t_F} u_z^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{m(z-z_0)}{2\kappa\pi(a+b)^{1/2}} K(m_0)$$

$$+ \frac{m(z-z_0)}{8\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw - \int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

(A6.6)

$$\int_{t_f}^{t_F} \sigma_{rr}^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{mG}{\kappa\pi}\ \{\frac{2r+r_0}{r(a+b)^{1/2}} K(m_0)$$

$$+ \frac{(a+b)^{1/2}}{2r^2}[K(m_0)-E(m_0)] + \frac{(z-z_0)^2}{(a+b)^{1/2}(a-b)} E(m_0)\}$$

$$+ \frac{mG}{4\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw + \int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

$$- \frac{mG(r^2+r_0^2)}{8\kappa^{5/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{3/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{3/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw - \int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

$$- \frac{camG}{2\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{3/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw - \int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw]$$

$$+ \frac{mGr_0}{4\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}r}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw - \int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw]$$

(A6.7)

$$\int_{t_f}^{t_F} \sigma_{\theta\theta}^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{mG}{\kappa\pi}\ \{\frac{-r+r_0}{r(a+b)^{1/2}}K(m_0) - \frac{1}{2r^2}(a+b)^{1/2}[K(m_0)-E(m_0)]\}$$

$$+\frac{mG}{4\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw + \int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

$$-\frac{mGr_0}{4\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}r}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw - \int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw]$$

(A6.8)

$$\int_{t_f}^{t_F} \sigma_{zz}^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{mG}{\kappa\pi}\ \{\frac{-1}{(a+b)^{1/2}}K(m_0) - \frac{(z-z_0)^2}{(a+b)^{1/2}(a-b)}E(m_0)]\}$$

$$+\frac{mG}{4\kappa^{3/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{1/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw + \int_0^1 w^{-1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

$$-\frac{mG(z-z_0)^2}{8\kappa^{5/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{3/2}}$$

$$\times\ [\int_0^1 w^{3/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw - \int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw]$$

(A6.9)

$$\int_{t_f}^{t_F} \sigma_{rz}^*(x,t,\xi,\tau)d\tau$$

$$= \frac{-mG}{\kappa\pi}\{\frac{r+r_0}{2r(a+b)^{1/2}}[K(m_0)-E(m_0)] + \frac{(r-r_0)(z-z_0)}{(a+b)^{1/2}(a-b)}E(m_0)\}$$

$$
-\frac{mG(z-z_0)}{8\kappa^{5/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{3/2}}
$$

$$
\times\left[r\int_0^1 w^{3/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw-r_0\int_0^1 w^{3/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw\right]
$$

$$
+\frac{mG(z-z_0)}{4\kappa^{5/2}\pi^{1/2}(t_F-t_f)^{3/2}}
$$

$$
\times\left[r\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_0(2caw)dw-r_0\int_0^1 w^{1/2}\exp(-aw)I_1(2caw)dw\right]
\tag{A6.10}
$$

ただし，$a=s$，$b=rr_0$，$e=2b$，$m_0=[2b/(a+b)]^{1/2}$である。

参考文献

(1) 竹内洋一郎，熱応力，日新出版．

(2) C.A.Brebbia, J.C.F.Telles and L.C.Wrobel, Boundary Element Techniques ――Theory and Applications in Engineering, (1984) Springer－Verlag. （田中正隆訳、境界要素解析－理論と応用、丸善）．

(3) Heinz Parkus, Instationäre Wärmespannungen, Springer-Verlag,(1959), 14.

(4) 矢川、宮崎、有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析、サイエンス社,(1985).

(5) J.Masinda, Application of the Boundary Element Method to 3D Problems of Non-Stationary Thermoelasticity, Engineering Analysis, 1.,(1984), p.66-69.

(6) J.Masinda, Application of BEM to Three-Dimensional Problems of Non-Stationary Thermoelastic, in Boundary Elements Proc. 7th Int. Conf., Como, Italy ,eds. C.Brebbia and G. Maier, Springer-Verlag, Berlin, Vol.1, (1985).

(7) G.F.Dargush and P.K.Banerjee, Boundary Element Methods in Three-Dimensional Thermoelasticity, Int. J. Solids Structures, Vol.26, No.2, (1990),p.199.

(8) S.Sharp and S.L.Crouch, Boundary Integral Methods for Thermoelasticity Problems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.53, (1986), p.298-302.

