

## 非定常熱応力問題における数値解析手法の定式化に関する研究

落合, 芳博

<https://doi.org/10.11501/3088234>

---

出版情報 : 九州大学, 1991, 博士 (工学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

非定常熱応力問題における数値解析  
手法の定式化に関する研究

落 合 芳 博

①

# 非定常熱応力問題における数値解析手法の定式化に関する研究

目次	
第一章 序論	1
第二章 問題の定式化	5
2-1 熱伝導問題の定式化	7
2-2 非定常熱伝導問題の定式化	12
2-3 熱応力問題の定式化	15
2-4 熱伝導問題の定式化と熱応力問題の定式化	22
第三章 数値解析手法の定式化	25
3-1 有限差分法の定式化	27
3-2 有限要素法の定式化	32
3-3 有限要素法の定式化と有限差分法の定式化	37
第四章 数値解析手法の定式化の応用	40
4-1 熱伝導問題の定式化の応用	42
4-2 熱伝導問題の定式化の応用	47
4-3 熱伝導問題の定式化の応用	52
4-4 熱伝導問題の定式化の応用	57
4-5 熱伝導問題の定式化の応用	62
4-6 熱伝導問題の定式化の応用	67
4-7 熱伝導問題の定式化の応用	72
4-8 熱伝導問題の定式化の応用	77
4-9 熱伝導問題の定式化の応用	82
4-10 熱伝導問題の定式化の応用	87
4-11 熱伝導問題の定式化の応用	92
4-12 熱伝導問題の定式化の応用	97
4-13 熱伝導問題の定式化の応用	102
4-14 熱伝導問題の定式化の応用	107
4-15 熱伝導問題の定式化の応用	112
4-16 熱伝導問題の定式化の応用	117
4-17 熱伝導問題の定式化の応用	122
4-18 熱伝導問題の定式化の応用	127
4-19 熱伝導問題の定式化の応用	132
4-20 熱伝導問題の定式化の応用	137
4-21 熱伝導問題の定式化の応用	142
4-22 熱伝導問題の定式化の応用	147
4-23 熱伝導問題の定式化の応用	152
4-24 熱伝導問題の定式化の応用	157
4-25 熱伝導問題の定式化の応用	162
4-26 熱伝導問題の定式化の応用	167
4-27 熱伝導問題の定式化の応用	172
4-28 熱伝導問題の定式化の応用	177
4-29 熱伝導問題の定式化の応用	182
4-30 熱伝導問題の定式化の応用	187
4-31 熱伝導問題の定式化の応用	192
4-32 熱伝導問題の定式化の応用	197
4-33 熱伝導問題の定式化の応用	202
4-34 熱伝導問題の定式化の応用	207
4-35 熱伝導問題の定式化の応用	212
4-36 熱伝導問題の定式化の応用	217
4-37 熱伝導問題の定式化の応用	222
4-38 熱伝導問題の定式化の応用	227
4-39 熱伝導問題の定式化の応用	232
4-40 熱伝導問題の定式化の応用	237
4-41 熱伝導問題の定式化の応用	242
4-42 熱伝導問題の定式化の応用	247
4-43 熱伝導問題の定式化の応用	252
4-44 熱伝導問題の定式化の応用	257
4-45 熱伝導問題の定式化の応用	262
4-46 熱伝導問題の定式化の応用	267
4-47 熱伝導問題の定式化の応用	272
4-48 熱伝導問題の定式化の応用	277
4-49 熱伝導問題の定式化の応用	282
4-50 熱伝導問題の定式化の応用	287
4-51 熱伝導問題の定式化の応用	292
4-52 熱伝導問題の定式化の応用	297
4-53 熱伝導問題の定式化の応用	302
4-54 熱伝導問題の定式化の応用	307
4-55 熱伝導問題の定式化の応用	312
4-56 熱伝導問題の定式化の応用	317
4-57 熱伝導問題の定式化の応用	322
4-58 熱伝導問題の定式化の応用	327
4-59 熱伝導問題の定式化の応用	332
4-60 熱伝導問題の定式化の応用	337
4-61 熱伝導問題の定式化の応用	342
4-62 熱伝導問題の定式化の応用	347
4-63 熱伝導問題の定式化の応用	352
4-64 熱伝導問題の定式化の応用	357
4-65 熱伝導問題の定式化の応用	362
4-66 熱伝導問題の定式化の応用	367
4-67 熱伝導問題の定式化の応用	372
4-68 熱伝導問題の定式化の応用	377
4-69 熱伝導問題の定式化の応用	382
4-70 熱伝導問題の定式化の応用	387
4-71 熱伝導問題の定式化の応用	392
4-72 熱伝導問題の定式化の応用	397
4-73 熱伝導問題の定式化の応用	402
4-74 熱伝導問題の定式化の応用	407
4-75 熱伝導問題の定式化の応用	412
4-76 熱伝導問題の定式化の応用	417
4-77 熱伝導問題の定式化の応用	422
4-78 熱伝導問題の定式化の応用	427
4-79 熱伝導問題の定式化の応用	432
4-80 熱伝導問題の定式化の応用	437
4-81 熱伝導問題の定式化の応用	442
4-82 熱伝導問題の定式化の応用	447
4-83 熱伝導問題の定式化の応用	452
4-84 熱伝導問題の定式化の応用	457
4-85 熱伝導問題の定式化の応用	462
4-86 熱伝導問題の定式化の応用	467
4-87 熱伝導問題の定式化の応用	472
4-88 熱伝導問題の定式化の応用	477
4-89 熱伝導問題の定式化の応用	482
4-90 熱伝導問題の定式化の応用	487
4-91 熱伝導問題の定式化の応用	492
4-92 熱伝導問題の定式化の応用	497
4-93 熱伝導問題の定式化の応用	502
4-94 熱伝導問題の定式化の応用	507
4-95 熱伝導問題の定式化の応用	512
4-96 熱伝導問題の定式化の応用	517
4-97 熱伝導問題の定式化の応用	522
4-98 熱伝導問題の定式化の応用	527
4-99 熱伝導問題の定式化の応用	532
4-100 熱伝導問題の定式化の応用	537

