

## 非定常熱応力問題における数値解析手法の定式化に関する研究

落合, 芳博

<https://doi.org/10.11501/3088234>

---

出版情報 : 九州大学, 1991, 博士 (工学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

## 第5章 定常問題への応用

本章では非定常問題で行った定式化の手法を、定常問題に応用する。従来、境界要素法において定常熱応力問題はGalerkinテンソルを使用して定式化がなされてきた。本章では熱弾性変位ポテンシャルを用いた定式化を示す。

### 5・1 定常問題における熱弾性変位ポテンシャルの誘導

定常問題における基本解を求める。定常温度問題における基礎式は2次元の場合

$$\nabla^2 T = 0 \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

3次元の場合

$$\nabla^2 T = 0 \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (5.2)$$

軸対称の場合

$$\nabla^2 T = 0 \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (5.3)$$

で与えられる。ソース点 $\xi$ と観測点 $x$ との距離を $r$ とすると、定常問題温度解析に関する基本解は2次元の場合、次式で与えられる<sup>(2)</sup>。

$$T^*_2(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.4)$$

また、3次元の場合

$$T^*_3(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r} \quad (5.5)$$

軸対称の場合

$$T^*(x, \xi) = \frac{4K(m_0)}{\pi(s+2e)^{1/2}} \quad (5.6)$$

で与えられる。ただし、

$$m_0^2 = \frac{4e}{s+2e} \quad (5.7)$$

$$s = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 \quad (5.8)$$

$$e = r r_0 \quad (5.9)$$

である。\$r, r\_0, z, z\_0\$ は非定常の場合と同じ記号を用いるものとする。\$K(\cdot)\$ は第 1 種完全楕円積分である。直接境界要素法における定常温度解析のための積分方程式は次式となる。

$$cT(x) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} T^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial T^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.10)$$

ただし、2次元の場合は線積分、3次元の場合は面積分であり、軸対称の場合は \$d\Gamma(\xi) = r\_0 dS(\xi)\$ とする。ただし、\$c\$ は境界内部では 1、滑らかな境界上では 0.5 である。境界を \$\Gamma\$、一重層ポテンシャルの密度を \$\beta\$ とすると、間接法では温度 \$T\$ および温度勾配 \$q\$ は次式で示すことができる<sup>(2)</sup>。

$$T(x) = \int_{\Gamma} \beta(\xi) T^*(x, \xi) d\Gamma(\xi) \quad (5.11)$$

$$q(x) = -c\beta + \int_{\Gamma} \beta(\xi) q^*(x, \xi) d\Gamma(\xi) \quad (5.12)$$

定常問題における温度と熱弾性変位ポテンシャルの関係は次式で与えられる。

$$\nabla^2 \phi = \mu T \quad (5.13)$$

ここで、3次元、軸対称および平面ひずみの場合 \$\mu = \alpha(1+\nu)/(1-\nu)\$, 平面応力問題の場合 \$\mu = \alpha(1+\nu)\$ である。式(5.4)~(5.10), (5.13)より定常問題の熱弾性変位ポテンシャルは2次元の場合



$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi^*_{\cdot 2} = \mathbb{T}^*_{\cdot 2} \quad (5.14)$$

3次元の場合

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi^*_{\cdot 3} = \mathbb{T}^*_{\cdot 3} \quad (5.15)$$

の式を満足しなければならない。これらの関数は容易に求められ、熱弾性変位ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} \phi^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial \phi^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.16)$$

ただし、2次元の場合

$$\phi^*_{\cdot 2}(x, \xi) = \frac{\mathbb{T}}{8\pi} r^2 \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right] \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \phi^*_{\cdot 2}(x, \xi)}{\partial n} = \frac{\mathbb{T}}{8\pi} r \left[ 2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.18)$$

3次元の場合

$$\phi^*_{\cdot 3}(x, \xi) = \frac{\mathbb{T}r}{8\pi} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \phi^*_{\cdot 3}(x, \xi)}{\partial n} = \frac{\mathbb{T}}{8\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.20)$$

である。軸対称の場合は3次元の熱弾性変位ポテンシャルの式(5.19)を円周方向に積分すればよい。すなわち、2・2節と同じ記号を用いると次式が求められる。

$$\begin{aligned} \phi^*_{\cdot j} &= \int_0^{2\pi} \phi^*_{\cdot 3} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbb{T}r}{8\pi} d\theta \\ &= \frac{\mathbb{T}(s+2e)^{1/2}}{2\pi} E(\mathbb{m}\theta) \end{aligned} \quad (5.21)$$

以上の定常問題における熱弾性変位ポテンシャルを第3章で示した非定常熱弾性



変位ポテンシャルより求めることも可能である。定常熱応力問題は、非定常熱応力問題において温度境界条件が一定で、時間が無限に経過した場合と見なせる。非定常問題の熱弾性変位ポテンシャルは式(3.8)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} [\phi^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \\ - \frac{\partial \phi^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau)] d\Gamma(\xi) d\tau \end{aligned} \quad (5.22)$$

境界の温度条件が一定であれば、長時間経過後は温度および温度勾配は時間に関して一定となる。具体的に表現すると式(5.22)は、次式になる。

$$\begin{aligned} \phi(x) = \int_{\Gamma} [\phi^*(x, \xi) \frac{\partial T(\xi)}{\partial n(\xi)} \\ - \frac{\partial \phi^*(x, \xi)}{\partial n(\xi)} T(\xi)] d\Gamma(\xi) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\phi^*(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \kappa \int_0^t \phi^*(x, t, \xi, \tau) d\tau \quad (5.24)$$

2次元の場合の $\phi^*(x, t, \xi, \tau)$ の時間積分は次式で与えられる。

$$\int_0^t \phi^*(x, t, \xi, \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi} t \{2 \ln(r) - \exp(-a_t) + (1+a_t)E_1(a_t)\} \quad (5.25)$$

ただし、

$$a_t = \frac{r^2}{4\kappa t} \quad (5.26)$$

積分指数関数 $E_1(a_t)$ は次式のように級数で表現できる。

$$E_1(a_t) = -C - \ln(a_t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_t^n}{n \cdot n!} \quad (5.27)$$

時間 $t \rightarrow \infty$ とすると、式(5.24)は次式となる。

$$\phi^*(x, \xi) = \frac{\mu \Gamma^2}{4\pi} \{1 + \ln(D/r)\} \quad (5.28)$$

ただし、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} [C + \ln(4\kappa t)] \quad (5.29)$$

である。温度の場合と同様に式(5.28)を次式のようにおく。

$$\phi^*_2(x, \xi) = \frac{\mu \Gamma^2}{8\pi} \{1 + \ln(1/r)\} \quad (5.30)$$

上式は式(5.17)と一致する。3次元の場合も同様に、定常問題の熱弾性変位ポテンシャルが求められる。非定常問題の $\phi^*(x, t, \xi, \tau)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi^* d\tau &= \frac{t}{r} [-\Gamma(0.5, at) + \Gamma(0.5) + 2at \Gamma(0.5, at) - 2at^{1/2} \exp(-at)] \\ &= \frac{t}{r} [\gamma(0.5, at) + 2at \Gamma(0.5, at) - 2at^{1/2} \exp(-at)] \end{aligned} \quad (5.31)$$

$a_t$ および第1種不完全ガンマ関数は次式で与えられる。

$$a_t = \frac{\Gamma^2}{4\kappa t} \quad (5.32)$$

$$\gamma(z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^{z+n}}{n! (z+n)} \quad (5.33)$$

式(5.31)~(5.33)の関係を用いると次式が求められる。

$$\phi^*(x, \xi) = \frac{\mu \Gamma}{8\pi} \quad (5.34)$$

間接法では熱弾性変位ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \beta(\xi) \phi^*(x, \xi) d\Gamma(\xi) \quad (5.35)$$



## 5・2 2次元定常熱応力問題における基本解

熱弾性変位ポテンシャル $\Phi$ と変位および応力の関係は次式で与えられる。

$$u'_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (5.36)$$

$$\sigma'_{ij} = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij} \right) = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \alpha T \delta_{ij} \right) \quad (5.37)$$

式(5.16)または式(5.23)を式(5.36)に代入すると次式が求められる。

$$u'_i(x) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} u_i^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial u_i^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.38)$$

2次元の場合

$$u_i^*{}_{,2}(x, \xi) = \frac{\alpha}{8\pi} r \left[ 2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right] \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial u_i^*{}_{,2}(x, \xi)}{\partial n} = \frac{\alpha}{8\pi} \left\{ n_i \left[ 2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right] - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (5.40)$$

応力は次式で与えられる。

$$\sigma'_{ij} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} \sigma_{ij}^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial \sigma_{ij}^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.41)$$

$$\sigma_{ij}^*{}_{,2}(x, \xi) = \frac{\alpha G}{4\pi} \left\{ \delta_{ij} \left[ 2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right] - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} \right\} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^*{}_{,2}(x, \xi)}{\partial n} = & \frac{\alpha G}{2\pi} \frac{1}{r} \left\{ - \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) \right. \\ & \left. + [-n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij}] \right\} \quad (5.43) \end{aligned}$$

ここで、熱弾性変位ポテンシャルから求められる変位および応力の境界での不連続量について考察する。変位に関して $u_i^*$ および $\partial u_i^*/\partial n$ は不連続量を持たない。 $\sigma$



$\sigma_{ij}$  に関して不連続量を持たないが  $\partial \sigma_{ij} / \partial n$  に関しては不連続量を考察しておかなければならない。そのために、3・1節と同様に図5.1に示すような局所座標を取る。 $\varepsilon$  は小さいので、 $T(\xi)$  は一定と見なせ、 $\lambda \ll \varepsilon$  を保ちながら、 $\varepsilon$  を小さくしていくと次式の不連続量が求められる。

$$I_a(\sigma_{ij}^L) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Gm}{2\pi} T(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{x_i^L x_j^L}{r^2} \right) + \left[ n_j \frac{x_i^L}{r} + n_i \frac{x_j^L}{r} - 2 \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} \right] \right\} dy^L \quad (5.44)$$

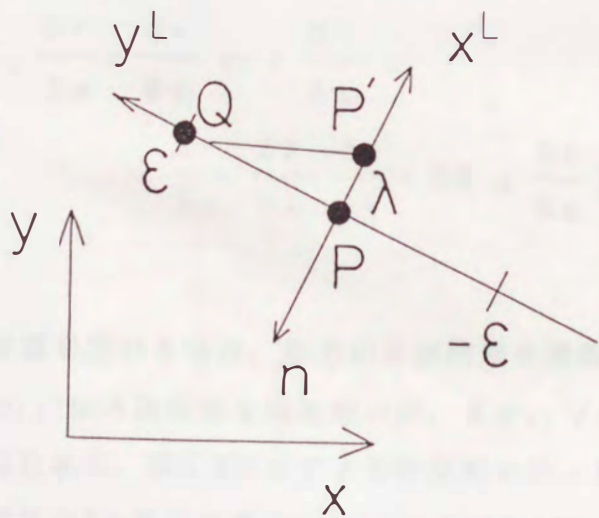


図5.1 特異点処理のための局所座標系

$$I_a(\sigma_{xx}^L)=0, \quad I_a(\sigma_{yy}^L)=-\mu GT(\xi), \quad I_a(\sigma_{xy}^L)=0 \quad (5.45)$$

3次元定常熱応力問題における基本解を求める。2次元の場合と同様に次式により熱弾性変位ポテンシャルによる3次元の場合の変位と応力が求められる。

$$u_i' = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} u_i^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial u_i^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.46)$$

$$\sigma_{ij}' = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} \sigma_{ij}^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial \sigma_{ij}^*(x, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma(\xi) \quad (5.47)$$

ただし、

$$u_i^*(x, \xi) = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\mu}{8\pi r} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial u_i^*(x, \xi)}{\partial n} = \left[ -n_i + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] \frac{\mu}{8\pi r} \quad (5.49)$$

$$\sigma_{ij}^*(x, \xi) = \left[ \delta_{ij} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - 2\delta_{ij} \right] \frac{\mu G}{4\pi r} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{ij}^*(x, \xi)}{\partial n} \\ &= \left[ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right. \\ & \quad \left. - 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} - 2\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \frac{\mu G}{4\pi r^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

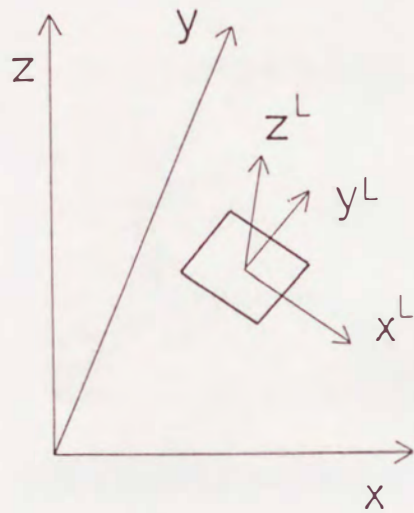
である。

直接法による温度場を用いる場合、応力の不連続量を考察しておかなければならない。すなわち、 $\sigma_{ij}^*$ は不連続量を持たないが、 $\partial \sigma_{ij}^*/\partial n$ は不連続量を持つ。不連続量を考察するために、図5.2に示すように表面に沿った局座標系を導入する。局所座標における特異点Pの近傍の積分 $I_a$ は式(5.51)より次式で与えられる。

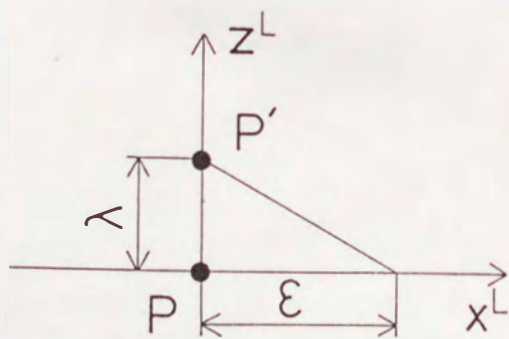


$$I_a(\sigma_{ij}^L) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{mG}{4} T(\xi) \int_0^\varepsilon \left[ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{x_j^L}{r} n_i + \frac{x_i^L}{r} n_j - 3 \frac{x_i^L x_j^L}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - 2 \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r} \right] dx^L \quad (5.52)$$

$\varepsilon$  は十分小さいので、 $T(\xi)$  は一定と見なせる。点  $P'$  を点  $P$  に十分近づけた後、 $\lambda \ll$



(a) 局所座標系



(b) 不連続量の計算のための記号

図5.2 局所座標系と不連続量

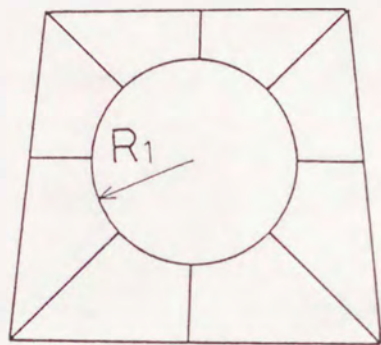


$\varepsilon$ を保ちながら  $\varepsilon$ を0に近づけると次式が得られる。

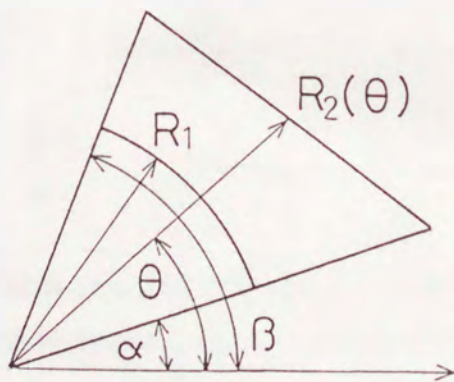
$$\begin{aligned}
 I_a(\sigma_{xx}^L) &= -\frac{mTG}{8}, & I_a(\sigma_{yy}^L) &= -\frac{mTG}{8}, & I_a(\sigma_{zz}^L) &= 0 \\
 I_a(\sigma_{xy}^L) &= 0, & I_a(\sigma_{xz}^L) &= 0, & I_a(\sigma_{yx}^L) &= 0 \\
 I_a(\sigma_{yz}^L) &= 0, & I_a(\sigma_{zx}^L) &= 0, & I_a(\sigma_{zy}^L) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

すなわち、法線方向の応力( $\sigma_{zz}^L$ )の不連続量は、熱弾性変位ポテンシャルに伴う不連続量と温度に伴う不連続量とが打ち消し合い、存在しない。

数値計算を行うために、特異点の問題を解決しておかなくてはならない。本手法



(a) 特異点処理のための要素の分割



(b) 3角形極座標系

図5.3 特異点処理

では、間接法による温度場を用いる場合より、直接法の温度場を用いる場合に、強い特異性が存在する。そこで、直接法の温度場を用いる場合における特異点処理の方法を示す。図5.3の不連続量の評価に用いた境界表面に沿った局座標系を用いて計算し、座標変換する方法をとる。要素は一定要素とし、図5.3(a)に示すように、要素を円の部分とその周辺部分に分割する。特異性の特に強い円の部分は、解析的に処理が行え、以下のようなになる。

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} u_i^* r d\theta dr = 0. \quad (5.54)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} r d\theta dr = 0. \quad (i=x^L) \quad (5.55)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} r d\theta dr = 0. \quad (i=y^L) \quad (5.56)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} r d\theta dr = \frac{\blacksquare R_1}{4} \quad (i=z^L) \quad (5.57)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}^* r d\theta dr = 0. \quad (i \neq j) \quad (5.58)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}^* r d\theta dr = \frac{\blacksquare R_1}{4} \quad (i=j=x^L) \quad (5.59)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}^* r d\theta dr = \frac{\blacksquare R_1}{4} \quad (i=j=y^L) \quad (5.60)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}^* r d\theta dr = \frac{\blacksquare R_1}{2} \quad (i=j=z^L) \quad (5.61)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} r d\theta dr = 0. \quad (5.62)$$

図5.3(a)の周辺部分は、図5.3(b)のように境界要素法で塑性解析を行う場合によく用いられる三角形極座標系を用いて半解析的に処理できる<sup>(2)</sup>。例えば、特異性の強い  $\partial \sigma_{ij}^* / \partial n$  の項は次式のように置くことができる。



$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} = \frac{1}{r^2} \phi_{ij} \quad (5.63)$$

ただし、 $\phi_{ij}$ は $\theta$ の関数であり、 $r$ に無関係である。面積分は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{r^2} \phi_{ij} dA &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{R_1}^{R_2(\theta)} \frac{1}{r} \phi_{ij} dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi_{ij} \ln\{R_2(\theta)\} d\theta - \ln(R_1) \int_{\alpha}^{\beta} \phi_{ij} d\theta \end{aligned} \quad (5.64)$$

上式における角度 $\theta$ に関する積分はガウス積分を用いる。なお、他の項も同様に半解析的に処理することができる。



軸対称定常熱応力問題における基本解を求める。2次元の場合と同様に次式で軸対称問題における熱弾性変位ポテンシャルによる変位が求められる。

$$u_i^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \int_S \left[ \frac{\partial T(\xi)}{\partial n} u_i^*(x, \xi) - T(\xi) \frac{\partial u_i^*(x, \xi)}{\partial n} \right] r_0 dS(\xi) \quad (5.65)$$

ただし、

$$u_r^* = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ -\frac{4C_5 r_0}{\mu_0^2 C_1^3} K(\mu_0) + \frac{4r_0}{\mu_0^2 C_1} E(\mu_0) \right\} \quad (5.66)$$

$$u_z^* = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{2(z-z_0)}{C_1} \right] K(\mu_0) \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^*}{\partial n} = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \left\{ \frac{4(r^2+r_0^2)}{\mu_0^2 C_1^3} K(\mu_0) + \left( \frac{4C_3(z-z_0)^2}{\mu_0^2 C_1^3 C_2} - \frac{4}{\mu_0^2 C_1} \right) E(\mu_0) \right\} n_r \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{4r_0(z-z_0)}{\mu_0^2 C_1^3} K(\mu_0) + \frac{4r_0 C_5(z-z_0)}{\mu_0^2 C_1^3 C_2} E(\mu_0) \right\} n_z \right] \quad (5.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z^*}{\partial n} = & \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{(z-z_0)}{r_0 C_1} K(\mu_0) - \frac{C_4(z-z_0)}{r_0 C_1 C_2} E(\mu_0) \right\} n_r \\ & + \left\{ \frac{2}{C_1} K(\mu_0) - \frac{2(z-z_0)^2}{C_1 C_2} E(\mu_0) \right\} n_z \quad (5.69) \end{aligned}$$