(9) V.Sladek and J.Sladek, Computation of Thermal Stresses in Quasistatic Non-Stationary Thermoelsticity Using Boundary Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.28, (1989), p.1131.

(10) G.F.Dargush and P.K.Banerjee, Develpoment of a Boundary Element

Method for Time-Dependent Planar Thermoelasticity, Int. J. Solids Structures, Vol.25, No.9, (1989), p.999.

(11) Y.Ochiai and T.Sekiya, Unsteady Thermal Stress Analysis in Compound Region by Means of Thermoelastic Displacement Potential and Boudary Element Method, Journal of Thermal Stresses, 12,(1989), p.57-65.

(12) Y.Ochiai, R.Ishida and T.Sekiya, Unsteady Thermal Stress Analysis in Three-Dimensional Problems by Means of the Thermoelastic Displacement Potential and Boundary Element Method, Journal of Strain Analysis, Vol.25, (1990), p.9-14.

(13) Y.Ochiai and R.Ishida, Unsteady Thermal Stress Analysis in Three-Dimensional Problems by means of Boundary Element Method, Communications in Applied Numerical Methods, Vol.6,(1990), p.535-542.

(14) 山田, 竹内, ２円孔を有する無限板の非定常熱応力、日本機械学会論文集 Vol.50, no.460, (1984) p.1947.

(15) 落合、関谷, 第28回構造強度講論集(1986), p.398-401.

(16) P.K. Banerjee and R.Butterfield, G.R.Tomlin, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.5, (1981), p.15-31.

(17) Y.Ochiai and T.Sekiya, Unsteady Thermal Stress Analyses by Means of Combined Boundary Element and Charge Simulation Method, Mechanics Research Communications, 1986-10, Vol.13(5), p.247-253.

(18) 落合、関谷、熱弾性変位ポテンシャルおよびＢＥＭを利用した非定常熱応力解析、第３回境界要素法シンポジウム論文集, (1986), p.213-218.

(19) 落合、石田、不均一熱発生を伴う二次元非定常熱応力解析の数値解析手法、第５回境界要素法シンポジウム論文集, (1988), p.51-56.

(20) 石田、落合、境界要素法による軸対称体の非定常熱応力解析、第５回境界要素法シンポジウム論文集, (1988), p.57-62.

(21) 落合、石田、関谷, 熱弾性変位ポテンシャルおよび境界要素法を利用した

三次元非定常熱応力解析,日本機械学会論文集Ａ編, Vol.54-506,(1988),p.1847-1850.

(22) 落合、石田、機械学会日立講演論文集,(1988), p.31-33.

(23) 落合、石田, 軸対称非定常熱応力問題の数値解析のための定式化、日本機械学会論文集Ａ編, Vol.55, (1989), p.1433-1436.

(24) Wrobel,L.C., Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method, Ph.D.Thesis, Southampton University,1981.

(25) C.A.Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press,(1978)(神谷、田中、田中共訳、境界要素法入門、(1980)、培風館).

(26) 落合、第36回塑性加工講論集,(1985), p.631-634.

(27) 落合、石田、境界要素法による２次元非定常熱応力解析,日本機械学会論文集, Vol.56,(1990), p.1824-1830.

(28) Y.Ochiai and R.Ishida, Unsteady Thermal Stress Analysis in Three-Dimensional Problems by Means of Boundary Element Method, Communications in Applied Numerical Methods.Vol.6,(1990), p.535-542.

(29) Y.Ochiai, R.Ishida and T.Sekiya, New Boundary Element Method Formulation for Thermal Stress Analysis, Proceedings of the Twelfth International Conference on Boundary Elements Engineering, (1990),p.383-394.

(30) Y.Ochiai, R.Ishida and T.Sekiya, Steady Thermal Stress Analysis in Two-Dimensional Problems by Means of Thermoelastic Displacement Potential and Boudary Element Method, Journal of Thermal Stresses, Vol.13,(1990), p.151-159.

(31) 落合,点および線熱源を伴う２次元定常熱応力解析の数値解析、日本機械学会論文集Ａ編, Vol.55.(1989), p.1433-1436.

(32) 落合、石田、熱弾性変位ポテンシャルを用いた３次元定常熱応力の数値解法、日本機械学会論文集Ａ編、Vol.56, (1990), p.1199-1203.