平成3年12月

落合芳博

## 目次

第1章 緒言	
1・1 まえがき	1
1・2 内外の研究状況	2
1・3 本論文の内容	4
第2章 研究のための基礎理論	
2・1 熱応力理論の基礎	10
2・2 境界要素法による非定常温度解析の基礎	13
2・3 従来の境界要素法による非定常熱応力解析	19
2・4 従来の境界要素法による定常熱応力解析	22
第3章 非定常熱応力問題における基本解	
3・1 2次元問題における基本解の誘導と特性	24
3・2 3次元問題における基本解の誘導と特性	33
3・3 軸対称問題における基本解の誘導と特性	38
第4章 非定常熱応力問題のための定式化	
4・1 解の重ね合わせによる定式化	43
4・2 直接境界要素法による定式化	46
4・3 体積力法による定式化	52
4・4 異種接合材への適用	57
4・5 内部熱発生のある場合の熱応力	61
第5章 定常熱応力問題への応用	
5・1 定常熱応力問題における熱弾性変位ポテンシャル	68
5・2 定常熱応力問題における基本解	73
5・3 定常熱応力問題のための定式化	81
第6章 工学問題への適用例	
6・1 非定常2次元問題における計算例	82
6・2 非定常軸対称問題における計算例	90
6・3 非定常3次元問題における計算例	111
6・4 異種接合材における計算例	113
6・5 内部熱発生のある場合の計算例	118

6・6	定常問題における計算例	125
第7章	結言	134
付録1	線形時間内挿を用いた場合の温度の基本解の時間積分	136
付録2	線形時間内挿を用いた場合の変位の基本解の時間積分	138
付録3	相反定理による定式化	146
付録4	近似式	148
付録5	空間に関する解析積分	150
付録6	非定常軸対称問題における基本解の積分表示	159
	参考文献	163

## 第1章 緒言

### 1・1 まえがき

高温および低温条件下で使用される機械装置の増加に伴い、熱応力を考慮した設計の必要性が増加している。また、機械装置の高精度化のために熱ひずみを考慮した設計をすることが多くなってきている。簡便さのために、熱応力および熱ひずみを定常状態として解析する場合も多いが、それらは実際は、非定常状態である場合が多い。なお、非定常熱応力を求めることが出来るようにしておけば、定常熱応力はその特別な場合として求められる。熱応力理論により、厳密解が求められるのは、単純形状で単純な温度条件の場合に限られる。また、実験による解析法もあるが、一般に装置の製作等に手数が掛かる。そこで、数値解析法により熱応力や熱ひずみを求める試みが続けられてきた。しかし、過去の数値解析手法には数々の問題点があった。例えば、差分法は境界近傍での不規則性に適合しにくいため任意形状の場合に対する数値解析には適していない。有限要素法は任意形状の数値解析に適しているが、領域型の解析手法であるため、領域の要素分割を必要とし、データ作成に多大の時間を要する。体積法は応力集中問題やクラック問題を高精度で解析でき、種々の問題に適用可能な手法であるが、非定常熱応力問題に関してはまだ、ほとんど研究がなされていない。また、境界要素法は非定常熱応力を含まない静弾性問題または定常熱応力の場合であれば、境界だ