である。式(5.65)~(5.69)における $C_1$ および $\mu_0$ は $C_1 = \{(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}$ ,  $C_2 = (r-r_0)^2 + (z-z_0)^2$ ,  $C_3 = r_0^2 + r^2 + (z-z_0)^2$ ,  $C_4 = r^2 - r_0^2 + (z-z_0)^2$ ,  $C_5 = r_0^2 - r^2 + (z-z_0)^2$ ,  $\mu_0^2 = 4 r r_0 [(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-1}$ である。

### 5・3 定常問題の定式化

第4章の4・1～3節に示した方法は、非定常の場合だけでなく、定常問題においても適用可能な方法である。4・2節の表現を用いて定常熱応力の場合の境界積分方程式および内部応力の式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 cu_i(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(Q) d\Gamma(Q) \\
 &+ \int_{\Gamma} \left[ u_i^*(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n(Q)} - \frac{\partial u_i^*(P, Q)}{\partial n(Q)} T(Q) \right] d\Gamma(Q)
 \end{aligned}
 \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(P) &= - \int_{\Gamma} S_{kij}(Q, P) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{kij}(Q, P) p_k(Q) d\Gamma(Q) \\
 &+ \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij}^*(P, Q) \frac{\partial T(Q)}{\partial n(Q)} - \frac{\partial \sigma_{ij}^*(P, Q)}{\partial n(Q)} T(Q) \right] d\Gamma(Q)
 \end{aligned}
 \tag{5.71}$$

境界積分方程式は3次元および軸対称の定常熱応力の場合、2・4節で示した Galerkin テンソルを用いた方法と本論文の熱弾性変位ポテンシャルを用いた方法とまったく同じ形式に表現することが可能である。しかし、2次元の場合において Galerkin テンソルを用いた式では、静弾性の解析に使用した Kelvin 解ではなく、Galerkin テンソルから導かれる解を使用しなければならない。内部応力の式の表示は異なるが、3次元および軸対称問題においては本質的には同じものである。2次元の場合は基本解が定数項だけ異なる。この相違は計算結果にほとんど影響を与えない。



## 第6章 工学問題への適用例

本章では、第3章から第5章にかけて示した理論を用いて、工学上重要な熱応力問題の数値解析例を示す。本論文の主旨は従来のセルを設定していた数値解析手法を、境界要素分割のみで数値解析することであり、まず、厳密解との比較を行う。また、厳密解を求めることが困難であり、数値解析でしか解析ができない問題に適用し、本解析法の有効性を示す。なお、深い切り欠きのある問題やクラック問題における高精度化に関する研究は今後の課題である。また、計算機環境の関係で計算機容量が少なくても計算可能で、しかも計算時間をあまり必要としない計算例が中心になっている。本論文では述べないが著者らは境界積分方程式により、比較的複雑な計算例として冷間鍛造用金型の応力解析を行っている<sup>(76-82)</sup>。

### 6・1 非定常2次元問題における計算例

本解法による解の精度を確かめるために、両端を拘束した内径20mm、外径50mmの円筒を初期温度0℃から突然外側表面を100℃に加熱した場合の熱応力を求めた。図6.1(a)に要素分割を、図6.1(b)に熱応力分布を示す。条件は、温度伝導率 $16 \text{ mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率210GPa、ポアソン比0.3、線膨張率 $11 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ とし、時間分割数は5とした。図6.1(b)の実線は厳密解であり、時間 $t=0.1, 1.0, 5.0 \text{ sec}$ の時に対し比較を行った。同図より、このように経過時間に関係なく精度よく解が求められることが分かる。

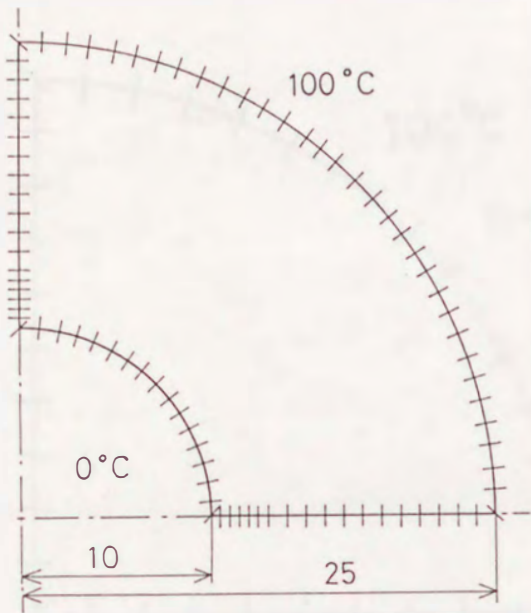
次に熱伝達率を考慮した場合の解の精度を確かめる。図6.2(a)に示すように円柱が、初期温度0℃から突然表面を100℃に加熱された場合の熱応力を求めた。相対熱伝達率は $0.01 \text{ mm}^{-1}$ とし、対称性より4分の1の領域で計算を行う。条件は、温度伝導率 $16 \text{ mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率206GPa、ポアソン比0.3、線膨張率 $11 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ とした。図6.2(b)は平面ひずみ状態として計算を行った場合の熱応力分布を示し、図中の実線は厳密解である。同図より、熱伝達率を考慮した場合においても精度よく解が求められることが分かる。

四角柱に四角孔があいた物体の解析例は既に示されているが<sup>(72)</sup>、内側隅部の

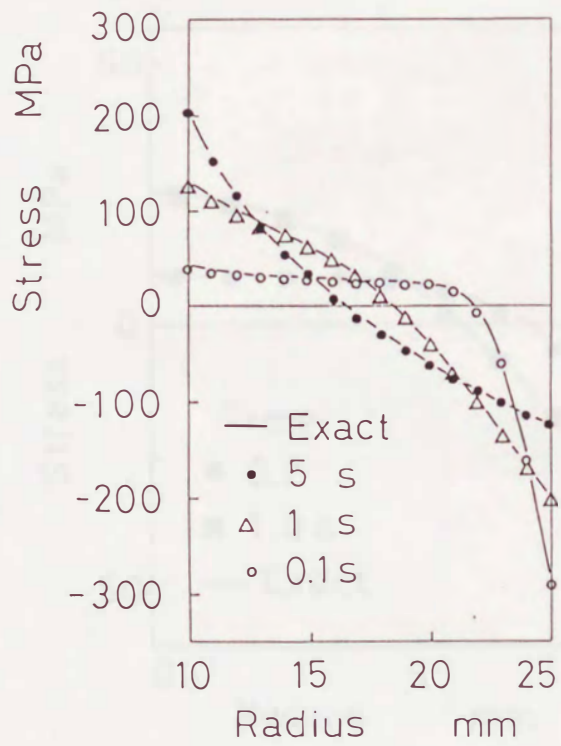


半径を考慮した厳密解は示されていない。そこで図6.3(a)に示すように、外周の1辺が50mm、内周の1辺が20mmであり、内側隅部の半径が3mmの正四角柱が初期温度0℃から突然内側表面が100℃に加熱された場合の熱応力を求めた。外周温度は0℃に保たれているものとする。図6.3(b)は平面ひずみ状態として計算を行った場合の内側表面の熱応力分布を示す。

図6.4は長方形孔をもつ円柱の内側表面が、100℃に突然加熱された場合の熱応力を計算するための要素分割を示す。外側温度は0℃に保たれているものとする。円柱の外径は50mm、長方形孔は20×10mmとし、隅部の半径は3mmとした。条件は、図6.1と同じく、温度伝導率 $16\text{mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率210GPa、ポアソン比0.3、線膨張率 $11\times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ とし、時間分割数は5とした。図6.5(a),(b)はそれぞれ時間 $t=2.0, 5.0\text{sec}$ における変形量を示す。図6.6には時間 $t=5.0, 1.0, 0.1\text{sec}$ における内側表面熱応力分布を示す。図6.7(a)に示す $\theta=45^\circ$ の線上の内部応力(45°の線に対する垂直応力)を図6.7(b)に示す。静弾性解析の場合と同様に表面近傍で解は乱れるが、表面応力は差分で容易に求められるので、実用上は問題はないと思われる。



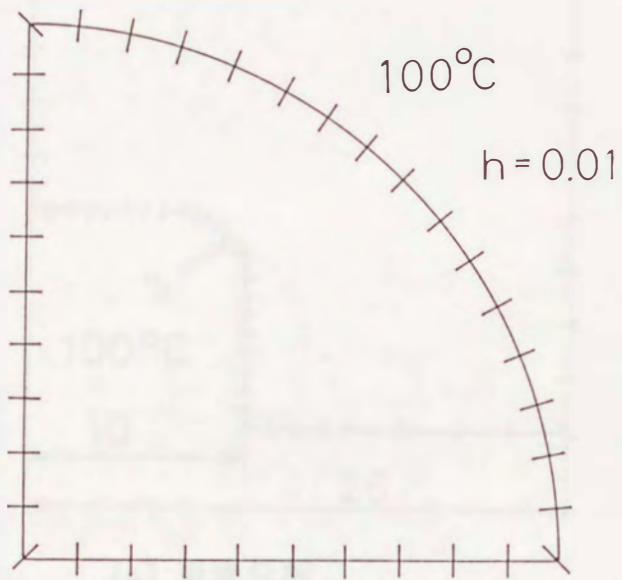
(a) 要素分割



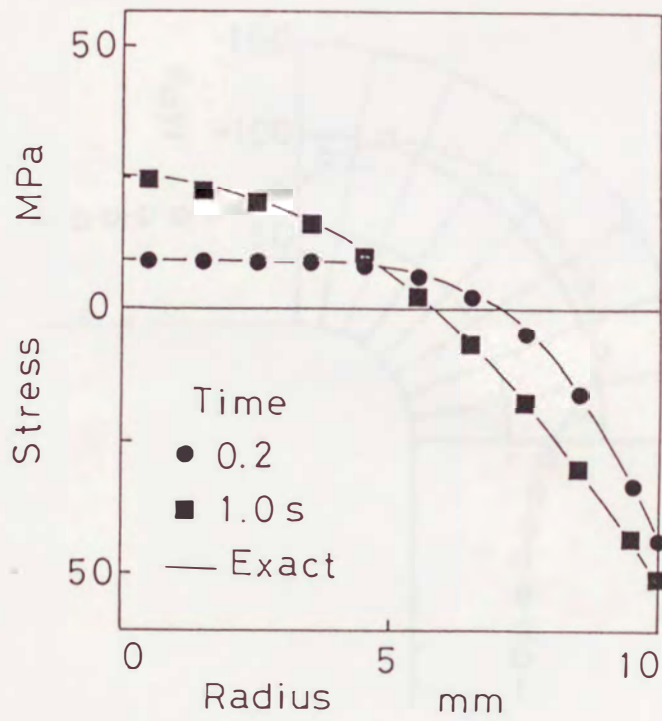
(b) 円周方向応力

図6.1 厳密解との比較



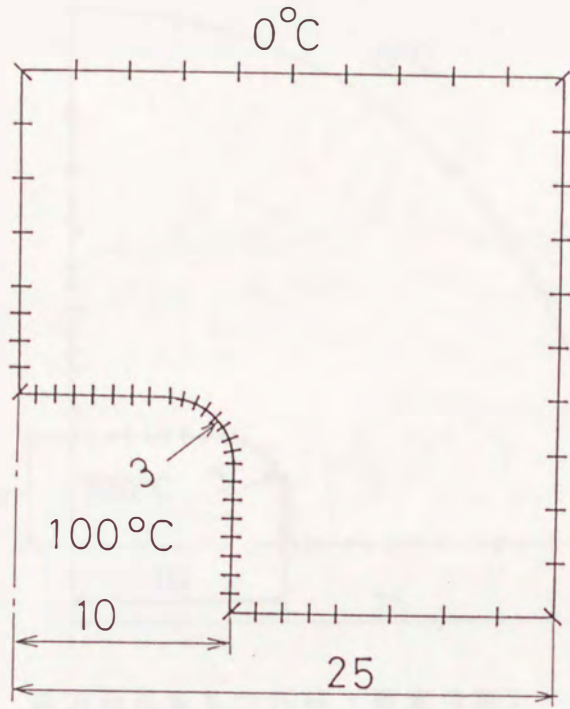


(a) 要素分割

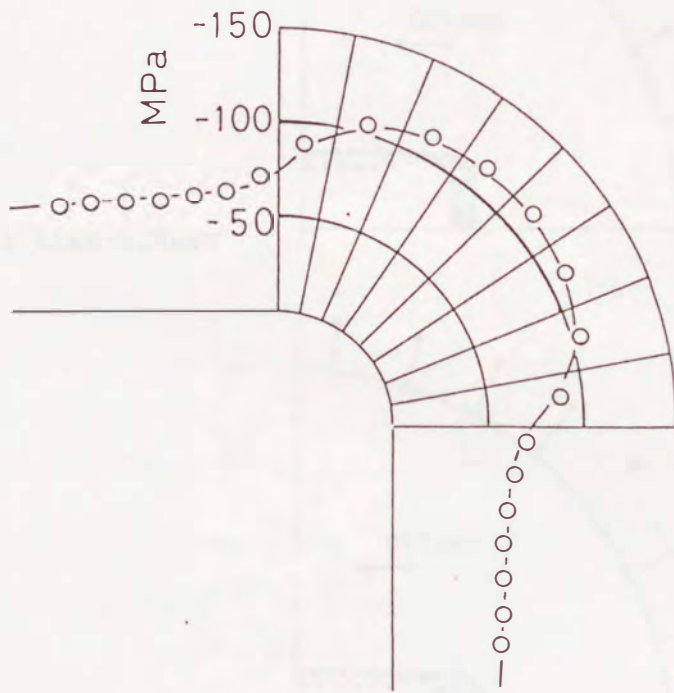


(b) 円周方向応力

図6.2 熱伝達率を考慮した場合の厳密解との比較



(a) 要素分割



(b) 内側の表面応力分布

図6.3 正方形孔を有する正四角柱



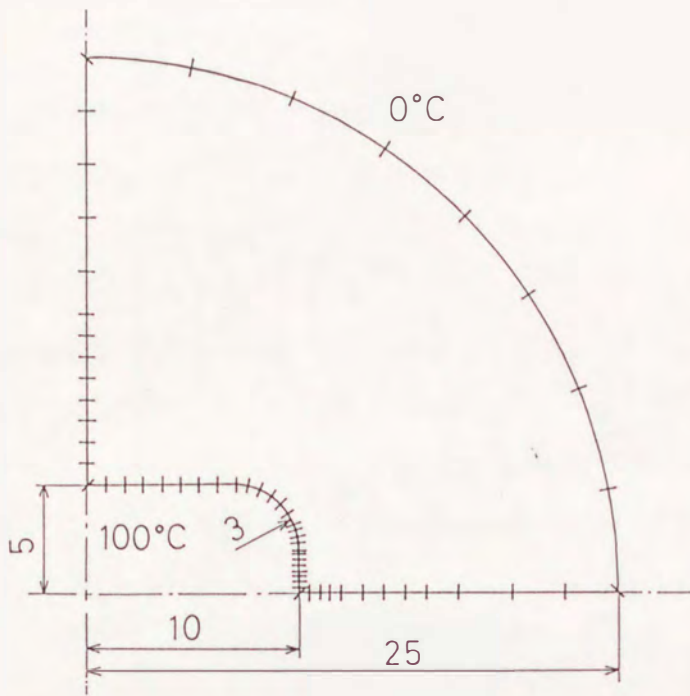


図6.4 長方形孔をもつ円柱（要素分割）

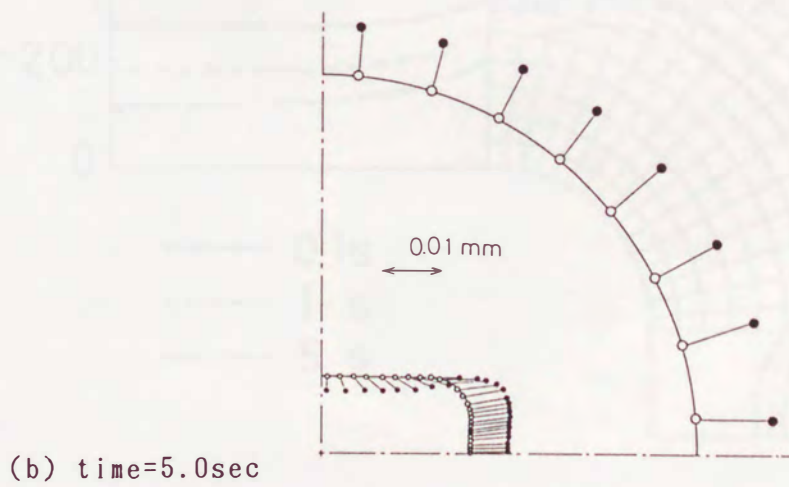
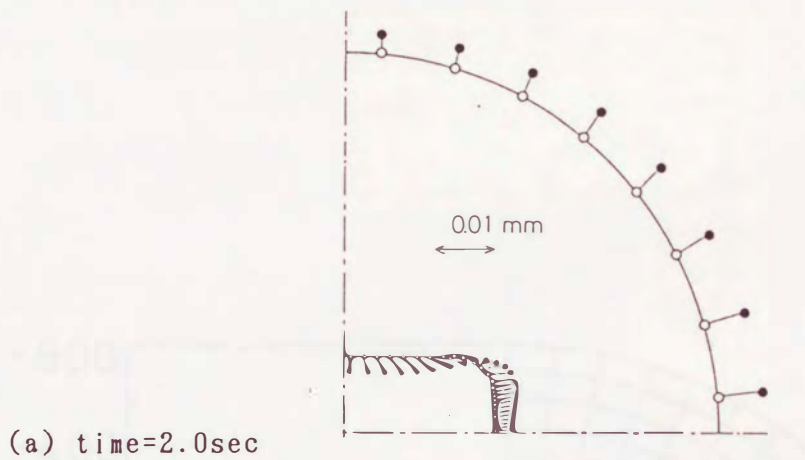