(34) S. Mukherjee, Corrected Boundary-Integral Equations in Planar

Thermoelastoplasticity, Int. J. Solids Structres, 13 (1977), p.331-335.
(35) F.J. Rizzo and D.J. Shippy, Developments in Boundary Element Methods-1,ed. P.K.Banerjee, Appl. Sci. Publishers,(1979),pp.65-95.
(36) D. P. Henry and P.K. Banerjee, Int. J. Numerical Methods Engng., 26 (1988), p.2061-2077.
(37) W.Drexler, Ein Beitrag zur Lösung Rotationssymmetrischer, Thermoelastischer Kerbprobleme Mitteles der Randintegralgleichungsmethod,(1981), München.
(38) P.K.Banerjee, R.Butterfield and G.R. Tomlin, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.5, (1981), p.15-31.
(39) V.Sladek and J.Sladek, Boundary Integral Equation Method in Thermoelasticty PartⅠ:General Analysis., Appl. Math. Modelling, Vol.7, (1983), p.241-253.
(40) V.Sladek and J.Sladek, Boundary Integral Equation Method in Thermoelasticty PartⅢ:Uncoupled Thermoelasticity. Appl. Math. Modelling, Vol.7, (1984), p.241-253.
(41) Cruse,T.A, Boundary-Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Fracture Mechanics Analysis, AFOSR-TR-75-0813,May(1975).
(42) Cruse,T.A, Snow,D.W. and Wilson,R.B, Numerical Solutions in Axisymetric Elasticity, Computer and Structure,(1977), p.445.
(43) Progress in Boundary Element Methods,Vol.2,(1983),(Ed.C.A.Brebbia).
（田中正隆監訳、境界要素法の応用・2、企画センター）
(44) 陳，西谷，体積力法と境界要素法の統一的取扱い（重ね合わせの原理に基づく一般的境界形数値解析法の提案）、日本機械学会論文集Ａ編、No.510, (1989), p.285.
(45) M. Mayr, Ein Integralgleichungsverfahren zur Lösung rotationssymmetrischer Elastizitätsprobleme,(1975), München.
(46) Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (Eds), Handbook of Mathematical

Functions, 1965 (Dover, New York).
(47) 黒木健実、荒牧軍治、添田朋子、境界要素法入門、(1984)、森北出版.
(48) Y.Ochiai and T.Sekiya, Unsteady Thermal Stress Analysis in Compound Region by Means of Thermoelastic Displacement Potential and Boudary Element Method, Journal of Thermal Stresses, Vol.12, (1989), p.57-65.
(49) R.Ishida and Y.Ochiai, On a BEM Formulation for Axisymmetric Heat Conduction Problem in a Transversely Isotropic Medium, Communications in Applied Numerical Methods, Vol.5,(1989), p.483-488.
(50) 石田、落合、軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化について、日本機械学会論文集Ｂ編、Vol.55,(1989), p.3493-3498.
(51) Danson,D.J., Boundary Element Formulation of Problem in Linear Isotropic Elasticity with Body Force, in Boundary Element Methods (Ed. by Brebbia,C.A),p.105-122,Springer-Verlag(1981).
(52) A.A.Bakr and R.T.Fenner, Boundary Integral Equation Analysis of Axisymmetric Thermoelastic Problems, Journal of Strain Analysis, 1983, p.239-251.
(53) 山田、大小２円孔をもつ無限板の非定常熱応力、日本機械学会論文集、Vol.52, No.480, (1986), p.1988-1995.
(54) 石田、落合、横等方性体の軸対称熱伝導問題のＢＥＭ定式化、第３９回応用連合講演会(1989).
(55) 森口繁一他著、数学公式Ｉ,Ⅲ,(1989),岩波書店.
(56) M.Tanaka and K.Tanaka, SM Archiev, Vol.6(1981), p.467-491.
(57) 徐日教、登坂宣好、一般化された連成熱弾性問題の境界要素法、第５回境界要素法シンポジウム論文集,(1988), p.63-68.
(58) O.D.Kellog, Foundation of Potential Theory, Springer(1967).
(59) T. D. Riney, Disk Heated by Internal Source, Transaction of ASME, E-28(1961), p.631
(60) 西谷、陳、体積力法、(1987), 培風館.