### 非定常熱応力を求める方法

実験的手法

解析的手法



けの要素分割で任意形状の解析が行える手法であるが、非定常熱応力解析の場合、従来の方法では領域内部にセル（領域積分のための領域分割）を設定する必要がある。セルを切る手法では、データ作成に時間がかかり実用上の問題がある。境界を要素分割するだけで非定常熱応力の数値解析が可能であれば工学上有益であり、本論文ではこのような取り扱いを対象とする。

## 1・2 内外の研究状況

非定常熱応力の数値解析のために、古くは差分法により研究がなされていた。しかし、差分法は任意形状の数値解析には適していないため、有限要素法による研究が行われるようになった。有限要素法により熱応力分野における数値解析は大きく前進した。解の精度や多量のデータを入力しなければならないというデータ作成の問題を無視すれば、線形の範囲であれば多くの熱応力問題を解くことが可能である。電算機の性能向上が有限要素法の活用を促進したことは言うまでもない。

一方、1980年ごろから有限要素法のデータ作成に長時間必要であるという問題を解決する手法として境界要素法が注目されてきた。境界要素法は、定常温度解析や静弾性問題を中心に発展し、その後、非定常問題や非線形問題への拡張に関する研究がなされている。定常熱応力問題も研究の初期の段階では境界要素法においても領域積分を用いていたが<sup>(25,47)</sup>、1975年にT.A.CruseによってGalerkinテンソルを用い、領域積分を境界積分に変換した定式化が示された。同じく1981年には軸対称問題における定常熱応力解析のための定式化がT.A.Cruseによってなされた<sup>(42)</sup>。また、非定常熱応力問題についてはセルを用いる手法であるが、境界要素法による解法が1977年に発表された<sup>(35,84)</sup>。この手法は熱ひずみを物体力として扱う方法であり、塑性変形を境界要素法により解く手法と本質的に同じ手法である。このセルを用いる手法が境界要素法の書籍に示されている<sup>(2,65,66,67)</sup>。また、現在でも多くの研究者によってセルを用いる方法で研究がなされている<sup>(64)</sup>。非定常温度解析に関しては1970年にF.J.RizzoとD.J.ShippyによってLaplace変換を用いる方法が発表された<sup>(74)</sup>。時間依存の解を用いる方法に関してはR.ButterfieldとG.R.Tomlinによって間接法の定式化が発表された<sup>(38)</sup>。L.C.WrobelとC.A.Brebbiaは内挿関数を用いて非定常温度解析理論を発展させた<sup>(75)</sup>。同

じく、L.C.WrobelとC.A.Brebbiaにより軸対称非定常温度解析の方法が提案された(24)。

著者らは1985年から非定常熱応力問題を境界要素分割だけで、セルを設定せずに解析する手法の研究を始めた。この分野における研究は、ここ数年の発展が目ざましく、その発表年度が重要になる。また、これらの研究も一度に完全なものが発表されたのではなく、すこしずつ改良されたものが発表されてきた。この分野における理論は、現在も発展中である。また、本論文では熱弾性変位ポテンシャルによる変位と応力に等温弾性問題の解を重ね合わせる手法を基礎に置いている。熱応力問題を等温弾性問題に置き換える方法はDahahmelの定理およびGoodierの熱弾性変位ポテンシャルを用いる方法として知られている(1)。なお、理論熱応力解析に関するH.Parkusの書は熱弾性変位ポテンシャルを用いてすべて書かれている(3)。その後も、理論熱応力解析において多くの人々が熱弾性変位ポテンシャルを用いて解を示している。ただし、厳密解析手法では高精度な解が得られるが、球や無限円柱などの単純形状で、しかも温度条件も単純でなければ一般に解くことができない。また、解析解は級数解で示されることが多い。一方、理論熱応力分野において瞬間点熱源または定常問題における点熱源のためのグリーン関数に関する研究も多くなされている(1)。たとえば山田、竹内は持続点熱源を境界近傍に並べ、その解に等温弾性問題における厳密解を重ね合わせる方法を1984年に発表している(14,53)。

1984年にJ.Masindaにより3次元非定常熱応力問題を境界積分方程式により解析する方法が示された(5,6)。ただし、時間に関する積分は数値積分を用いており、具体的な計算方法が明示されていなかった。また、計算例も示されていない。1986年にS.SharpeとS.L.Crouchは、従来の手法では強い特異性のある積分を行う必要があることを避けるために、熱弾性変位ポテンシャルを用いた定式化を示し、領域内部にセルを用いる方法で簡単な計算例を示した(8)。