図6.5 長方形孔をもつ円柱の変形状態

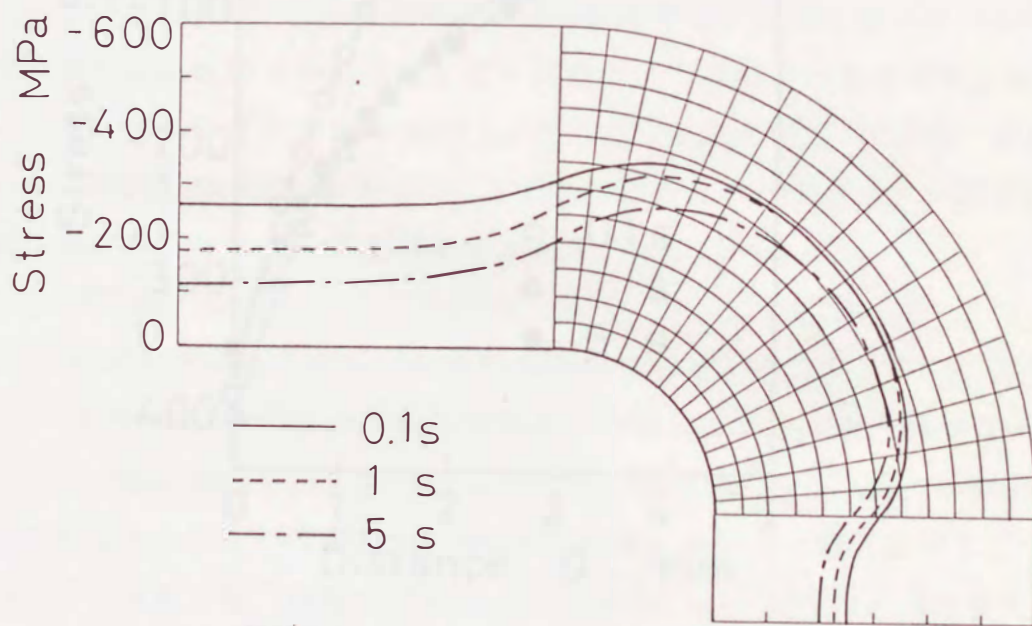
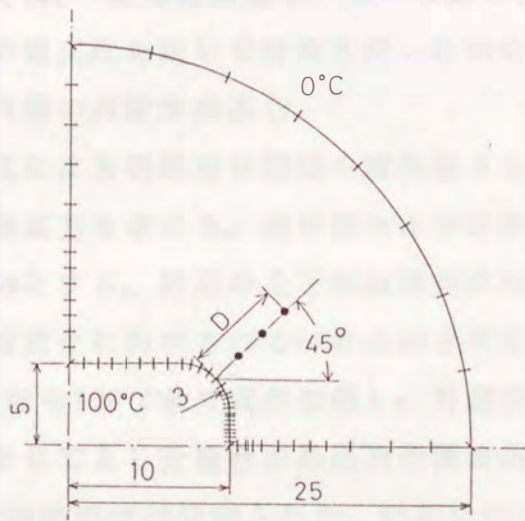
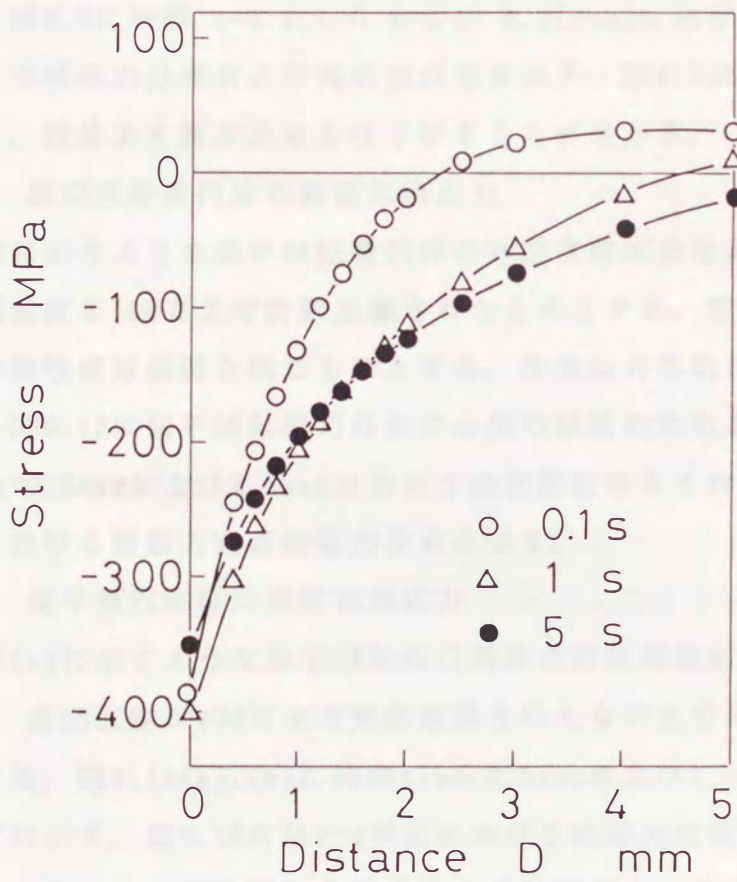


図6.6 長方形孔をもつ円柱の内側表面応力





(a) 応力を計算した内点の位置



(b) 内点応力

図6.7 長方形孔をもつ円柱の内点応力

## 6・2 非定常軸対称問題における計算例

本節の計算例では、軸対称問題を、3・3節の定式化を用いて計算した例と3・2節の3次元の定式化を用いて計算を行った例を示す。

### 6.2.1. 中空円筒の非定常熱応力

軸対称の定式化による具体的な問題の解析例として、まず図6.8に示すような中空円筒の非定常熱応力を求める。内半径および外半径をそれぞれ10mm, 20mmとし、円筒の長さを10mmとする。円筒の上下面は熱的には断熱されており、力学的には上下方向の変位は完全に拘束されているものとする。加熱条件としては、初期温度0°Cから内側表面を100°Cまで突然加熱し、外側表面の相対熱伝達率を $0.1\text{mm}^{-1}$ 、外側の外気温度を0°Cとした場合の熱応力の過渡的变化を求めた。要素分割は図6.8に示すように軸平面で22分割とした。計算に用いた各物性値は表6.1の材料2のものである。なお、境界要素は一定要素を用い、時間分割数は4として計算を行った。図6.9に時間  $t=0.2, 1.0$  および  $5.0[\text{sec}]$ における温度分布を示す。また、図6.10に半径応力分布および周応力分布を示す。図6.9および図6.10の実線は厳密解であり、精度よく解が求められていることが分かる。

### 6.2.2 偏平回転楕円体の非定常熱応力

図6.11に示すような偏平回転楕円体の非定常熱応力を求めた。初期温度を0°Cとし、表面温度を100°Cまで突然加熱されたものとする。温度伝達率を $16\text{mm}^2/\text{sec}$ とし、他の物性値は前例と同じものとする。表面は力学的に拘束されていないものとする。図6.12に偏平回転楕円体の中心部の温度の変化を示す。図6.13(a), (b)に時間  $\text{time}=0.5\text{sec}$  および  $2.5\text{sec}$ における表面変位量をそれぞれ示す。図6.14には  $r-z$ 平面における接線方向表面応力分布を示す。

### 6.2.3 偏平楕円環体の非定常熱応力

図6.15(a)に示すような偏平回転楕円環体の非定常熱応力を求めた。初期温度を0°Cとし、表面温度が100°Cまで突然加熱されたものとする。物性値は前例と同じものとする。図6.15(a), (b)に時間  $\text{time}=0.5\text{sec}$  および  $2.0\text{sec}$ における表面変位量をそれぞれ示す。図6.16には  $r-z$ 平面における接線方向表面応力分布を示す。次に、図6.17に示すような偏平回転楕円環体の非定常熱応力を求めた。初期温度を0°Cとし、表面全体に相対熱伝達率 $0.1\text{mm}^{-1}$ が与えられている。図6.17に示すように表面の一部が50°Cまで突然加熱されたものとする。他の部分は0°Cであり、相対熱伝達



率 $0.1\text{mm}^{-1}$ の条件で放熱している。物性値は温度伝達率 $94.44\text{mm}^2/\text{sec}$ , ヤング率 $25.94\text{GPa}$ , ポアソン比 $0.33$ , 線膨張率 $2.3 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ とした。図6.18に偏平回転楕円環体の表面温度を示す。図6.19(a), (b)に $\text{Time}=0.5\text{sec}$ および $2.5\text{sec}$ における表面変位量をそれぞれ示す。図6.20には $r$ - $z$ 平面における接線方向表面応力分布を示す。

#### 6.2.4 中空円筒 (3次元問題として)

本論文の3次元非定常熱応力問題における解の精度を確かめるために、図6.21に示すように両端を上下方向に拘束した内半径 $10\text{mm}$ 、外半径 $20\text{mm}$ の円筒を初期温度 $0^\circ\text{C}$ から内側表面を $100^\circ\text{C}$ まで突然加熱した場合の熱応力を求めた。本計算例では3次元問題として計算している。まず、熱伝達率を $\infty$ とし、外側表面温度は $0^\circ\text{C}$ 、上下端面は断熱状態として計算した。要素分割は図6.21に示すように軸平面で20分割、円周方向に29分割とした。図6.22(a), (b)に時間 $t=0.2, 1.0\text{sec}$ における熱応力分布を示す。条件は、温度伝導率 $7\text{mm}^2/\text{s}$ , ヤング率 $210\text{GPa}$ , ポアソン比 $0.3$ , 線膨張率 $11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ とし、時間分割数は4, 要素は一定要素を用いた。図6.22の実線は厳密解であり、精度よく解が求められることが分かる。

次に円筒内外表面の熱伝達率を有限とした場合を考える。図6.23に相対熱伝達率を $0.01\text{mm}^{-1}$ とした場合の円周方向熱応力の時間に関する変化を示す。他の条件は図6.22の場合と同じとした。図6.23の実線は厳密解であり、時間に対する変化も厳密解とよく一致する。

計算例とした解析解が求め難い、短円筒の端面が加熱された場合の熱応力を求めた。図6.24に示すように、内外側面が断熱された長さ $20\text{mm}$ の短円筒が初期温度 $0^\circ\text{C}$ から両端面を突然 $100^\circ\text{C}$ に加熱された場合について計算した。短円筒は全周拘束されていないものとし、他の条件は図6.22の場合と同じとした。図6.25にそれぞれの高さに対する時間 $t=5\text{sec}$ における円周方向の熱応力分布を示す。

#### 6.2.5 球形空間を有する無限体 (3次元問題として)

図6.26に示すように半径 $10\text{mm}$ の球形空間を有する無限体の非定常熱応力を求めた。初期温度 $0^\circ\text{C}$ の状態から内側表面が $100^\circ\text{C}$ に突然加熱されたものとする。要素分割は図6.26に示すように軸平面で20分割、円周方向に29分割とした。図6.27および図6.28に時間 $\text{time}=1.0, 10., 100\text{sec}$ における温度分布および熱変位量分布をそれぞれ示す。条件は、温度伝導率 $16\text{mm}^2/\text{s}$ , ヤング率 $210\text{GPa}$ , ポアソン比 $0.3$ , 線膨張率 $11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ とし、時間分割数は4, 要素は一定要素を用いた。図6.29

(a), (b)には半径方向および円周方向の熱応力分布を示す。図6.29の実線は厳密解であり、精度よく解が求められることが分かる。

### 6.2.6 円環体（3次元問題として）

次に円環体の熱応力を求めた。円環の太さは10mm, 中心から円環の中心までの距離を15mmとし、図6.30のように要素分割を行う。物性値は6.2.5の計算例と同じものとし、初期状態 0℃から表面温度を100℃に急速に加熱されたものとする。図6.31(a), (b)はそれぞれ時間0.5s, 2.0sにおける変位量を示す。図6.32は円環体のx-y平面における接線方向表面熱応力の時間に関する変化を示す。

表6.1 材料の物性値

	材料 1	材料 2
ヤング率      GPa	210	210
ポアソン比	0.3	0.3
熱膨張係数      K <sup>-1</sup>	11×10 <sup>-6</sup>	11×10 <sup>-6</sup>
温度伝導率      mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	16	7



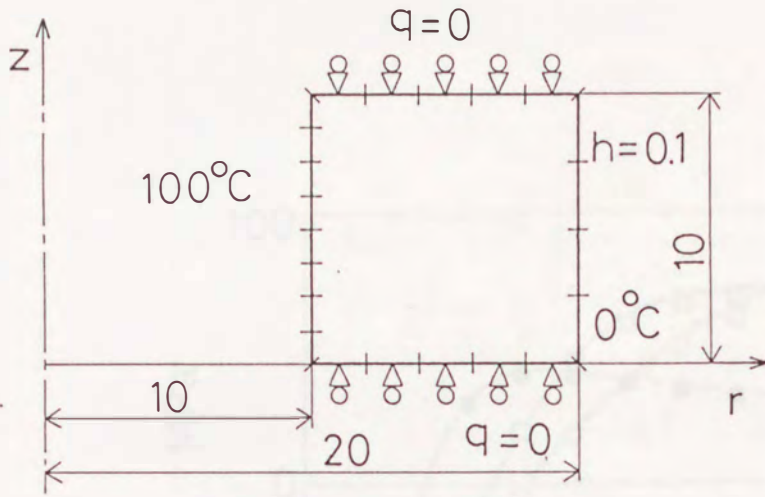


図6.8 形状および軸平面上での要素分割

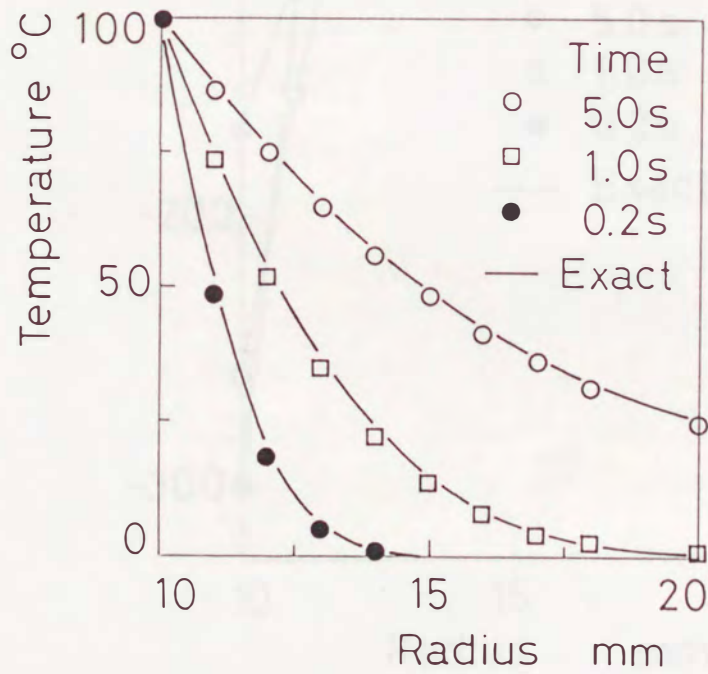


図6.9 中空円筒の温度分布

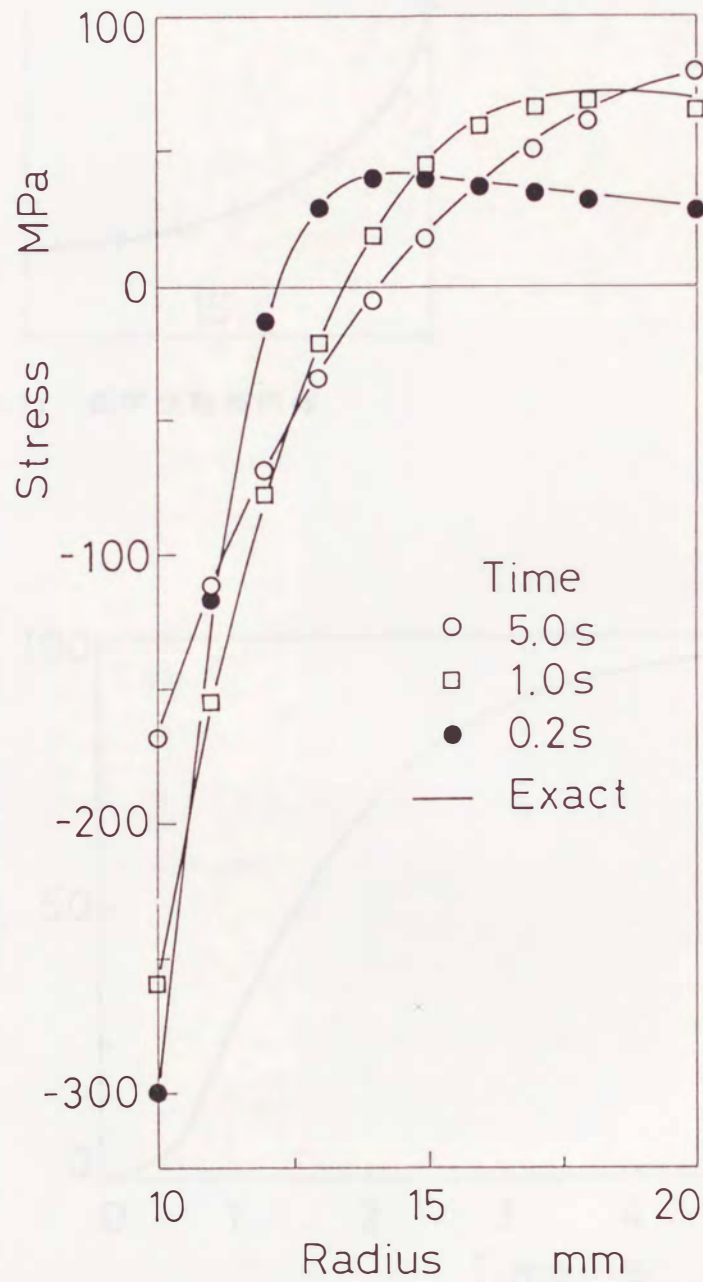


図6.10 熱応力の厳密解との比較



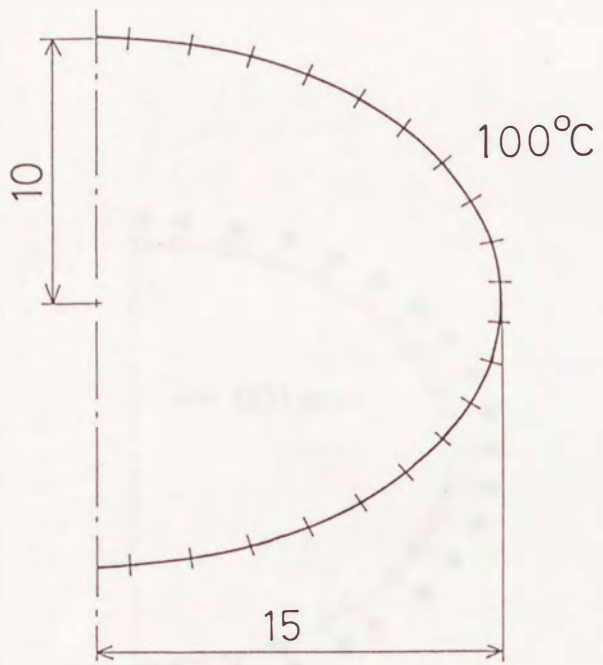


図6.11 偏平回転楕円体

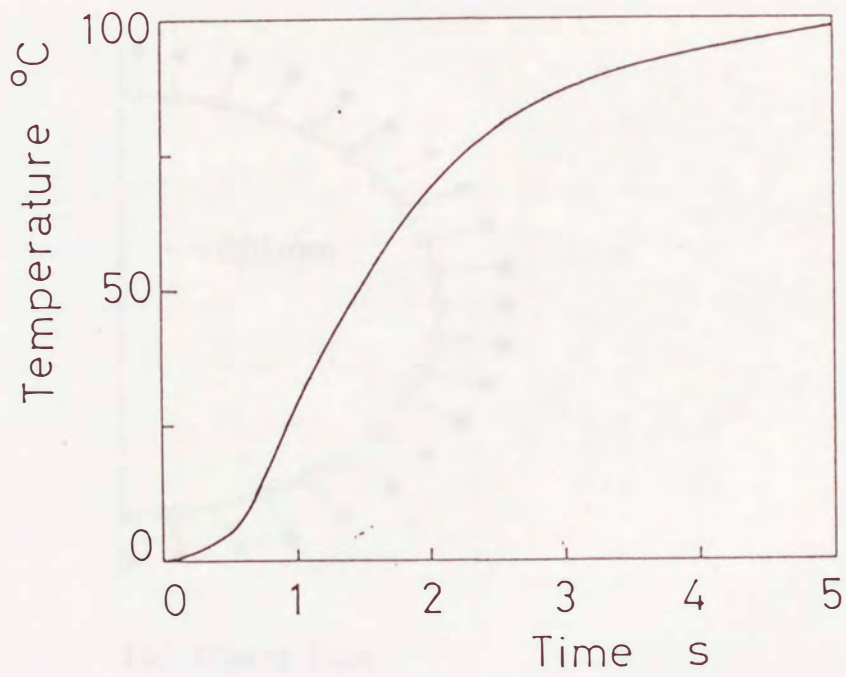
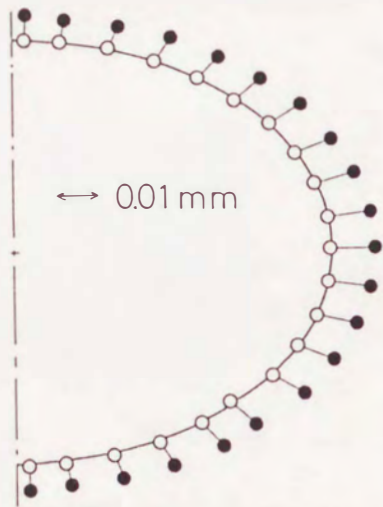
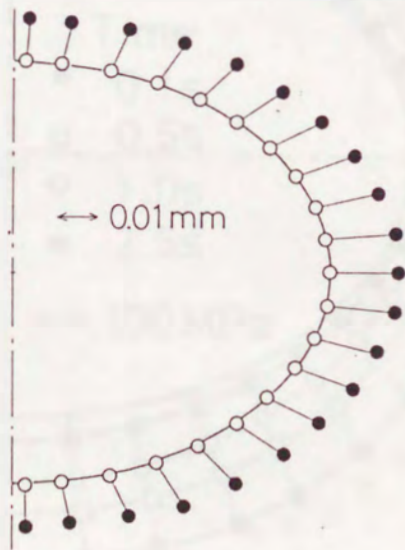