(61) 関谷、斉藤、薄板構造力学、(1968)、共立出版.
(62) M.Tanaka and K.Tanaka, On Boundary Element Discretization of Transient Thermoelastic Problems,Nuclear Engineering and Design, 65,(1981),p.153-160.
(63) M.Tanaka and K.Tanaka, A New Boundary Element Approach with Volume Elements Applied to Thermoplastic Problems, Buletinul Institutui Politehnic DIN IASI, 27(1981), p.23-31.
(64) Chaudouet,A, Threee-Dimentional Transient Thermoelastic Analysis by a BIE Method, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.24,(1987), p.24-45.
(65) 境界要素法研究会編、境界要素法の理論と応用、(1986),コロナ社.
(66) 田中正隆、田中喜久昭著、境界要素法、基礎と応用、(1984),丸善.
(67) 神谷紀生、大西和栄著、境界要素法による計算力学、(1985),森北出版.
(68) V.Sladek and J.Sladek, Boundary Integral Equation Method in Two-Dimensional Thermoelasticity, Engineering Analysis, Vol.1, No.3, (1984), p.135.
(69) Kermanidis,T, A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems, Int.J. Solid Structure, Vol.11, (1975), p.493-500.
(70) 徐日教、登坂宣好、線型連成熱弾性問題の境界要素解析、第4回境界要素法シンポジウム論文集,(1987), p.99-104.
(71) 竹内、谷川、非軸対称加熱を受ける複合円筒の非定常熱応力、日本機械学会論文集、Vol.44, No.386, (1978), p.3386-3394.
(72) 竹内、谷川、積分法による複連結領域の非定常熱応力の近似解析、日本機械学会論文集、Vol.45, No.400, (1979), p.1529.
(73) 村瀬、小山、石田共著、順・逆解析入門、(1990)、森北出版.
(74) Rizzo,F.J., and Shippy, D.J., A Method of Solution for Certain Probrems of Transient Heat Conduction, AIAA Journal, Vol.8, (1970) p.2004-2009.
(75) Wrobel,L.C and Brebbia,C.A.,The Boundary Element Method for Steady-

State and Transient Heat Conduction, in Numerical Methods in Thermal Problems (R.W.Lewis and K.Morgan,Eds.), Pineridge Press, Swansea, Wales,1979.

(76) 落合、山本、境界要素法による冷間鍛造用金型の応力解析,塑性と加工、Vol.25,(1984), p.612.

(77) 落合、山本,境界要素法による冷間鍛造用金型の摩擦係数を考慮した応力解析,塑性と加工、26,(1985), p.294.

(78) 落合、石田、井垣、パーソナルコンピュータを用いた境界要素法による冷鍛金型解析システムの開発，精密工学会誌、55/1 (1989),87-92

(79) Y.Ochiai, H.Yamamoto, Apllication of Boundary Element Method to Cold Forging Die Design, Mechanics Research Communication, Vol.11, (1984), p.155-160.

(80) 落合、和田林、境界要素法による冷間鍛造用、日中冷間鍛造シンポジウム（上海）,(1985),p.33.

(81) Y.Ochiai, R.Wadabayashi, Application of Boundary Element Method to Cold Forging Die Design, Pro. of 2nd ICTP, Stuttgart, August 24, (1987), p.37-42.

(82) 落合、関谷、山本、ＢＥＭによる冷間温間鍛造用金型の軸対称熱弾性解析,第１回境界要素シンポジウム(1984), p.259.

(83) W.Nowacki, Thermoelasticity (2nd ed.),(1986), Pergamon Press.