V.SladekとJ.Sladekにより1983年以降、非定常熱応力問題を境界要素法により解析するための多くの論文が発表された(39,40)。初期の論文ではラプラス変換を用いる方法が示された。1989年に、V.SladekとJ.Sladekにより直接法の形式での境界要素法の適用法が示され、時間積分を解析的に行う方法が明示された(9)。ただし、境界積分方程式の誘導方法に関してはほとんど詳細が示されていない。ま



た、内部応力の式に誤りがあるため、簡単な計算例であるにもかかわらず、厳密解との誤差が10パーセント以上もあるものであった。1988年にD.P.HenryとP.K.Banerjeeによって限られた条件下で、非定常熱応力における領域積分が境界積分に変換できることが示された<sup>(36)</sup>。1989年にG.F.DargushとP.K.BanerjeeはV.Sladekの論文を基に2次元非定常熱応力問題を境界要素法により解析する方法を示した<sup>(18)</sup>。また、1990年に3次元問題における境界要素法の定式化と、その場合に対する一定時間内挿を用いた解析的時間積分の方法を示した<sup>(7)</sup>。日本では、田中によってセルを設定する方法で非定常熱応力の研究がなされたが、数値計算例は示されなかった<sup>(56, 62, 63)</sup>。また、登坂、徐によってラプラス変換を用いる方法が研究された<sup>(57)</sup>。

### 1・3 本論文の内容

本論文では、非定常熱応力問題を境界の要素分割だけで数値解析する手法を示す。内部にセルを設定しないようにするため、本研究では熱弾性変位ポテンシャルを導入した。本手法の概要は、まず、境界要素法により非定常温度場を求め、その温度場に対する熱弾性変位ポテンシャル場を求める。熱弾性変位ポテンシャルを微分することにより、温度による変位場および応力場が求められる。しかし、熱弾性変位ポテンシャルから求められる変位場および応力場は通常、与えられた力学的条件を満足しないので、静弾性問題の解を重ね合わせることにより力学的境界条件を満足させることができる<sup>(1)</sup>。

本数値解析法には、図1・1に示すようにいくつかの定式化の方法が考えられるが、基本は上記の手法に集約することが出来る。本手法は2次元問題、3次元問題、軸対称問題のすべてに適用できる。また、本手法は、領域内部での熱発生を伴う問題にも拡張可能であるとともに、もちろん本論文の特別な場合として定常問題にも適用出来る。

温度解析に必要な基本解は既に求められており、その性質も明かにされているが<sup>2)</sup>、非定常熱応力に関する基本解は十分解明されておらず、非定常熱応力における変位及び応力の基本解から求める必要がある。基本解は熱弾性変位ポテンシャルから求められるので、本論文ではまず、熱弾性変位ポテンシャルから求めた変位及び応力の基本解の性質について述べる。これらの基本解を用いて、変位お

よび応力場を求める必要があり、その定式化において1重層ポテンシャルを用いる方法と1重層および2重層ポテンシャルを用いる方法がある。2重層ポテンシャルを用いる方法では、応力の不連続性を吟味する必要がある。最終的定式化に際し、真の境界条件が満たされるように静弾性の解を重ね合わせることにより熱応力を求める。熱弾性変位ポテンシャルによる解と静弾性の解の重ね合わせの方法にも種々の手法があり、体積力法を用いる方法、直接または間接境界要素法を用いる方法などがある。なお、本論文では、2次元、3次元、軸対称熱弾性問題の順に示す。軸対称問題はある種の2次元問題であり、2次元、軸対称、3次元問題の順に示すべきであるが、本論文では、軸対称の式を3次元問題の式より誘導しており、あえて2次元、3次元、軸対称問題の順に示すことにした。

本定式化には、次の2つの方法が考えられる。物理的考察を重視し、熱源に対する考察からの定式化とポテンシャル論の基礎式よりグリーンの定理を用いた定式化が可能である。後者の定式化は物理的意味が明かでない部分が多い。物理的考察による定式化は、持続熱源を境界上に並べ、これらの熱源により作り出される変位場と応力場を解の重ね合わせにより与えられた力学的条件を満足させることにより、定式化をする方法である。この方法においても、2重層ポテンシャルを境界上に並べる方法も可能である。

ポテンシャル論の基礎式よりグリーンの定理を用いた定式化では、境界要素法の温度場の式を用いて定式化を行う。境界要素法における定式化には、直接法と間接法があり、間接法にも1重層ポテンシャルを用いる方法、2重層ポテンシャルを用いる方法がある。熱応力解析には温度解析と応力解析が必要である。なお、熱応力解析においては熱弾性変位ポテンシャルによる変位と応力の成分を求める必要があり、その求める方法にも間接法と直接法がある。物理的考察から誘導される式もポテンシャル論より誘導される式も本質的には同じものであり、図1・1に示すようにその組合せは多く考えられる。本論文では以下の方法を主に使用している。