図6.12 中心部の温度の変化



(a) time=0.5sec



(b) time=2.5sec

図6.13 偏平回転楕円体の表面の変位



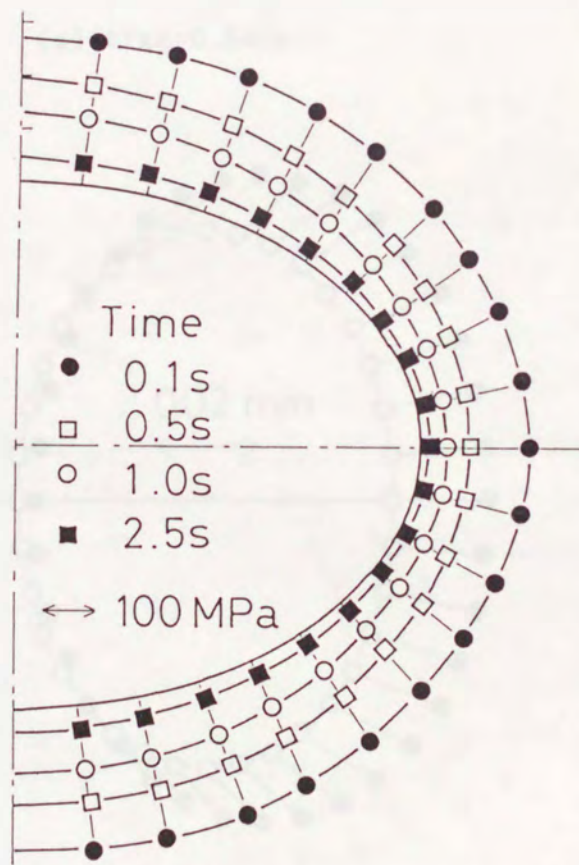
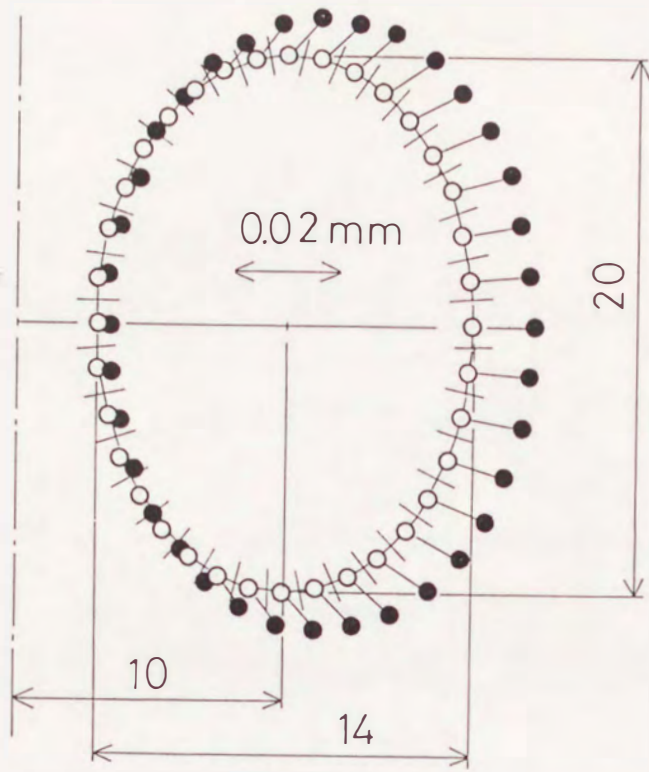
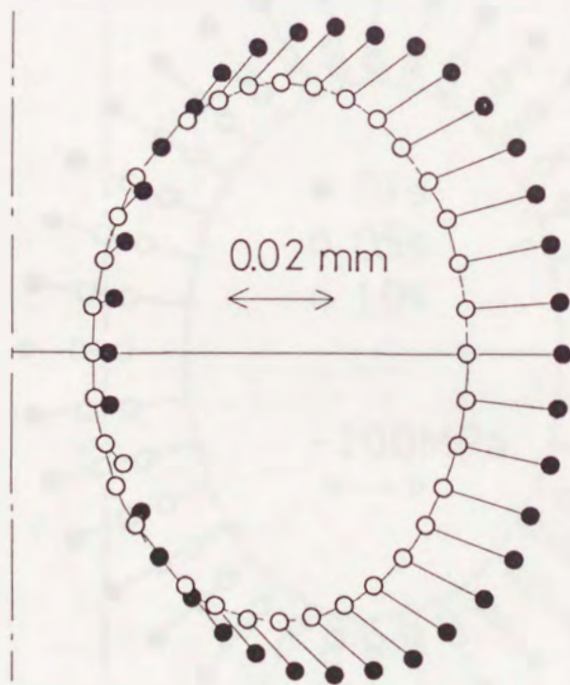


図6.14 扁平回転楕円体の接線方向表面応力分布



(a) time=0.5sec



(b) time=2.0sec

図6.15 偏平回転楕円環体の表面変位



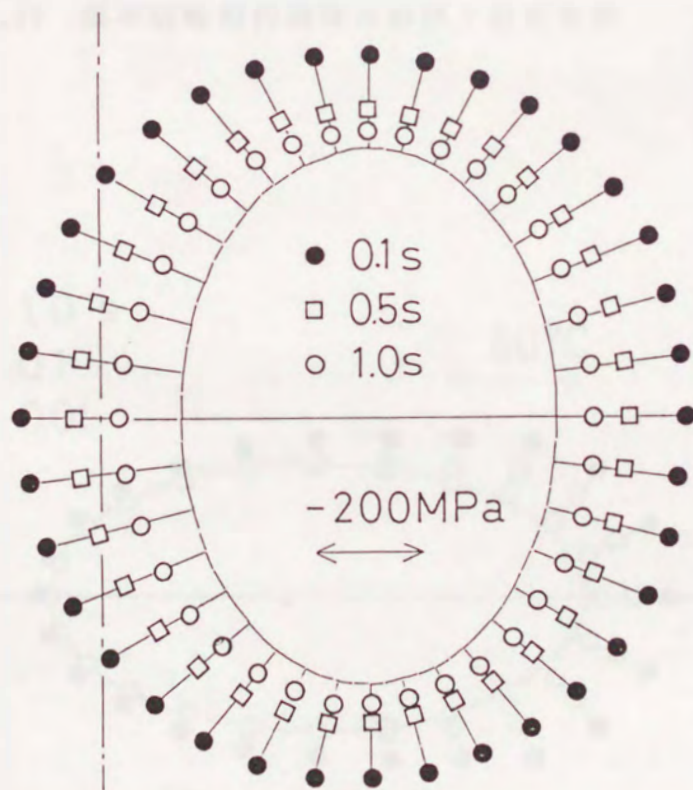


図6.16 扁平回転楕円環体の接線方向表面応力分布

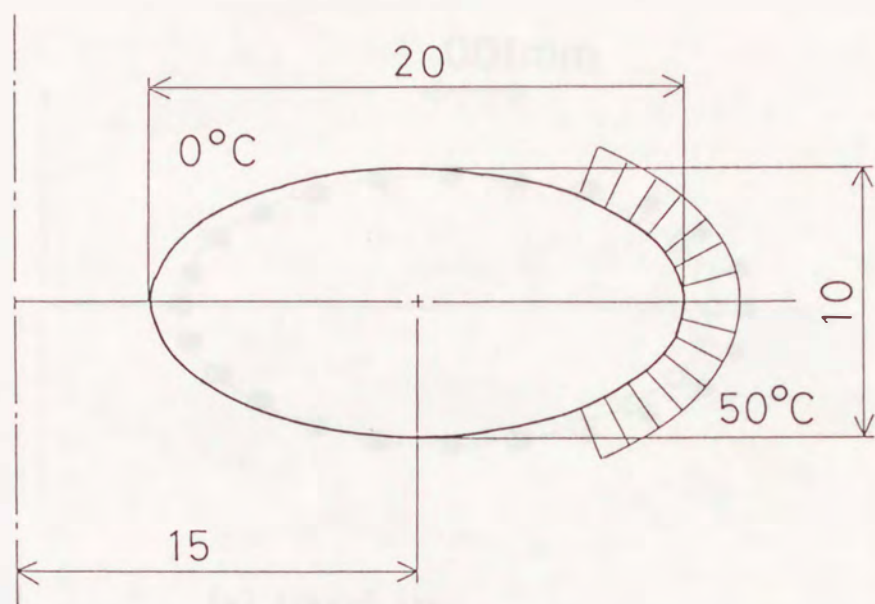


図6.17 偏平回転楕円環体の形状と温度条件

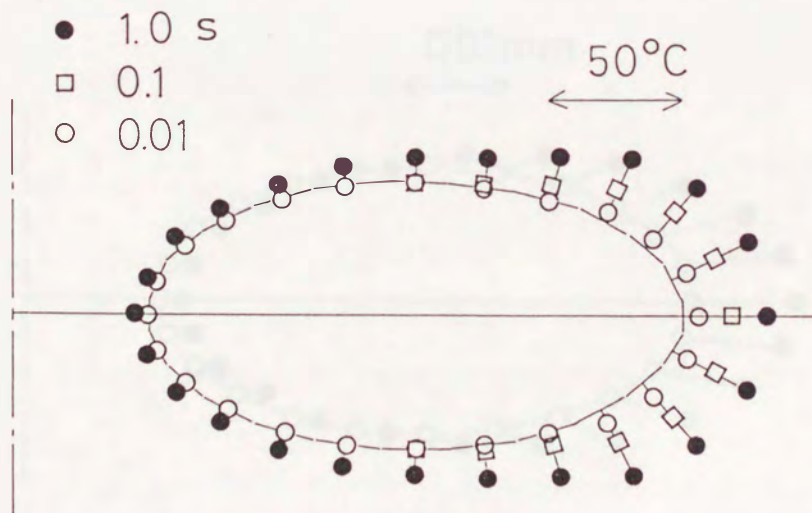
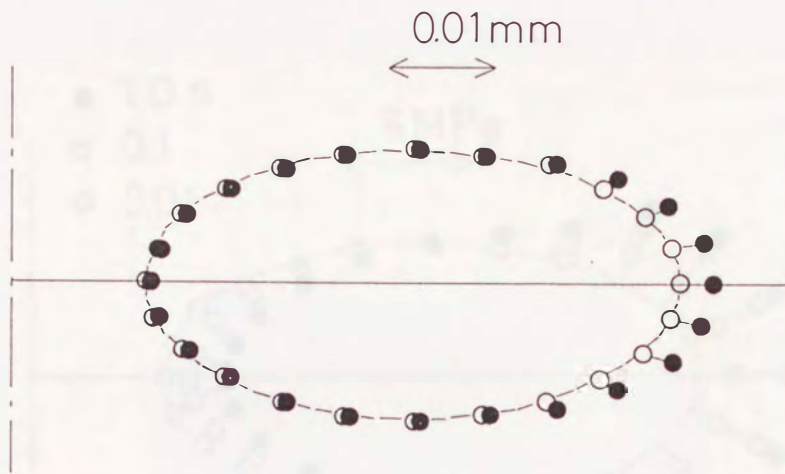
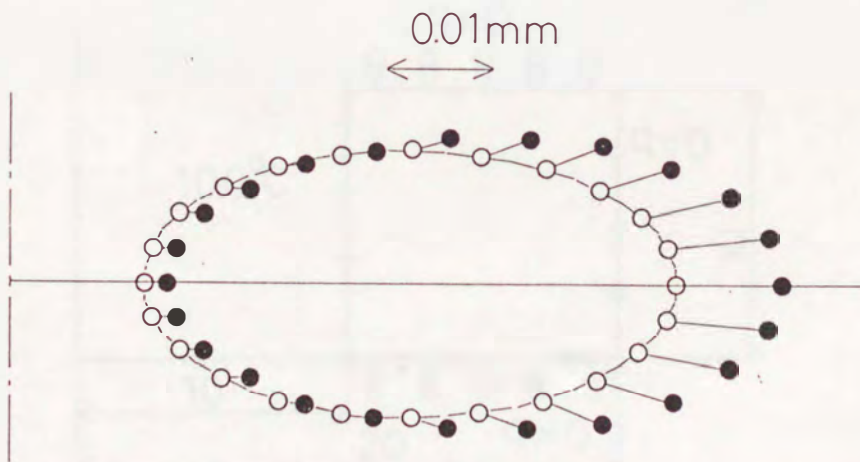


図6.18 偏平回転楕円環体の表面温度分布





(a) time=0.1sec



(b) time=1.0sec

図6.19 部分加熱を受ける偏平回転楕円環体の表面変位

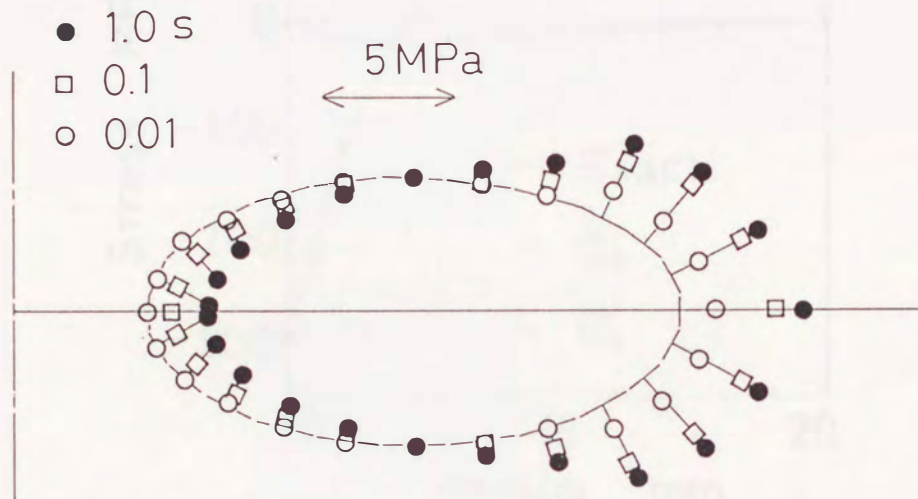


図6.20 部分加熱を受ける扁平回転楕円環体の接線方向表面応力分布

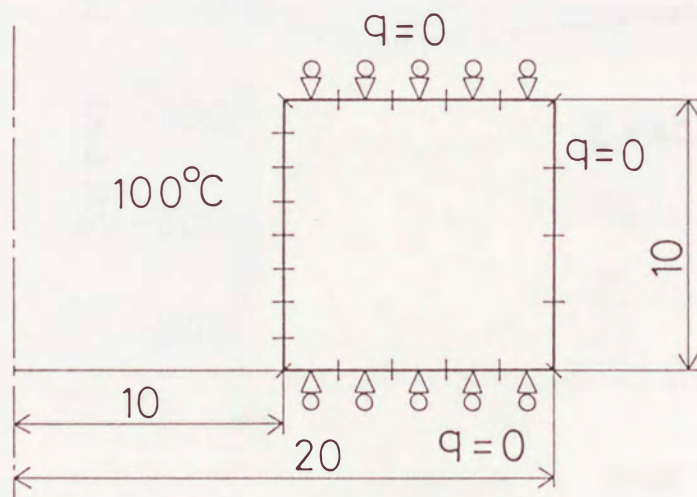
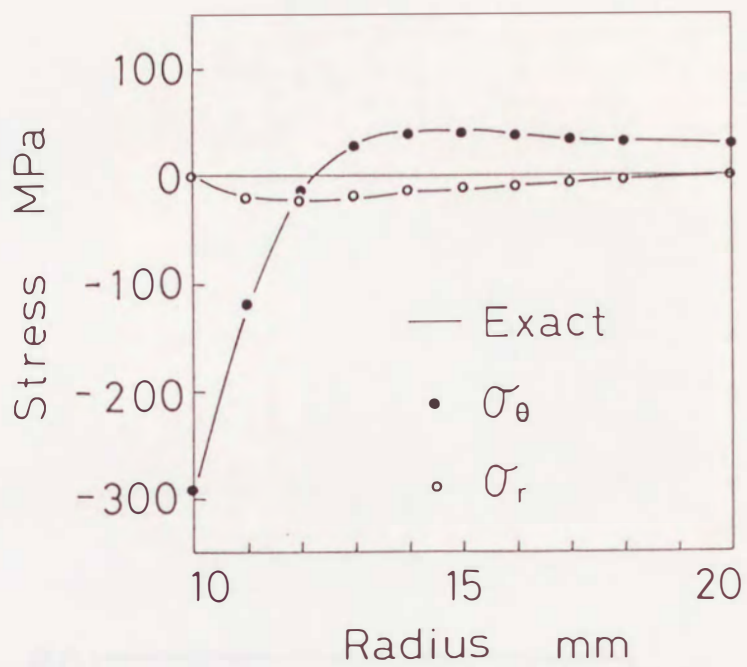
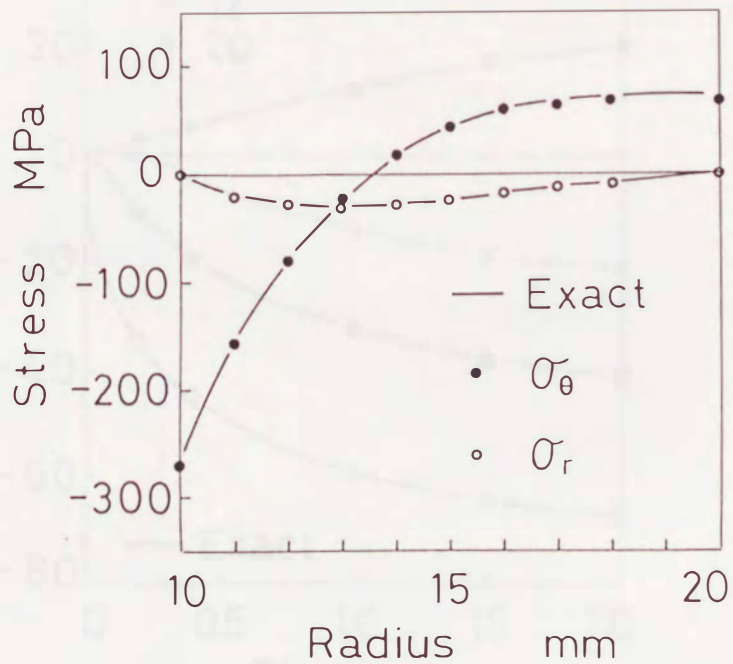


図6.21 形状および軸平面上での要素分割  
(円周方向に29分割)