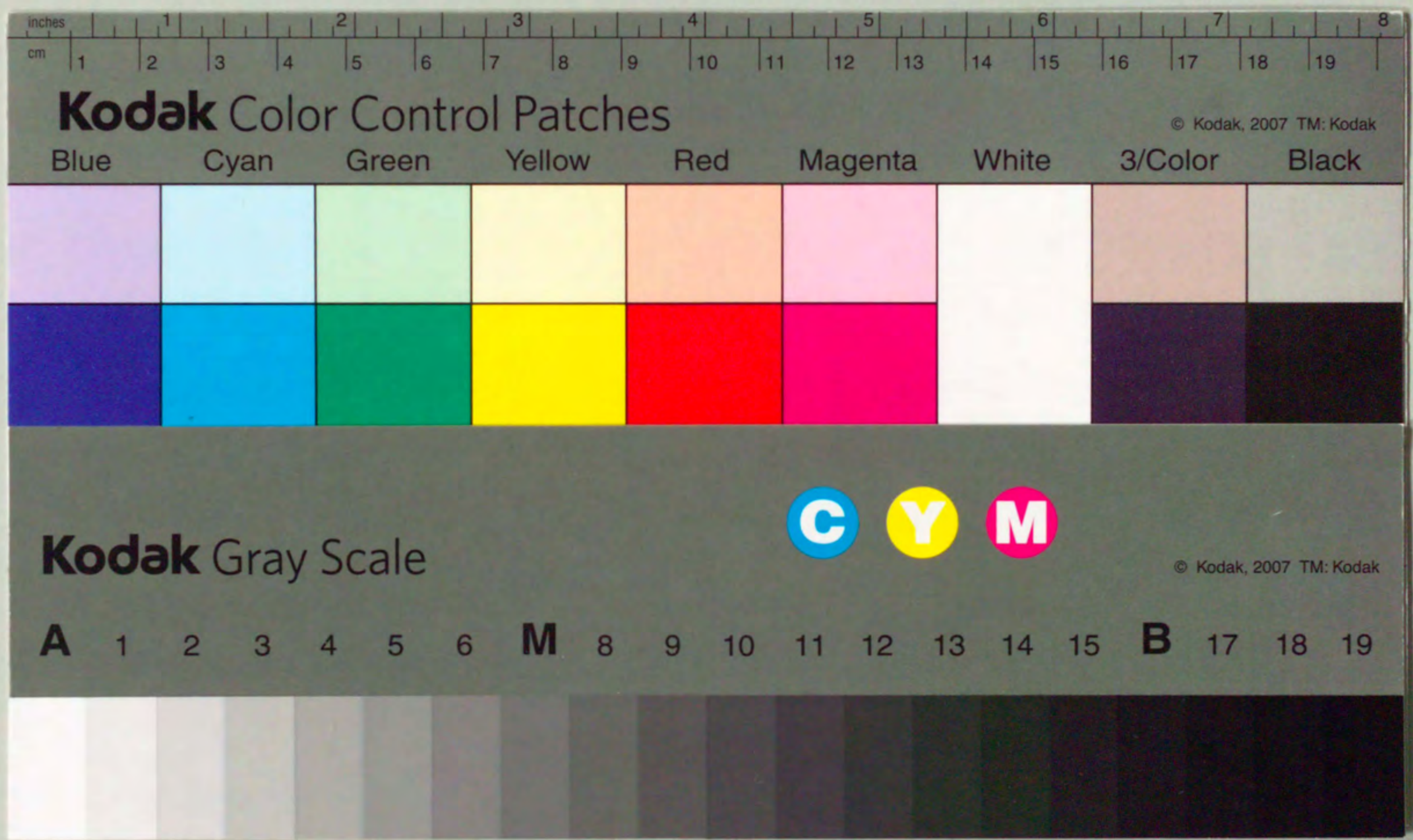
(84) F.J.Rizzo and D.J. Shippy, An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity, Int. Jour. Num. Meth. Eng.,11(1977), p.1753-1768.

(85) 石田、落合、リング状負荷を受ける横等方性弾性体の自由空間グリーン関数（第１報、変位に関するグリーン関数）、日本機械学会論文集Ａ編、Vol.57(1991-2), p.315-321.

(86) 石田、落合、リング状負荷を受ける横等方性弾性体の自由空間グリーン関数（第２報、ひずみおよび応力に関するグリーン関数）、日本機械学会論文集Ａ編、Vol.57,(1991-2), p.322-327.

(87) 石田、落合、横等方性軸対称弾性体の境界要素法定式化、日本機械学会論文

集A編、Vol.57(1991-6), p.1174-1397.
(88) 石田、落合、境界要素法による軸対称熱弾性解析について（間接法による定式化と時間積分に関する考察）、日本機械学会論文集A編、Vol.57(1990-12), p.2479-2485.
(89) 石田、落合、関谷、熱弾性問題の相反定理と境界積分方程式、日本機械学会日立地方講演会論文集,(1991).
(90) 登坂宣好、中山司著、境界要素法の基礎、日科技連，(1987).
(91) M. Mayr, W.Drexler, G.Kuhn, A Semianalytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions, Int. J. Structures, Vol.16, (1980), p.863-871.
(92) R.Ishida and Y.Ochiai, On Free-space Green's Functions of a Transversely Isotropic Elastic Medium Subjected to Torsionless Ring-like Loading, Archive of Applied Mechanics, No.61, (1991), p.222-230.



inches
cm
Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
C Y M
Kodak Gray Scale
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19