	温度	変換	熱による成分	静弾性
(1)	直接法		直接法	直接法
(2)	直接法	変換	間接法	直接法
(3)	直接法 (間接法)		間接法	間接法

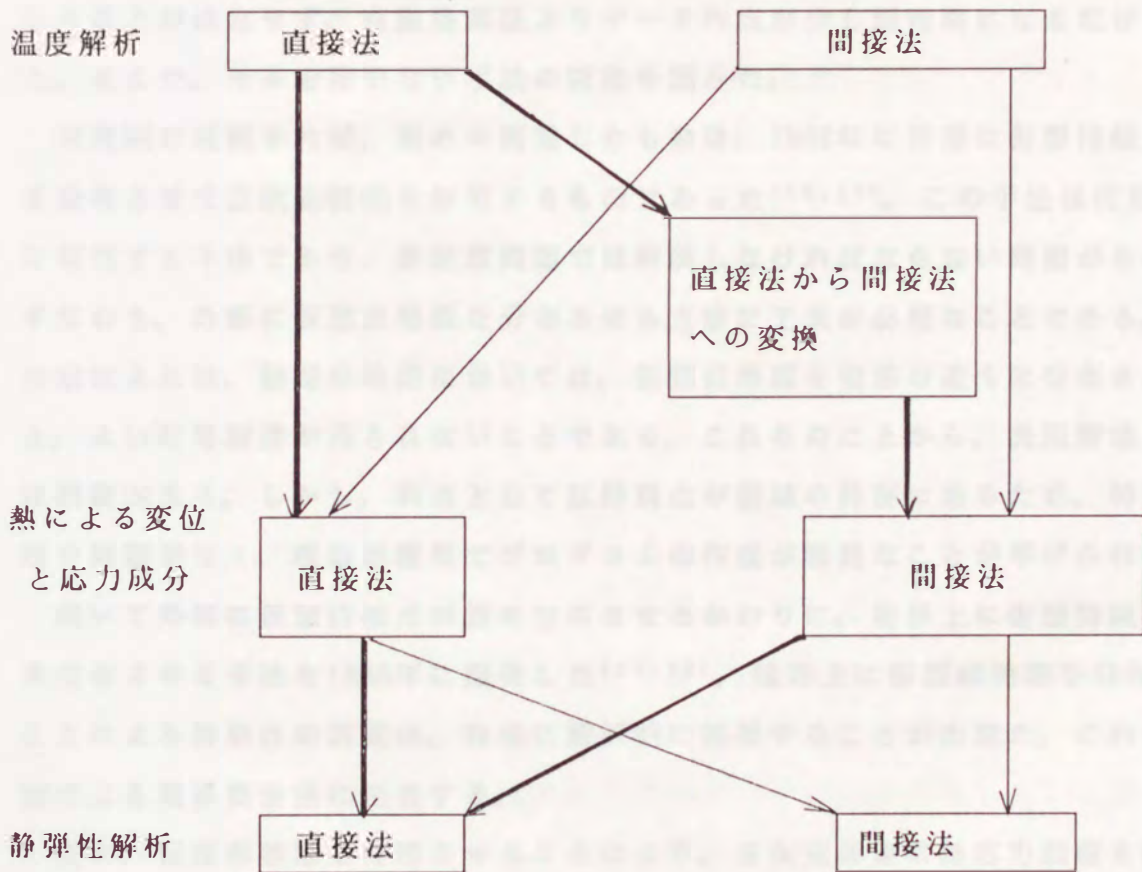


図1.1 熱応力解析における手法の組合せ

本論文では(1)を中心に示し、物理的意味を確立するために(2)の方法についても述べる。(3)についてははクラックや深い切り欠きのある場合の熱応力問題を体積力法により高精度に解析するために述べる。なお、非定常温度解析には通常直接法が用いられていることに注意しなければならない。図1・1の組合せには、それぞれ長所と短所があるが、実用上現実的でない組合せもある。

次に本論文の定式化が行われるまでの経過を述べる。非定常温度解析に関してはセルを用いない直接法の定式化は既に示されていたが<sup>(2)</sup>、非定常熱応力解析を従来の境界要素法で行う場合、内部にセルを設定する必要があった。1885年にセルを設定する非定常熱応力解析プログラムを作成してみたが<sup>(18,26)</sup>、実用上問題があった。すなわち、境界要素法の最大の利点であるデータ作成が容易であるということが成立せず、有限要素法よりデータ作成が少し短時間になるだけであった。そこで、セルを用いない手法の開発を試みた。