(a) time=0.2s



(b) time=1.0s

図6.22 熱応力の厳密解との比較

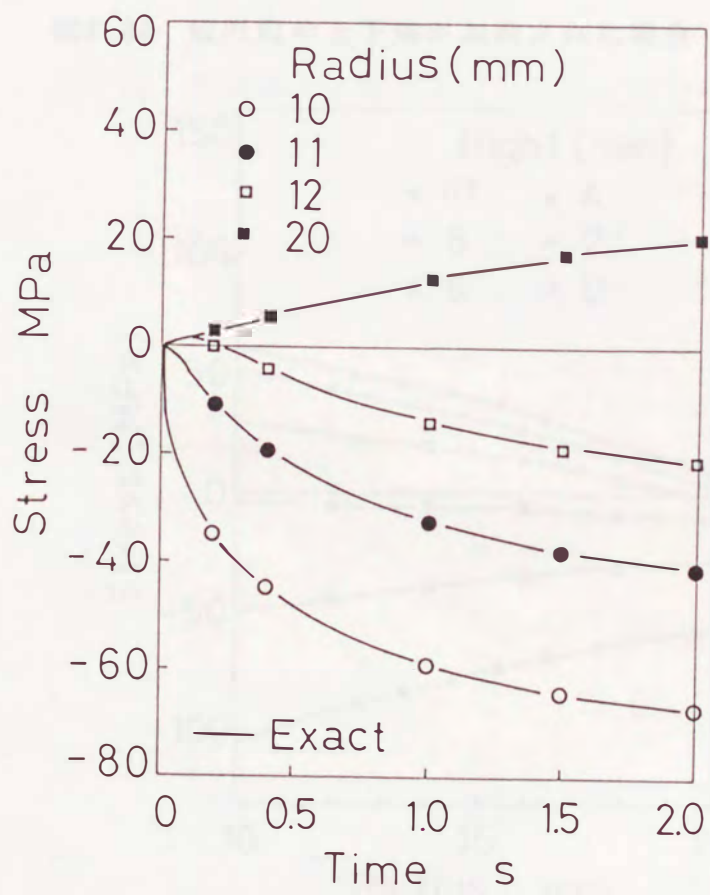


図6.23 円周方向応力の時間的变化



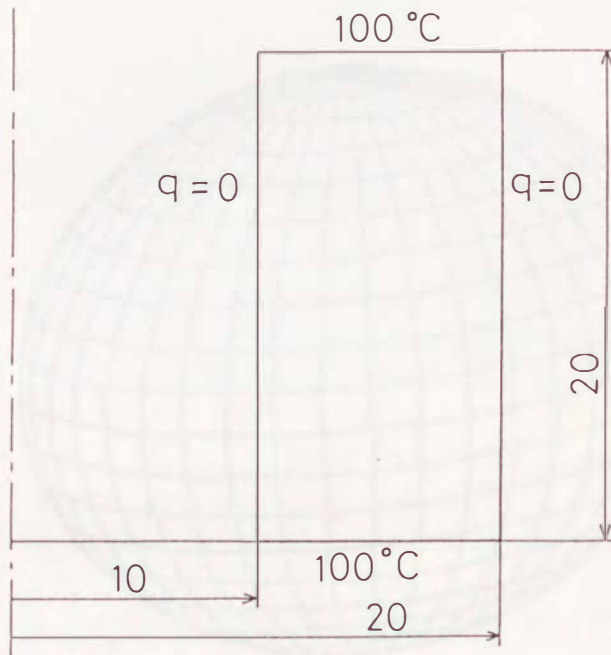


図6.24 短円筒の上下端が加熱された場合

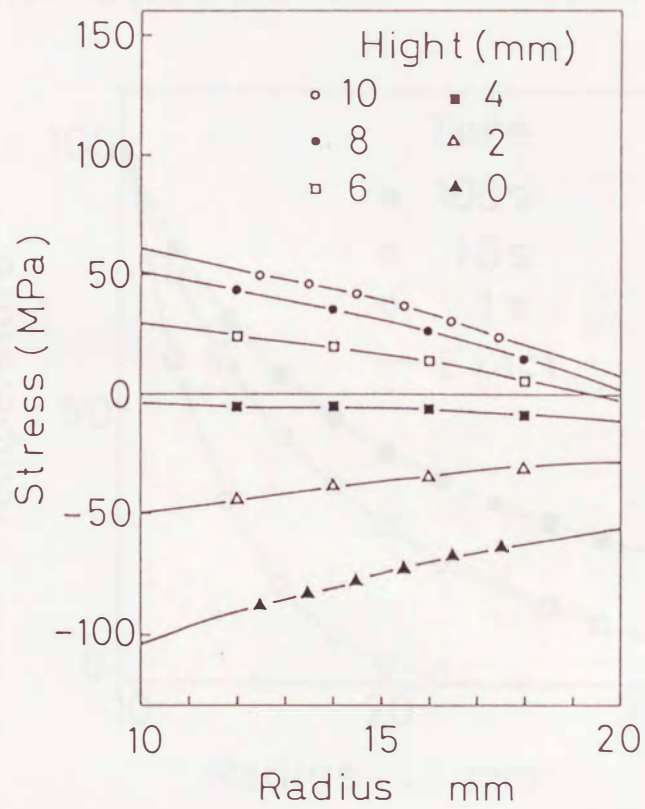


図6.25 上下端が加熱された短円筒の円周方向熱応力



図6.26 形状および軸平面上での要素分割(球形空間)

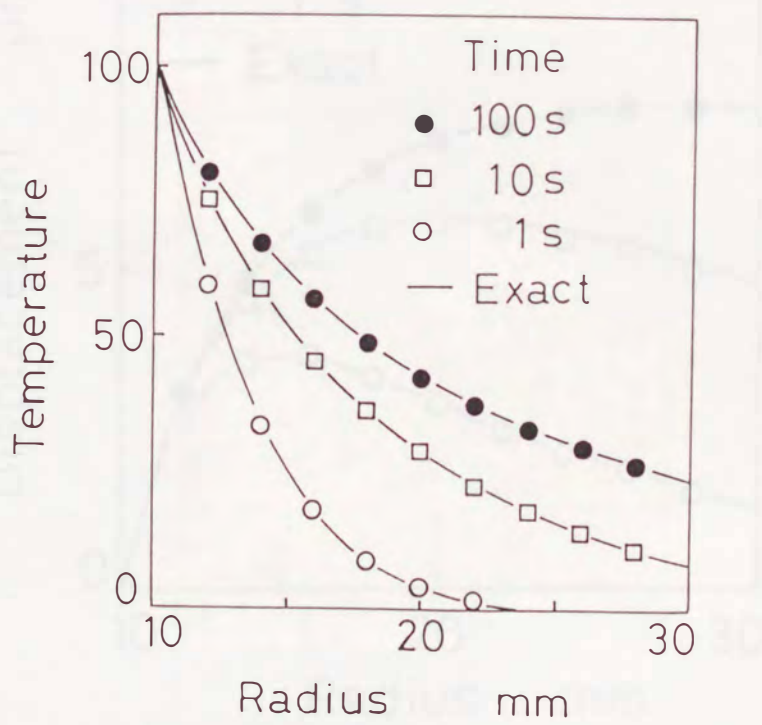


図6.27 温度分布(球形空間)



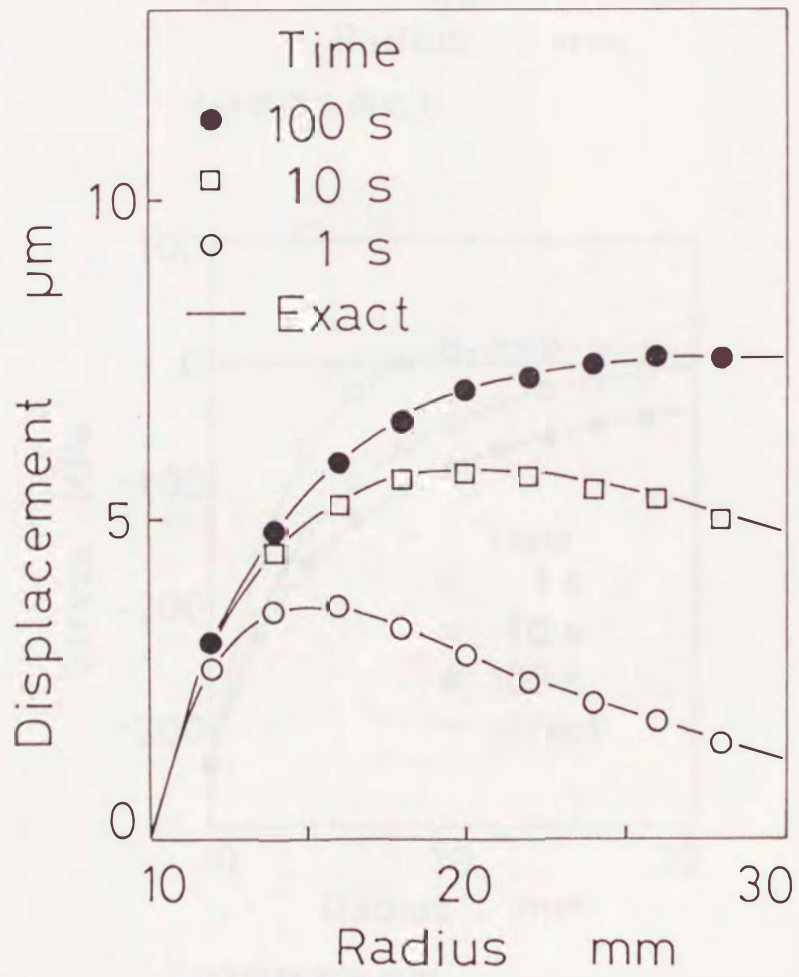
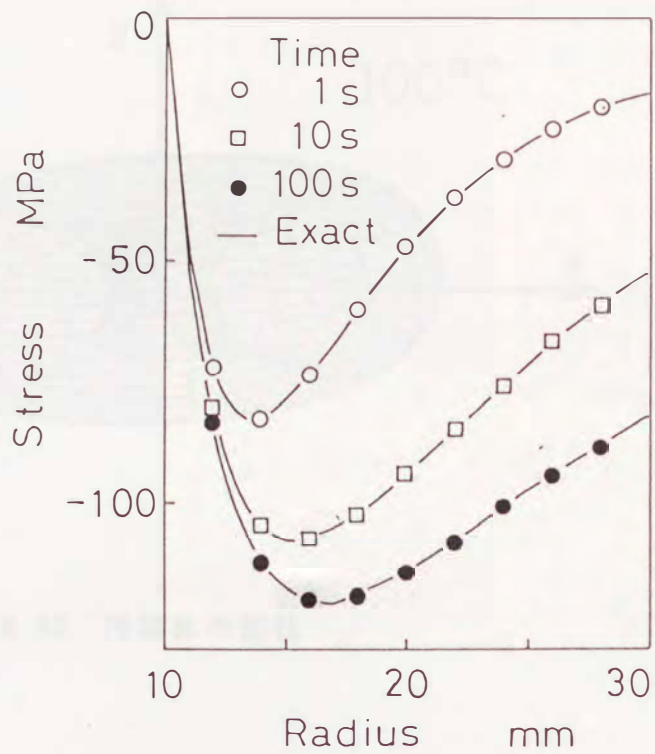
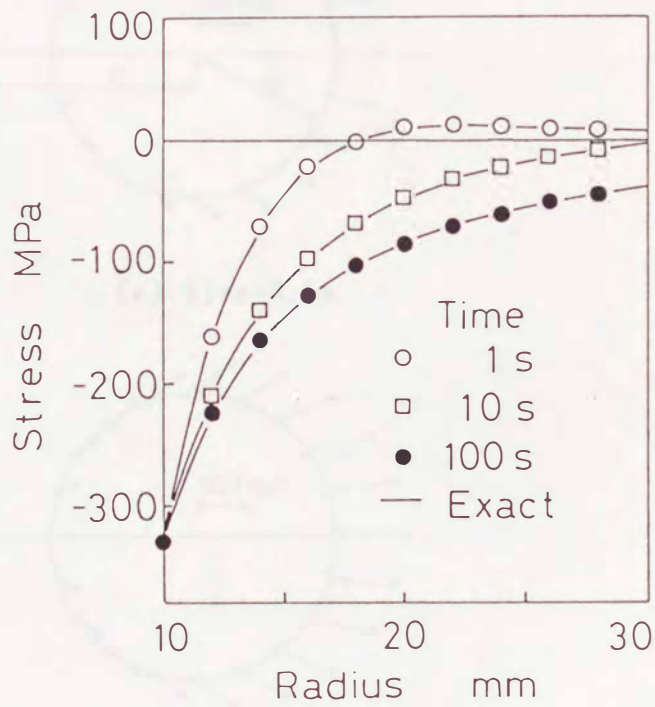


図6.28 熱変位量の厳密解との比較(球形空間)



(a) 半径方向応力



(b) 円周方向応力

図6.29 熱応力の厳密解との比較(球形空間)



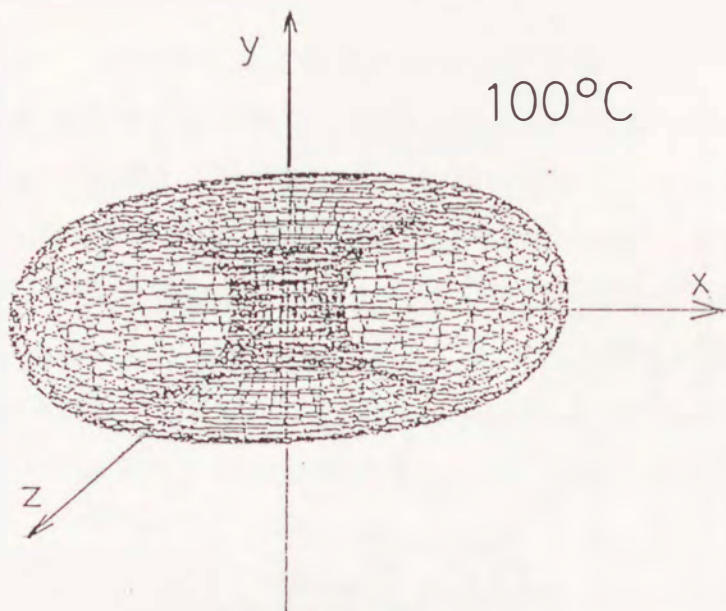
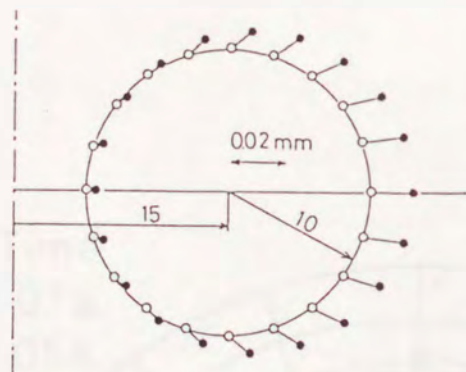
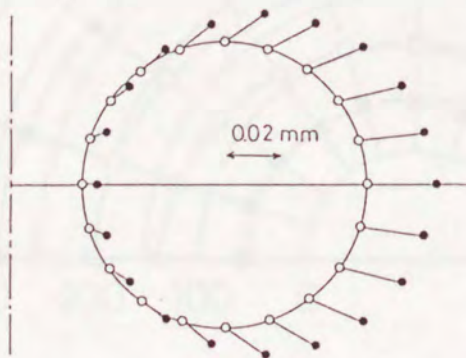


図6.30 円環体の形状



(a) time=0.5s



(b) time=2s

図6.31 円環体の熱変位量

図6.31 円環体の表面接線方向熱応力

円環体の表面接線方向熱応力は、時間経過とともに減少する。図6.31は、時間経過とともに熱応力が減少する様子を示している。時間経過とともに熱応力が減少する様子を示している。時間経過とともに熱応力が減少する様子を示している。

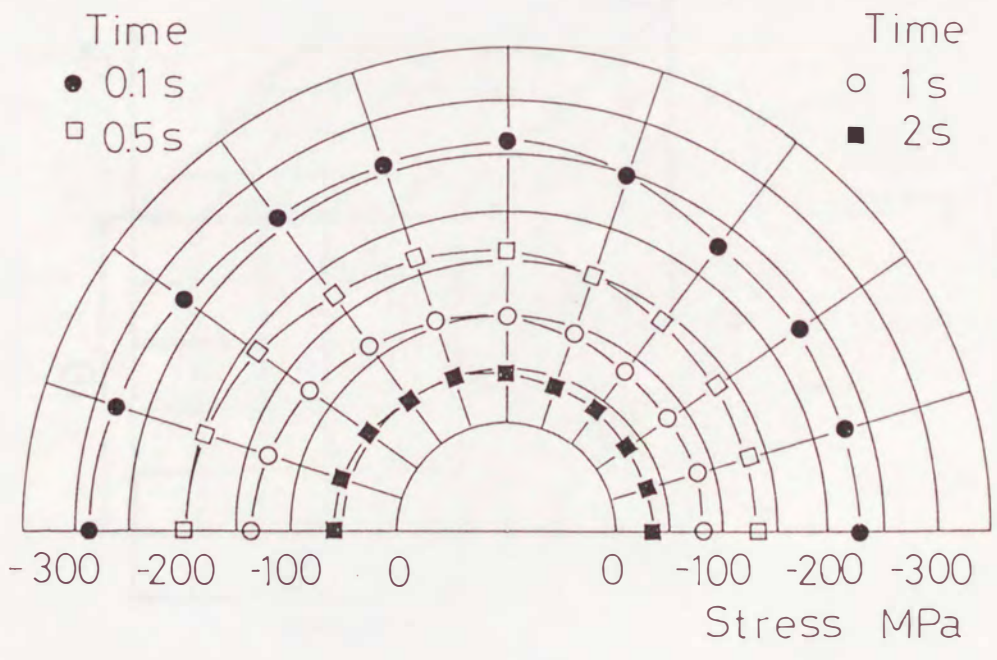


図6.32 円環体の表面接線方向熱応力



### 6・3 非定常3次元問題における計算例

本論文の3次元非定常熱応力問題の定式化の精度を確かめるために、図6.33の立方体の非定常熱応力を計算した。初期温度は $0^{\circ}\text{C}$ とし、 $(x_1, 0, x_3)$ の面の温度が急に $100^{\circ}\text{C}$ になった場合である。材料の物性値は表6.1の材料1のものを使用する。この計算例は厚さ $20\text{mm}$ の無限板の両面が急激に加熱された場合を想定したもので、 $(x_1, 0, x_3)$ の面は断熱状態であるとし、力学的条件も $x_1$ および $x_3$ 方向の変位がない無限板の条件で計算を行った。図6.34に点 $(5, x_2, 5)$ での変位の変化を示す。また、図6.35に $\sigma_{x_1x_1}$ 方向の応力分布を示す。図6.34および6.35の実線は厳密解を示す(57)。

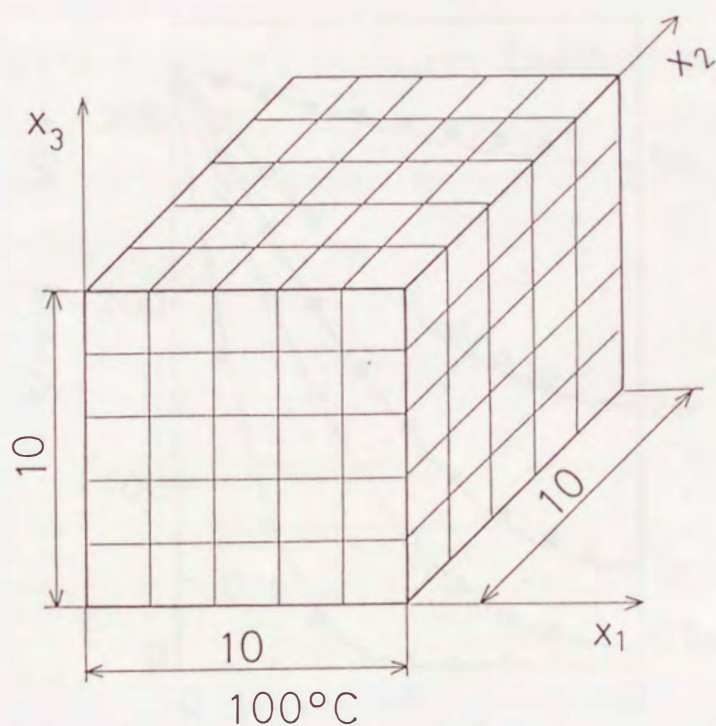


図6.33 3次元問題の要素分割

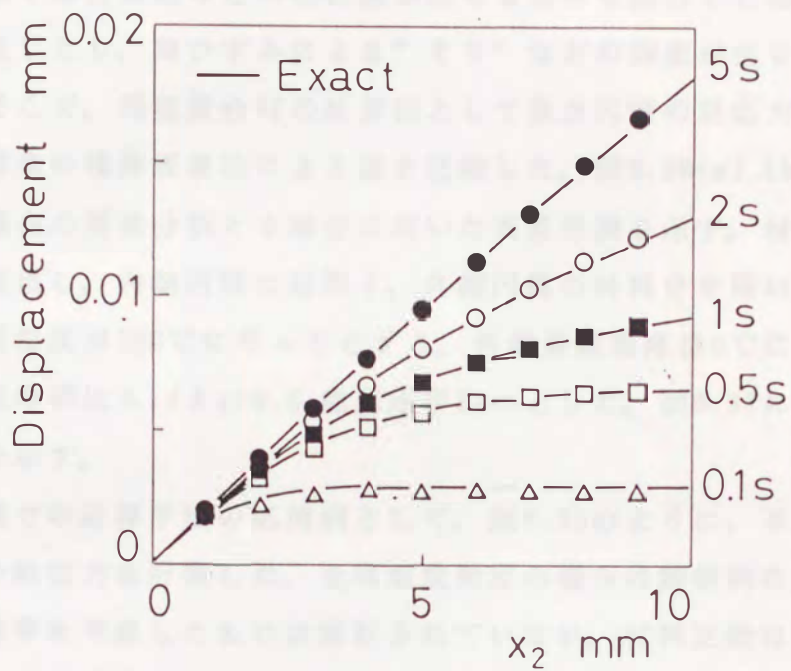


図6.34  $x_2$ 方向の変位

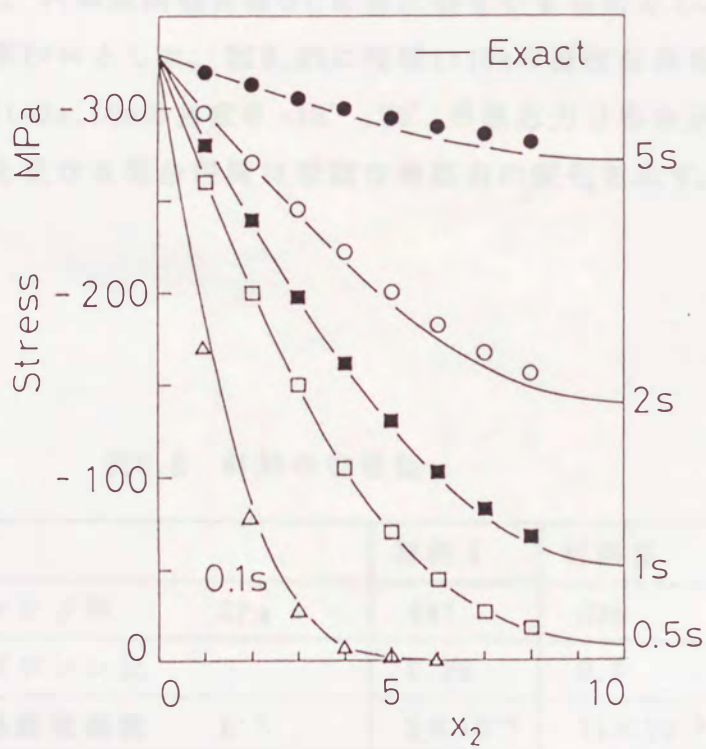


図6.35 応力分布 ( $\sigma_{x_1x_1}$ )



#### 6・4 異種接合材における計算例

熱膨張係数や弾性係数などの物性値が異なる部材を接合した場合に、熱応力による破損が生じたり、熱ひずみによる”そり”などの問題が生じたりすることがよくある。そこで、異種接合材の計算例として複合円筒の熱応力を計算し、セルを設定する従来の境界要素法による値と比較した。図6.36(a),(b)にそれぞれセルを設定する場合の要素分割と本解法に用いた要素分割を示す。材料定数は表6.2に示すものを使用し、内側円筒に材料1、外側円筒の材料2を用いる。初期温度0℃で、内側表面温度が100℃になったとする。外側表面温度は0℃に保たれているものとし、熱伝導率比 $\lambda_1/\lambda_2=0.5$ ,熱通過率 $K=\infty$ とした。図6.37に時間 $t=30\text{sec}$ における応力分布を示す。

多領域問題での計算手法の応用例として、図6.38のように、不均一加熱を受ける複合円筒の熱応力を計算した。全周温度指定の場合は解析的に解かれているが<sup>(71)</sup>、熱伝達率を考慮したものは解析されていない。材料定数は表6.2に示すとおりである。半径は内側から10mm, 20mm, 30mmとした。初期温度0℃で、外側表面の半分が100℃に加熱されたものとし、外側表面の他の部分の相対温度伝達率 $h_1=0.1\text{mm}^{-1}$ とした。内側表面温度は0℃に保たれているものとし、熱伝導率比 $\lambda_1/\lambda_2=0.5$ ,熱通過率 $K=\infty$ とした。図6.39に時間 $t=10\text{s}$ の温度分布を示す。図6.40(a)~(d)には時間 $t=2\text{s}, 10\text{s}$ の角度 $\theta=15^\circ, 75^\circ$ の熱応力分布を示す。以上のように、非軸対称加熱を受ける複合円筒は複雑な熱応力の変化を示す。

表6.2 材料の物性値

		材料 1	材料 2
ヤング率	GPa	441	206
ポアソン比		0.25	0.3
熱膨張係数	$K^{-1}$	$5 \times 10^{-6}$	$11 \times 10^{-6}$
温度伝導率	$\text{mm}^2\text{s}^{-1}$	16	7

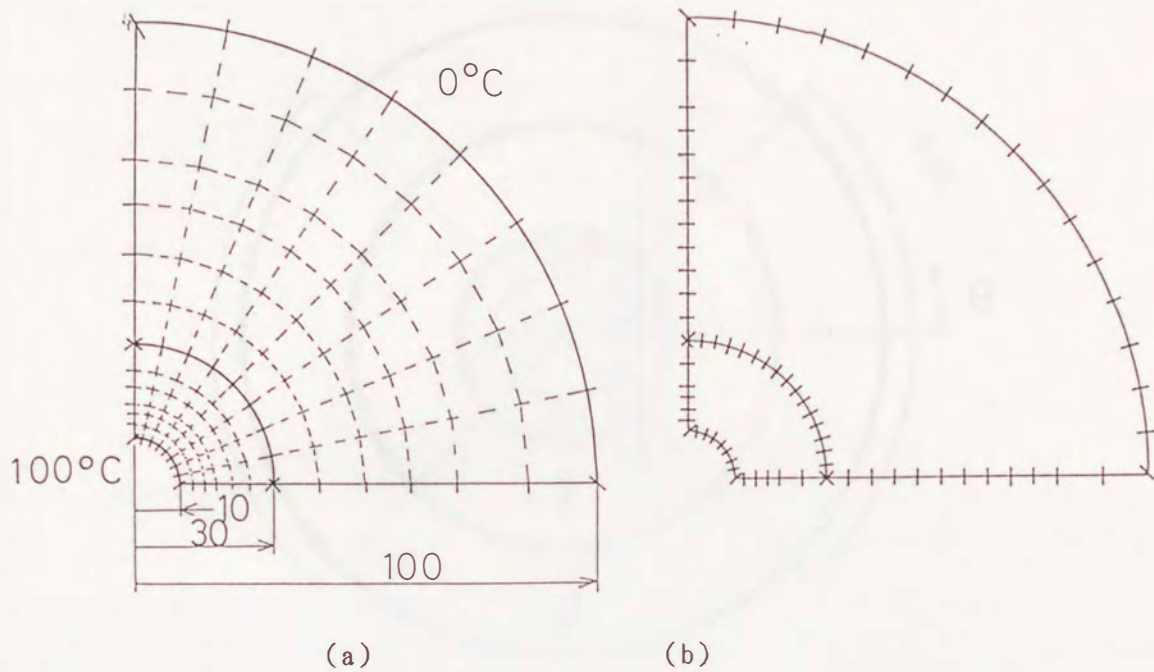


図6.36 セルを設定する場合の要素分割と本解法に用いた要素分割

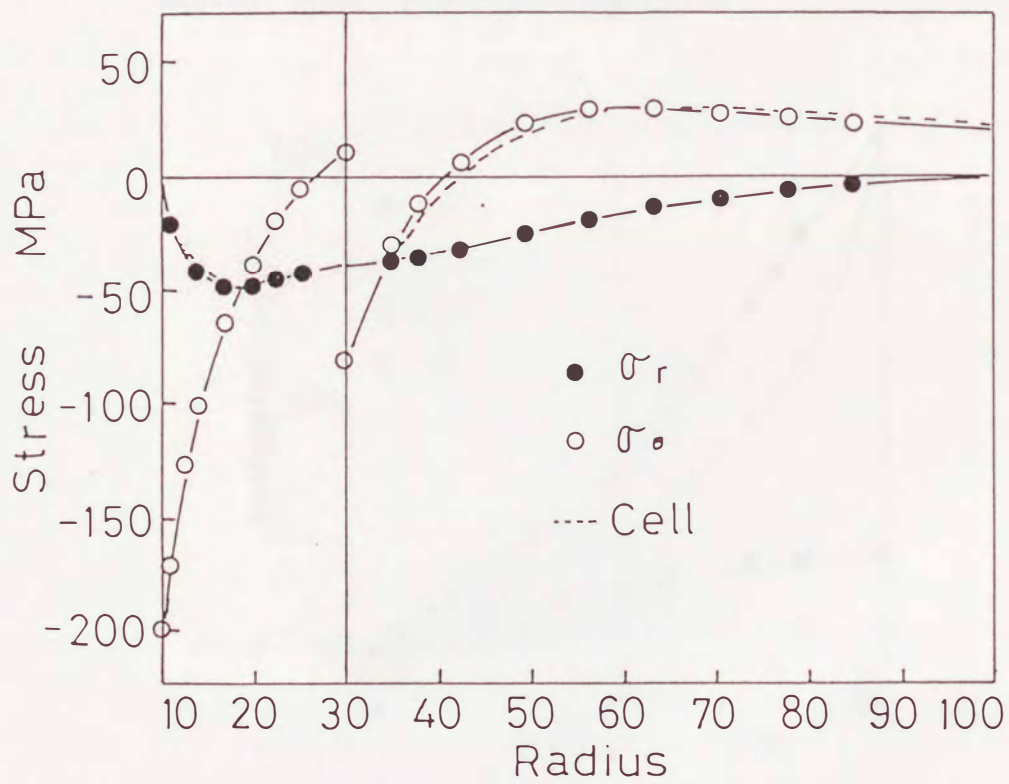


図6.37 複合円筒の熱応力 ( $t=30\text{sec}$ )



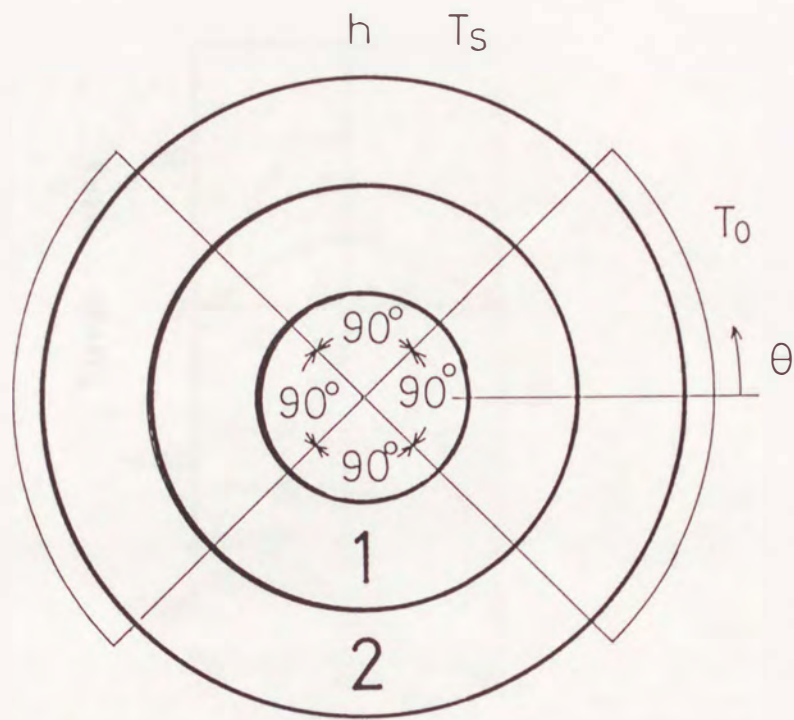


図6.38 不均一加熱を受ける複合円筒

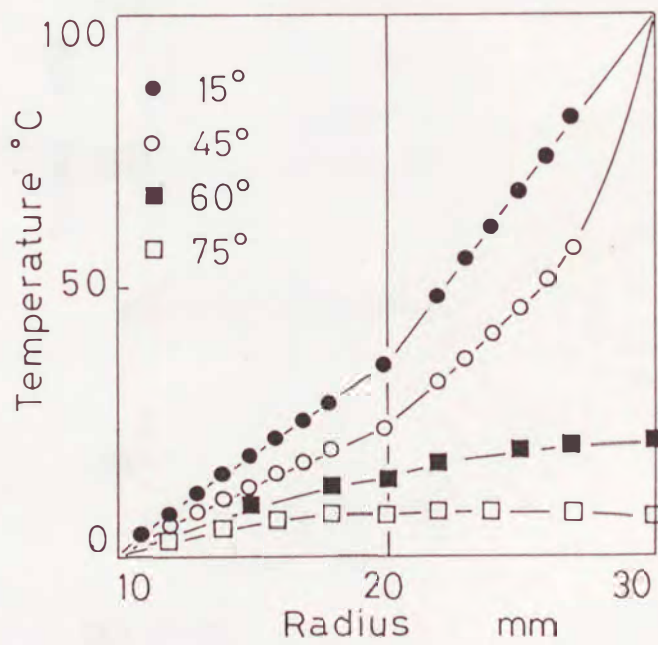
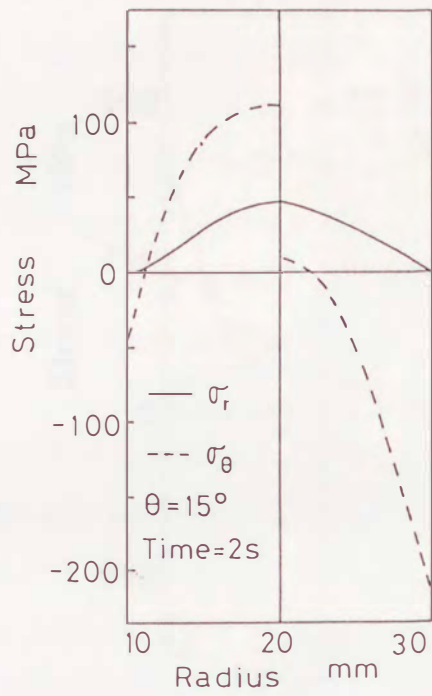
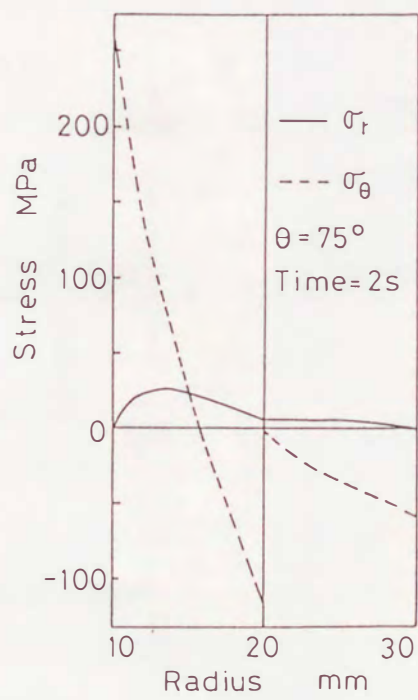


図6.39 温度分布 ( $t=10\text{sec}$ )



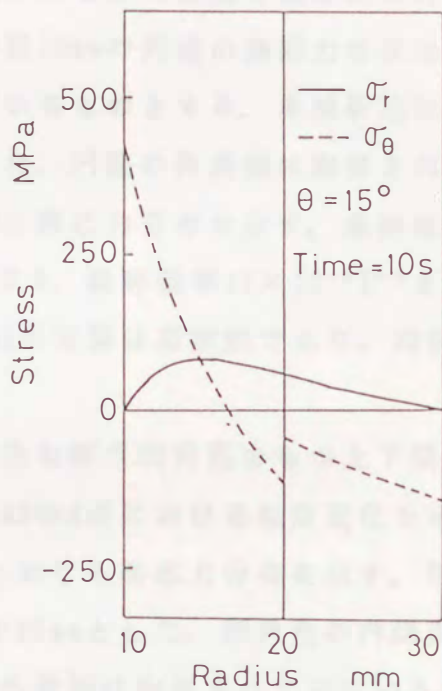
(a)  $\theta = 15^\circ$



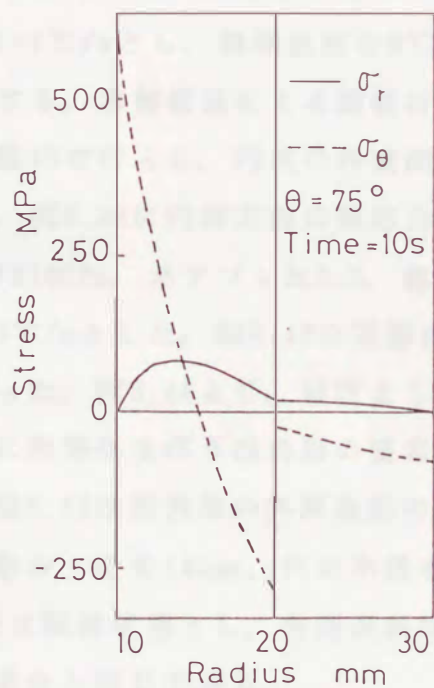
(b)  $\theta = 75^\circ$

图6.40 热应力分布 ( $t=2\text{s}$ )





(c)  $\theta = 15^\circ$



(d)  $\theta = 75^\circ$

図6.40 熱応力分布 ( $t=10\text{s}$ )

## 6・5 内部熱発生のある場合の計算例

4・5節の定式化による解の精度を確かめるために、両端を拘束した全領域に均一熱発生を伴う半径10mmの円柱の熱応力を求めた。初期温度を0℃とし、表面は温度0℃に保たれているものとする。本解析法による数値計算では要素分割数72、時間分割数40で行った。円柱の外表面は拘束されていないものとした。図6.41に温度分布を、図6.42に熱応力分布を示す。条件は、温度伝導率 $16\text{mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率210GPa、ポアソン比0.3、線膨張率 $11 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ とし、熱発生に関する量 $W/c\rho=10^\circ\text{C}/\text{s}$ とした。図6.42の実線は厳密解であり、時間 $t=2.0, 1.0, 0.5, 0.2\text{ s}$ に対し比較を行った。

図6.43は均一熱発生を伴う四角孔をもつ上下端を拘束された円筒の要素分割を示す。図6.44は図6.43のA点における温度変化を示す。図6.45は四角孔の内側表面の時間 $t=20, 5, 2\text{ s}$ における熱応力分布を示す。四角孔の一辺を20mm、隅部の半径を3mm、円筒の半径を25mmとした。四角孔の内側表面温度は0℃、円筒の外側表面は断熱状態とし、内外表面は拘束されていないものとした。他の条件は前の計算例と同じである。

次に、半径40mmの中心部に均一熱発生を伴う半径100mmの円板の熱応力を求めた<sup>(4)</sup>。熱発生量 $W/c\rho=1^\circ\text{C}/\text{s}$ とし、初期温度を0℃、外周表面および上下表面は断熱されているものとする。本解析法による数値計算では図6.46に示すように要素分割数72、時間分割数40で行った。円柱の外表面は拘束されていないものとした。図6.47に温度分布を、図6.48に円周方向の熱応力分布を示す。条件は、温度伝導率 $16\text{mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率210GPa、ポアソン比0.3、線膨張率 $11 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ とし、熱発生に関する量 $W/c\rho=10^\circ\text{C}/\text{s}$ とした。図6.48の実線は厳密解であり、時間 $t=10, 25, 50\text{ s}$ に対し比較を行った。図6.48より、精度よく解が求められることが分かる。

図6.49は円形領域に熱発生を伴う四角形の要素分割を示す。図6.50は四角形の外周の変位を示す。図6.51は四角形の外周表面の時間 $t=50, 25, 10\text{ s}$ における熱応力分布を示す。四角形の一辺を140mm、円の半径を40mmとした。四角形の外周表面温度は0℃、上下表面は断熱状態とし、外周表面は拘束されていないものとした。他の条件は図6.46の場合と同じである。