開発順に説明すれば、初めに開発したものは、1986年に外部に仮想持続点熱源を分布させて2次元問題を解析するものであった<sup>(15,17)</sup>。この手法は代用電荷法に相当する手法であり、非定常問題では解決しなければならない問題があった。すなわち、外部に仮想点熱源を分布させる方法に工夫が必要なことである。この方法によれば、初期の時間においては、仮想点熱源を境界の近くに分布させないと、よい計算精度が得られないことである。これらのことから、汎用解法としては問題がある。しかし、利点としては特異点が領域の外部にあるため、特異点処理の問題がなく、理論が簡単でプログラムの作成が容易なことが挙げられる。

続いて外部に仮想持続点熱源を分布させるかわりに、境界上に仮想持続線熱源を分布させる手法を1986年に開発した<sup>(11,18)</sup>。境界上に仮想線熱源を分布させることによる特異点の問題は、容易に解析的に処理することが出来た。これは間接法による境界要素法に相当する。

次に、仮想面熱源を作用させることにより、3次元非定常熱応力問題も解決できることを1987年に示した<sup>(12,21)</sup>。軸対称問題も、3次元の解の面積分を円周方向に数値積分すれば解決できることを1988年に示した<sup>(20)</sup>。この解法は、軸対称体が非軸対称加熱された場合にも適用できる。上述の軸対称問題を解析する手法では、円周方向に数値積分しなければならず、計算精度、計算時間に問題がある。そこで、円周方向に解析的に積分する手法を1988年に示した<sup>(22,23)</sup>。さらに、内

部に熱発生を伴う場合に、内部にセルを設定しない数値解析手法を1988年示した<sup>(19)</sup>。この手法は、複雑な熱発生状態での非定常熱応力分布を求めることには適していないが、単純な熱発生分布の場合、とりわけ、均一熱発生の場合に有効である。

以上、間接法による取り扱いについて述べたが、境界要素法では直接法が多く用いられている。直接法および間接法にはそれぞれ長所、短所があるが、直接法を用いる研究者が多くいることを考慮すると直接法による手法を示しておく必要があった<sup>(28)</sup>。1989年から1990年にかけて、直接法による手法を示した。なお、直接法を用いて熱弾性変位ポテンシャルによる解と静弾性の解の重ね合わせを行う場合、応力の不連続性を考察しておかねばならない。直接法においては、応力境界値問題に対しても変位境界値問題の式と同じ形式で示すことが可能であり、このように表示することにより、特異点の問題が軽減された<sup>(13, 29)</sup>。

本研究では時間積分に関し下記の(1)の方法を初めに研究し、次に高次の時間内挿関数の適用が容易になるように(2)の方法を研究した。

(1) 温度に関する基本解→時間積分→熱弾性変位ポテンシャル

(2) 温度に関する基本解→熱弾性変位ポテンシャル→時間積分

すなわち、(1)では時間積分を解析的に行った温度場より熱弾性変位ポテンシャルを誘導し、熱による変位および応力を求める手法であり、物理的考察を行いながら定式化を試みた。(2)では温度における基本解より熱弾性変位ポテンシャルを誘導し、それを解析的に時間積分する方法を示した。後者の手法では数学的に統一がとれていて、高次要素に対応しやすいので本論文では、主に(2)の方法を用いて述べる。なお、温度における基本解より温度による変位や応力を求める手法での基本解はNowackiにより求められていた解と基本的には一致している<sup>(83)</sup>。しかし、本論文では3次元の基本解をガンマ関数で表現しているので、高次要素などへの拡張が容易である。なお、本論文における手法は非定常熱応力解析のみならず、定常熱応力解析にも適用できることを1988年から1990年にかけて発表した<sup>(29, 30, 31, 32)</sup>。

次に各章の概要を示す。第2章に本研究に必要な熱応力の古典的基礎理論を示す。また、境界要素法による非定常温度解析の基礎と従来の境界要素法による非定常熱応力解析法とGalerkinテンソルを用いた定常熱応力解析法を示し、その間

題点を述べた。第3章では2次元、3次元および軸対称問題における基本解の誘導と基本解の特性を示す。また、物理的意味を考察するために間接法による定式化も示す。第4章では非定常熱応力問題のための定式化を示す。定式化の方法としては解の重ね合わせによるもの、直接法境界要素法によるもの、体積力法によるものを示す。また、熱応力は熱膨張係数の異なる異種接合材で問題が発生する場合が多いので、異種接合材への適用方法を4・4節に示す。4・5節では内部熱発生を伴う非定常熱応力問題を内部にセルを設定しないで解析する方法を示す。