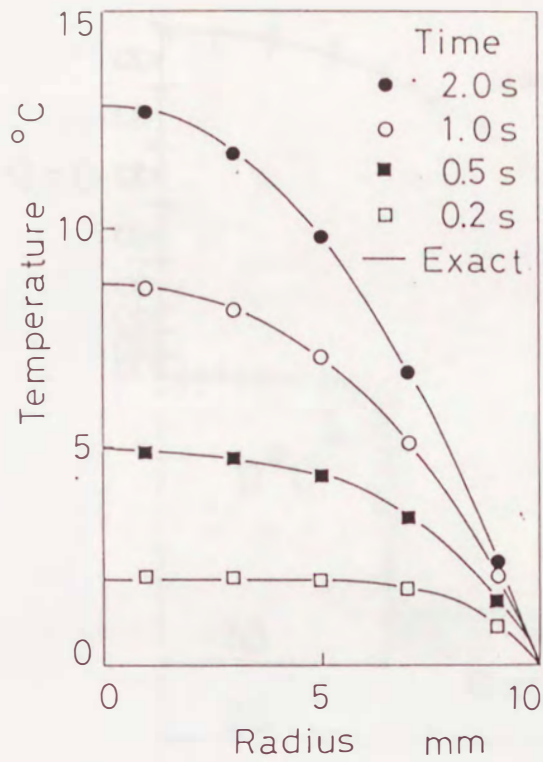


図6.41 熱発生を伴う円柱の温度分布

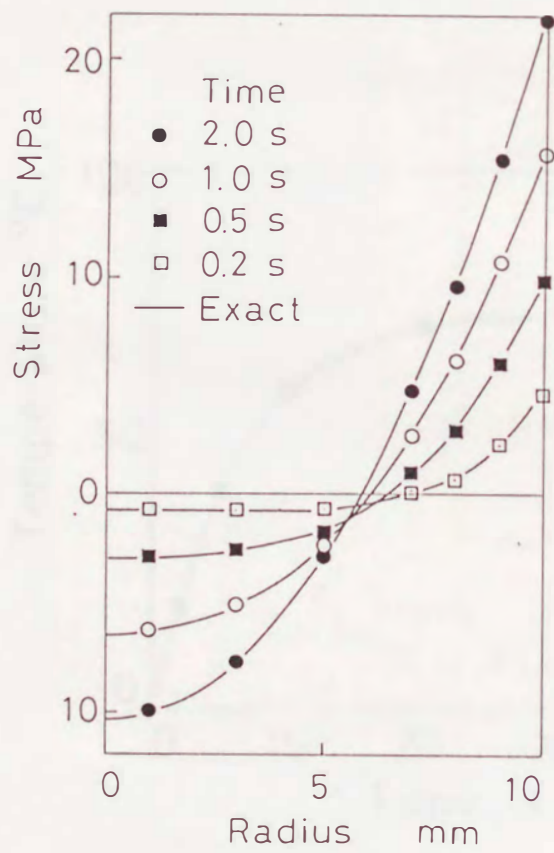


図6.42 熱発生を伴う円柱の熱応力

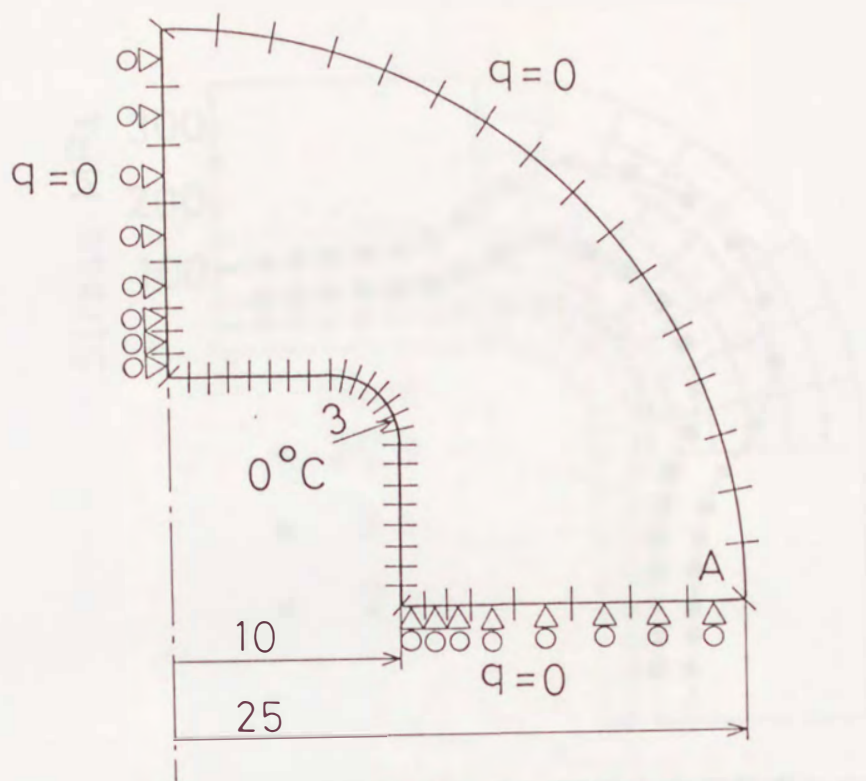


図6.43 熱発生を伴う四角孔をもつ円柱の要素分割

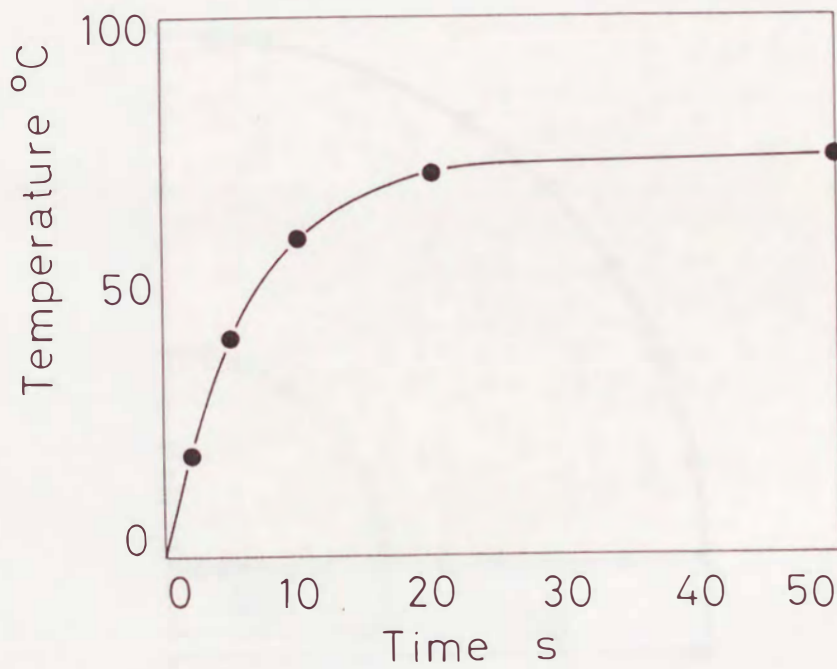


図6.44 熱発生を伴う四角孔をもつ円柱の温度の変化



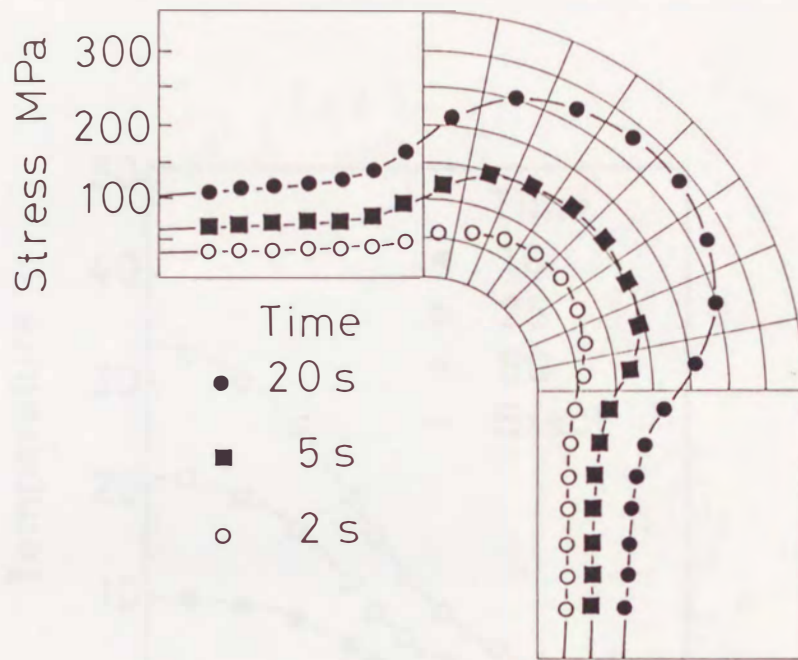


図6.45 熱発生を伴う四角孔をもつ円柱の表面熱応力分布

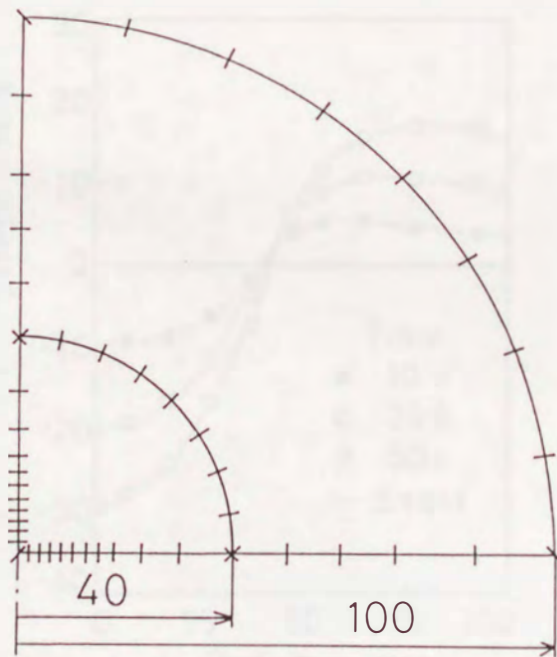


図6.46 熱発生を伴う円板

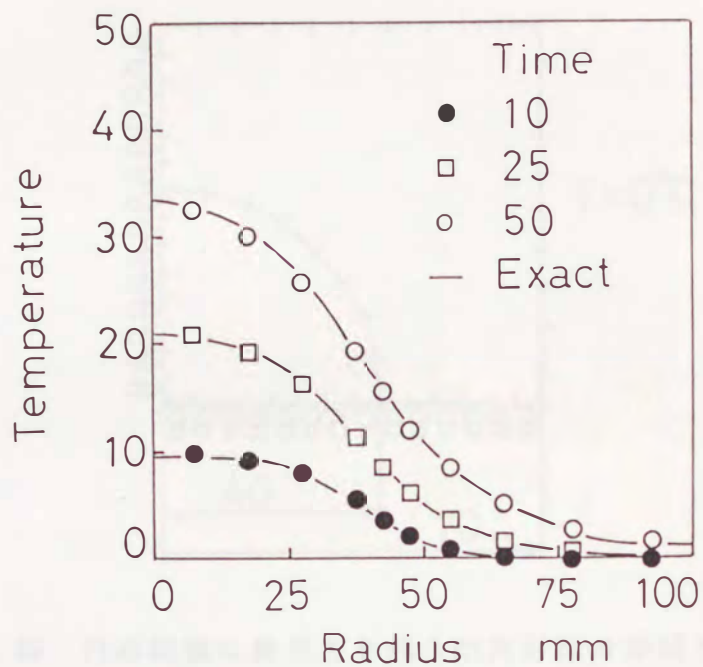


図6.47 熱発生を伴う円板の温度分布

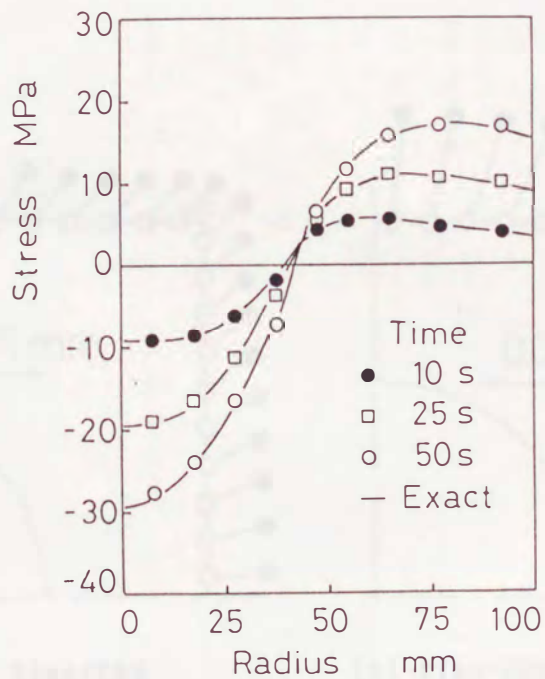


図6.48 熱発生を伴う円板の円周方向熱応力分布



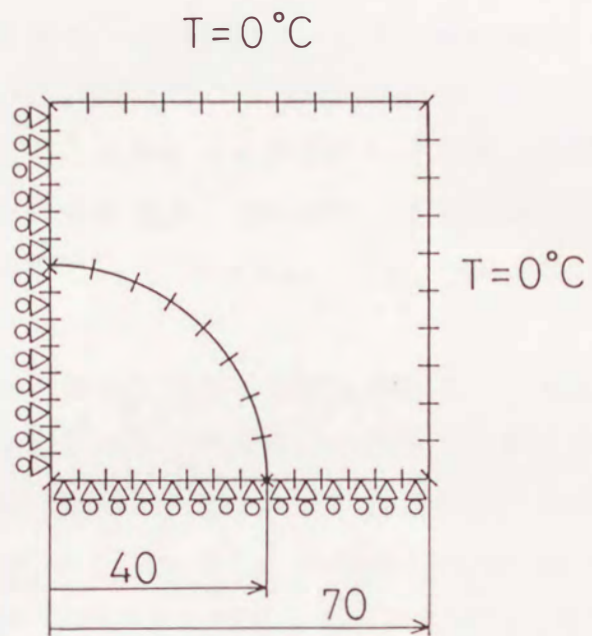


図6.49 円形領域に熱発生を伴う四角形板の形状と要素分割

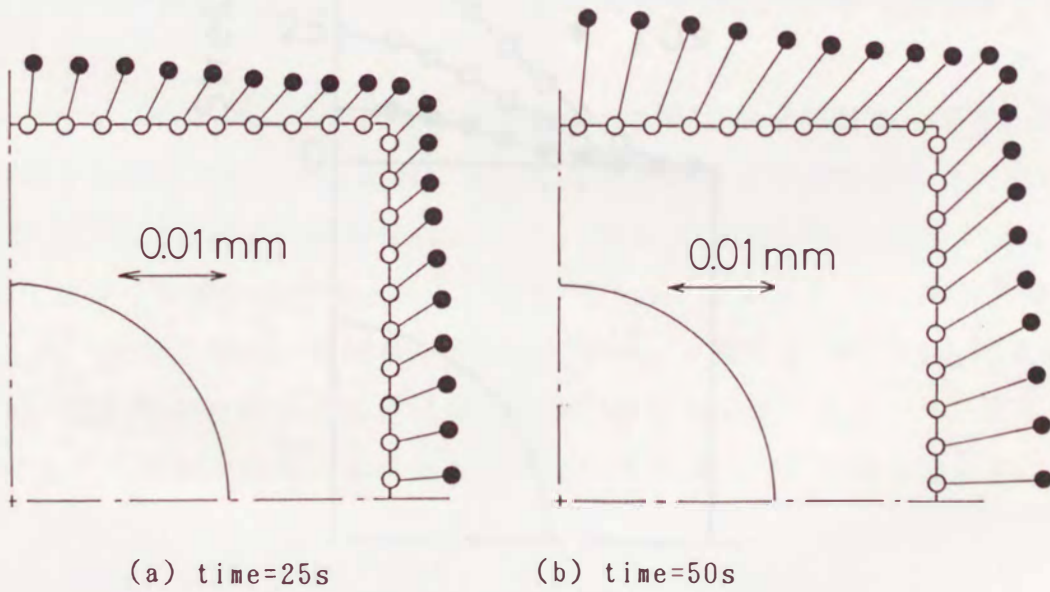


図6.50 熱発生を伴う四角形板の熱変形量

図6.51 熱発生を伴う四角形板の外周表面熱応力分布

図6.51は、熱発生を伴う四角形板の外周表面熱応力分布を示している。この図は、時間経過に伴って、板の外周表面に発生する熱応力の分布を示している。図中の縦軸は、熱応力（Stress）をMPaで示し、横軸は、板の外周表面の位置を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。

図6.51は、熱発生を伴う四角形板の外周表面熱応力分布を示している。この図は、時間経過に伴って、板の外周表面に発生する熱応力の分布を示している。図中の縦軸は、熱応力（Stress）をMPaで示し、横軸は、板の外周表面の位置を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。図中のデータは、10秒、25秒、50秒の3つの異なる時間での測定結果を示している。

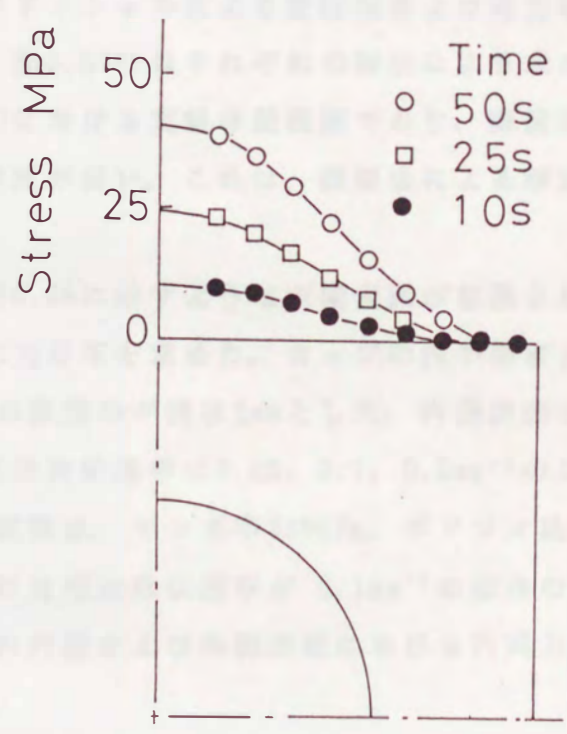


図6.51 熱発生を伴う四角形板の外周表面熱応力分布

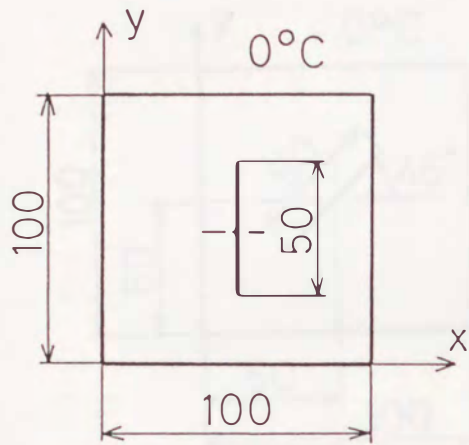


## 6・6 定常問題における計算例

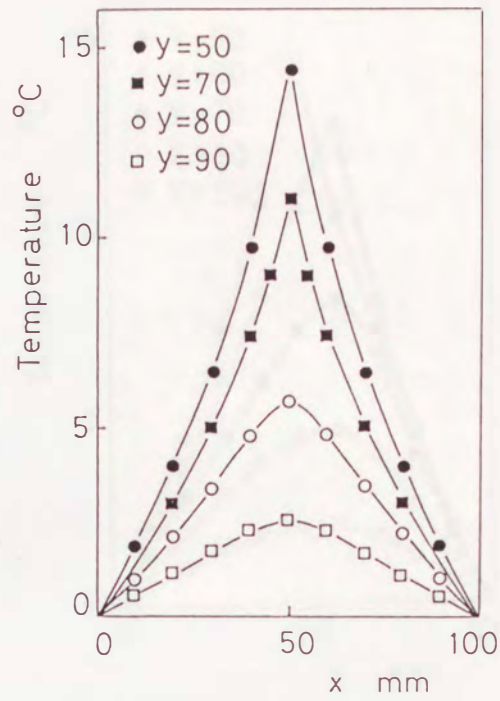
2次元定常問題の計算例として、線熱源を含む全周拘束のない正方形領域の温度分布および熱応力を求めた。材料定数は、ヤング率210GPa, ポアソン比0.3, 線膨張率 $11 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ とした。図6.52(a), 6.46(b)に示すように一辺が100mmで中央に長さ50mmの線熱源が存在し、外周は0℃に保たれている。線熱源の強さは $\lambda W_L = 10^\circ\text{C mm}^{-1}$ とし、図6.52(a)の線熱源はy軸に平行であり、図6.53(a)の線熱源は45度傾いている。温度分布は図6.52(b), 6.53(b)に示す。図6.52(c), 6.53(c)には熱応力分布( $\sigma_{xx}$ )を示す。