第5章では本論文における熱弾性変位ポテンシャルを用いる方法が定常熱応力問題にも適用できることを示す。従来はGalerkinテンソルを用いて定式化がなされてきたが、熱弾性変位ポテンシャルを用いる方法と等価であることを示す。

第6章の工学問題への適用では、本論文に示された定式化の方法で作成されたプログラムによる数値計算結果が解析解より得られた結果とよく一致することを示す。また、古典的理論解析では解が求められない問題に本手法を適用し、本手法の有効性を示す。

## 第2章 研究のための基礎理論

本章では本研究に必要な熱応力に関する基礎理論および非定常温度解析における境界要素法の基礎を示す。2・3節では従来の境界要素法による非定常熱応力の解析方法を示す。2・4節ではGlerkinベクトルを用いた定常熱応力の境界要素解析を示す。

### 2・1 熱応力理論の基礎

熱伝導の微分方程式は温度を $T$ 、時間を $t$ 、熱発生量を $W(t)$ とすると、次式で与えられる<sup>(1)</sup>。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{W}{c\rho} \quad (2.1)$$

ただし、 $\kappa$ は温度伝達率、 $c$ は比熱、 $\rho$ は密度である。熱伝導率 $\lambda$ と温度伝達率 $\kappa$ の間には $\kappa = \lambda / (c\rho)$ の関係がある。

熱応力解析における理論的基礎を示す。ひずみを $\varepsilon_{ik}$ 、ポアソン比を $\nu$ 、線膨張係数を $\alpha$ 、横弾性係数を $G$ 、 $\delta_{ij}$ をクロネッカのデルタとすると、一般化したフックの法則は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha T \delta_{ij} \quad (2.2)$$

式(2.2)を応力成分について表すと次式になる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2G \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \varepsilon_{kk} - \frac{1+\nu}{\nu} T \right) \delta_{ij} \right] \\ &= 2G \varepsilon_{ij} + \lambda_L e - \beta T \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし、

$$\beta = E / (1-2\nu) = \alpha (3\lambda_L + 2\mu) \quad (2.4)$$

$$\lambda_L = \nu E / [(1+\nu)(1-2\nu)] \quad (2.5)$$

$$\mu = G \quad (2.6)$$

であり、 $\lambda_L$ と $\mu$ はLameの定数である。本論文では、慣性項を無視し、温度とひ

ずみ場の連成項は考慮しないものとする。熱ひずみによる慣性項および連成項は無視しても実用上は差し支えない場合が多い。

熱弾性方程式は次式で与えられる。

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda_L + \mu) u_{k, ki} = \beta T_{, i} \quad (2.7)$$

外力  $t_i$  と応力  $\sigma_{ij}$  の関係は境界の外向き単位法線ベクトルの成分  $n_j$  とすると次式で与えられる。

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.8)$$

本研究と関連の深い Duhamel の相似定理とは直接熱応力問題を考えるかわりに仮想物体力 ( $\beta \partial T / \partial x_i$ ) および仮想表面力 ( $\beta T n_j$ ) が作用する等温弾性問題を解いて、その結果得た応力成分に流体圧  $\beta T \delta_{ik}$  を合成すればよいというものである。

Goodier は熱弾性変位ポテンシャルを用いた、すべての熱応力問題に適用できる一般解法を示している。この解法は変位成分に関する熱弾性変位ポテンシャルという一つの関数を利用し、熱応力問題を等温弾性問題に帰着させてしまう方法である。まず、定常熱応力問題の場合について述べる。式 (2.7) を直接解く代わりに、次式の関数  $\Phi$  を導入する。

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

上式より式 (2.7) は次式になる。

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial x_i} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

上式の  $\Phi$  は次のポアソン方程式の解とすれば満足される。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (2.11)$$

ここで、 $\Phi$  は熱弾性変位ポテンシャルである。ひずみは熱弾性変位ポテンシャルを用いると次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.12)$$



応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij} \right) \quad (2.13)$$

熱弾性変位ポテンシャルから求められる変位と応力は通常、与えられた力学的条件を満足しないので、等温弾性問題の解を重ね合わせなければならない。ポテンシャル論より式(2.11)の解の1つは次式で与えられる。

$$\Phi(x, y, z) = - \frac{\mathfrak{m}}{4\pi} \int \int \int_V \frac{T(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}} \quad (2.14)$$

ただし、 $\mathfrak{m} = (1+\nu)\alpha / (1-\nu)$ である。非定常熱応力問題の場合も同様に扱うことができ、式(2.1), (2.11)より次式が得られる。