間接法および直接法による温度場による解法の比較のために、図6.54に示すような中空円筒の熱応力を求めた。3次元の式を用いて計算を行っており、円周方向には29分割し、要素は一定要素を用いた。材料定数は、ヤング率210GPa, ポアソン比0.3, 線膨張率 $11 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ とした。内側表面は100℃に加熱されており、外側表面温度は100℃に保たれているものとする。図6.55(a), (b)はそれぞれ間接法および直接法の温度場による表面変位分布を示す。また、図6.56(a), (b)には同様に間接法および直接法の温度場による相当表面外力分布を示す。温度場から求められる熱弾性変位ポテンシャルによる変位場および応力場は、間接法と直接法によりかなり異なる。図6.57にはそれぞれの解法により求めた円周方向応力分布の比較を示す。図6.57における実線は厳密解であり、直接法によるものより間接法による値のほうが精度が良い。これは、直接法による解法では特異性が強くなるためであろう。

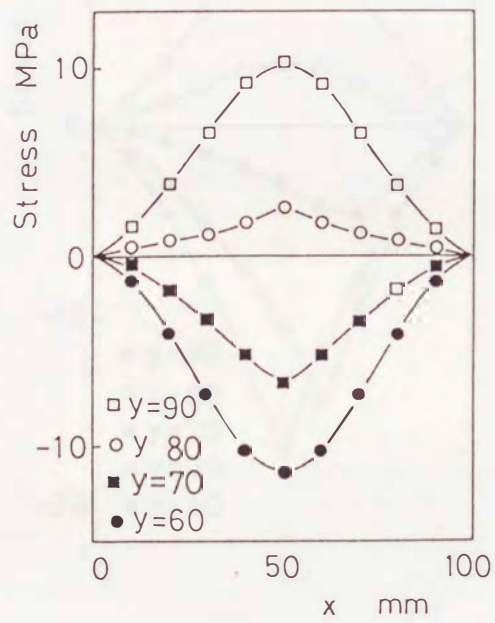
計算例として、図6.58に示すような内側表面が加熱されているカップ形状体の変位分布および熱応力分布を求めた。カップの内半径および外半径はそれぞれ7mm, 10mmとし、内周の隅部の半径は2mmとした。内側表面は100℃に加熱されており、外側表面における相対熱伝達率は0.05, 0.1,  $0.5 \text{mm}^{-1}$ の3通りとし、外側外周温度は0℃とした。材料定数は、ヤング率210GPa, ポアソン比0.3, 線膨張率 $11 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ とした。図6.59には相対熱伝達率が $0.1 \text{mm}^{-1}$ の場合の変形量を示す。図6.60(a), (b)にはそれぞれ内側および外側表面における円周方向応力分布を示す。



(a) 形状



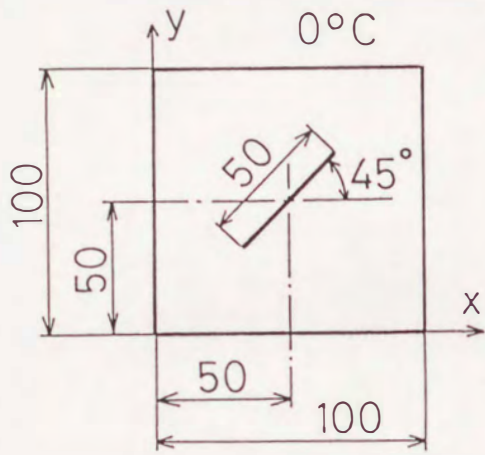
(b) 温度分布



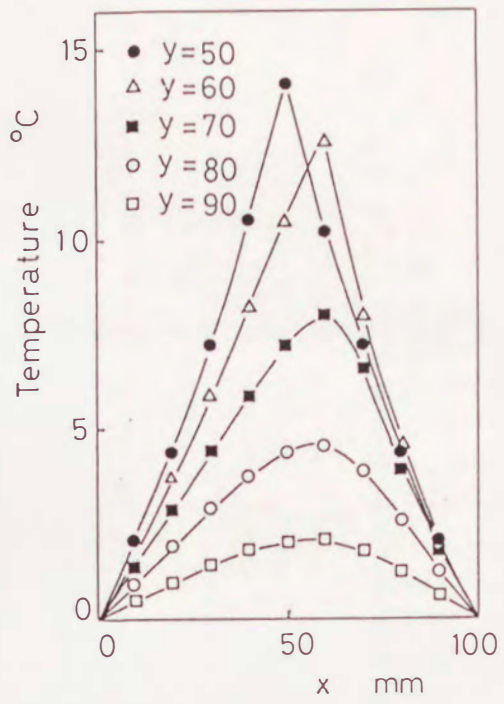
(c) 熱応力分布

図6.52 線熱源による熱応力

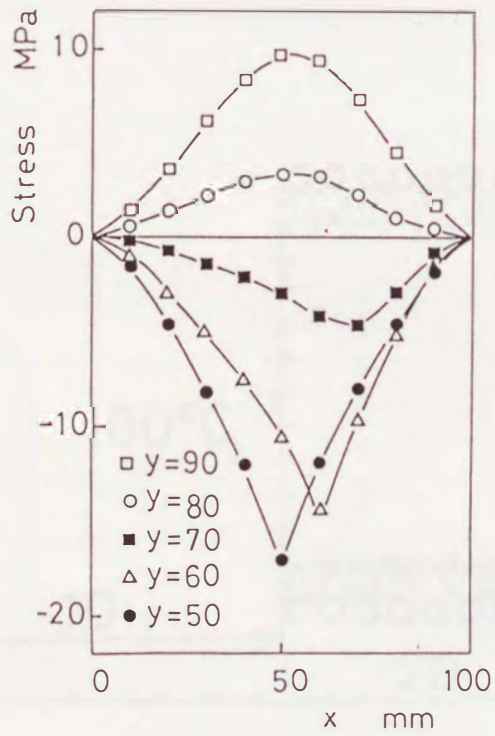




(a) 形状

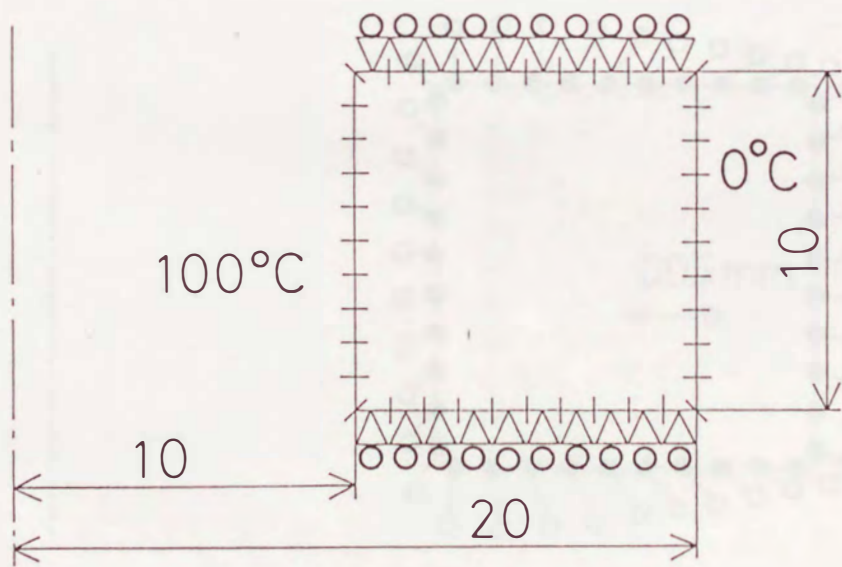


(b) 温度分布



(c) 熱応力分布

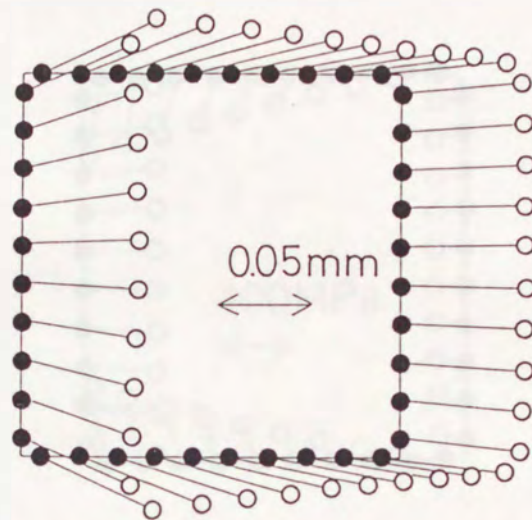
図6.53 線熱源による熱応力



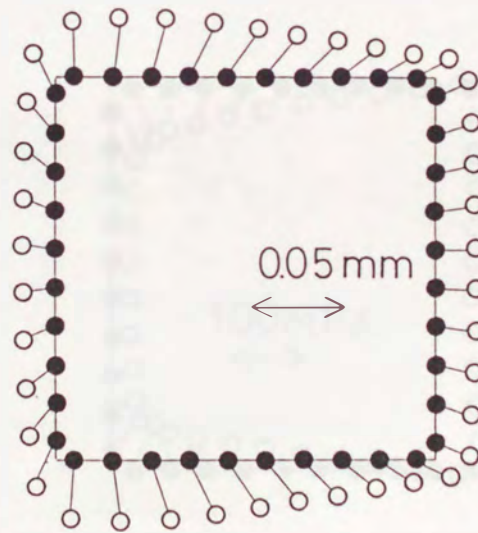
(円周方向に29分割)

図6.54 中空円筒の形状



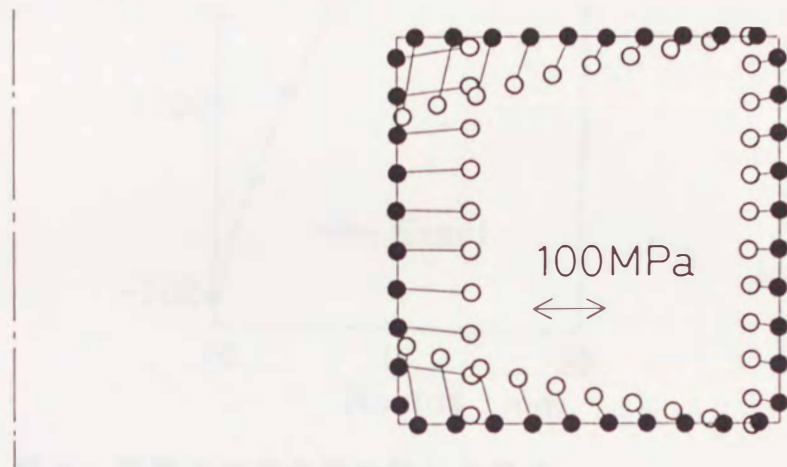


(a) 間接法の温度場を用いる場合

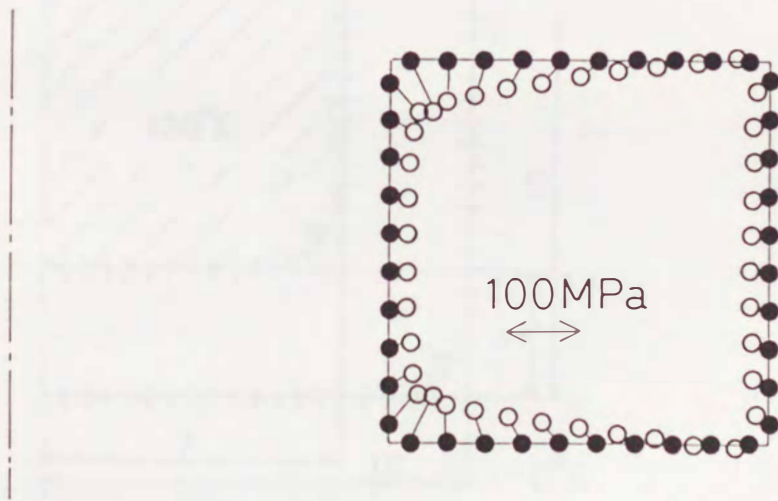


(b) 直接法の温度場を用いる場合

図6.55 変位場の比較



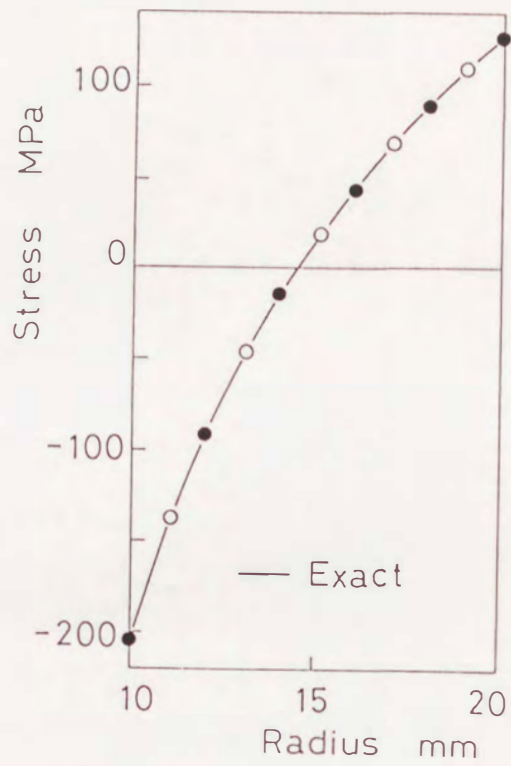
(a) 間接法の温度場を用いる場合



(b) 直接法の温度場を用いる場合

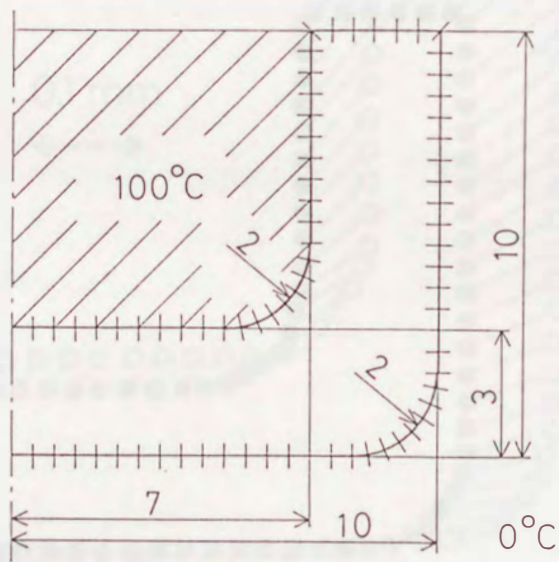
図6.56 応力場の比較





黒丸：間接法の温度場を用いる場合  
 白丸：直接法の温度場を用いる場合

図6.57 円筒の円周方向熱応力分布



(円周方向に29分割)

図6.58 カップ形状の物体

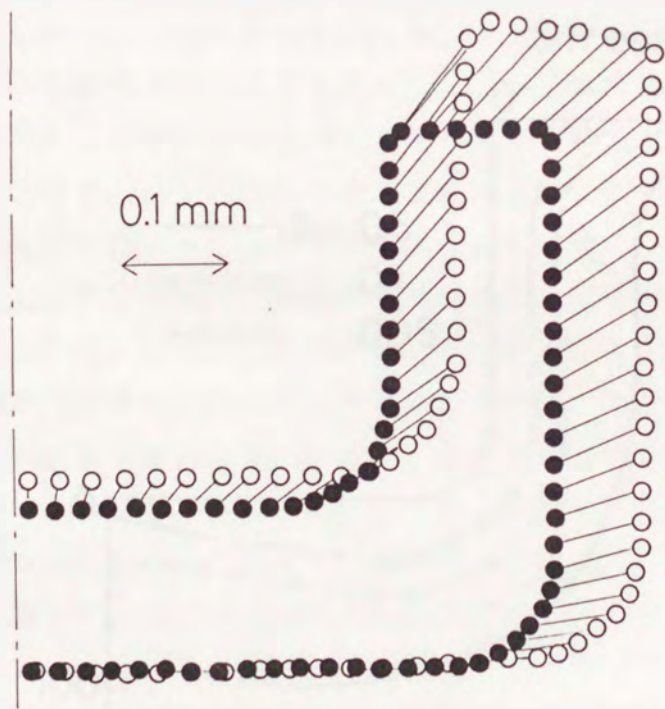
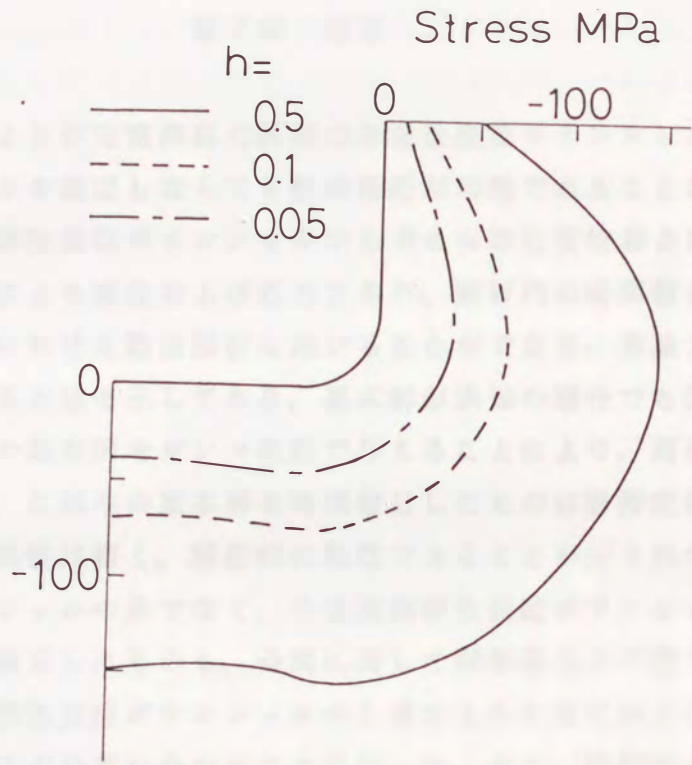
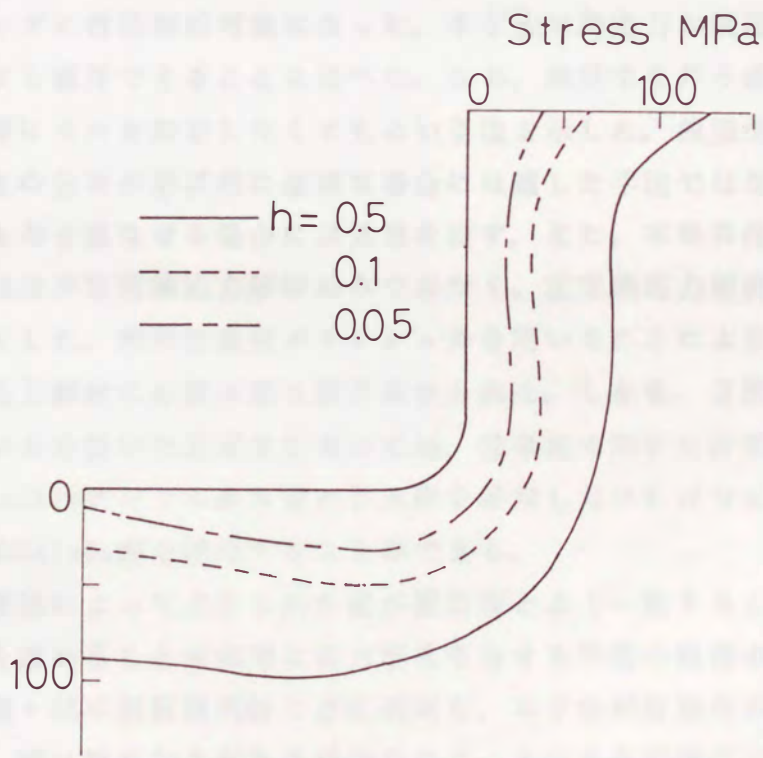


図6.59 カップ形状体の熱変位分布 ( $h=0.1\text{mm}^{-1}$ )





(a) 内側表面



(b) 外側表面

图6.60 表面円周方向熱応力分布