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \kappa \alpha \nabla^2 T \quad (2.15)$$

この式を積分すれば次式が求められる。

$$\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \kappa \alpha \int_0^t T dt + \Phi_0 + t \Phi_1 \quad (2.16)$$

$\Phi_1$ は調和関数( $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ )であり、 $\Phi_0 = \Phi_{t=0}$ である。すなわち、初期温度を $T_0$ とすれば、

$$\nabla^2 \Phi_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T_0 \quad (2.17)$$

であり、 $T_0$ を基準にして温度 $T$ を考えると、 $T_{t=0} = 0$ より $\Phi_0 = 0$ とおいてよい。このようにして非定常熱応力問題の準静的取扱いの際には、時間 $t$ は単なるパラメータにすぎなくなる。

## 2・2 境界要素法による非定常温度解析

境界要素法による非定常温度解析はかなりよく研究がなされている。非定常の温度解析においても、直接法および間接法が用いられているが<sup>(16)</sup>、よく使用されている直接法の定式化を用いる。まず、2次元、3次元および軸対称問題における非定常温度解析における基本解について述べる。温度を $T$ 、時間を $t$ 、温度伝導率を $\kappa$ とおくと非定常拡散方程式は、式(2.1)より2次元の場合

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\kappa W}{\lambda} \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (2.18)$$

3次元の場合

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\kappa W}{\lambda} \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \quad (2.19)$$

軸対称の場合

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\kappa W}{\lambda} \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \quad (2.20)$$

で与えられる。ソース点 $\xi$ と観測点 $x$ の距離を $r$ 、観測時間を $t$ とすると、時間依存の基本解 $T^*(x, t, \xi, \tau)$ およびその法線方向微分は、2次元の場合

$$T^*_2(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi\kappa(t-\tau)} \exp\left[\frac{-r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right] \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial T^*_2(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} = \frac{-2\pi}{[4\pi\kappa(t-\tau)]^2} \exp\left[\frac{-r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.22)$$

3次元の場合

$$T^*_3(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{\{4\pi\kappa(t-\tau)\}^{3/2}} \exp\left[\frac{-r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right] \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial T^*_3(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} = \frac{r}{16\pi^{3/2}\{\kappa(t-\tau)\}^{5/2}} \exp\left[\frac{-r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.24)$$

で与えられる。軸対称の場合の基本解 $T^*_2$ は、式(2.23)の3次元の基本解 $T^*_3$ を円周方向に解析積分を行うことにより求められ、次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.20)$$

かつ、図2.1に示すようにソース系20極座標  $(r_0, z_0)$ 、観測点Pの座標が  $(r, z)$  となす。また、 $r_0^2 = r_0^2 + z_0^2$ 、 $r_0^2 = r^2 + z^2$  は(2.1)式第一項を計算する際に用いられる。正(負)の電荷がそれぞれ  $+q$  ( $-q$ ) である。

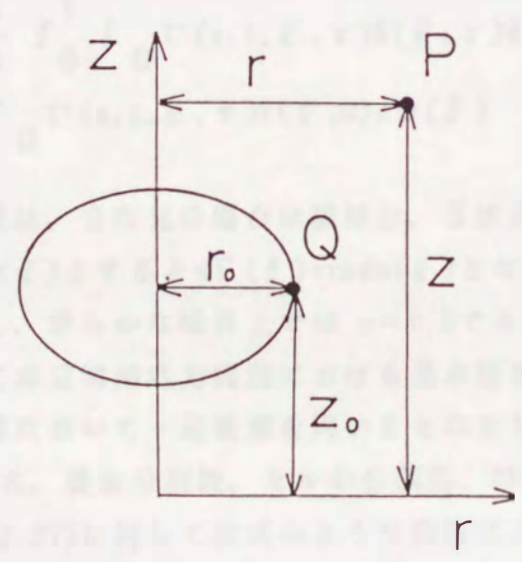


図2.1 軸対称問題における座標

$$T^*_{J}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^{2\pi} T^*_{3} d\theta$$

$$= \frac{1}{\{4\pi \kappa (t-\tau)\}^{3/2}} \exp\left[\frac{-s}{4\kappa(t-\tau)}\right] I_0\left[\frac{e}{2\kappa(t-\tau)}\right] \quad (2.25)$$

ただし、図2.1に示すようにソース点Qの座標を $(r_0, z_0)$ 、観測点Pの座標を $(r, z)$ とする。また、 $s=r^2+r_0^2+(z-z_0)^2$ 、 $e=rr_0$ 、 $I_i(x)$ は*i*次第一種変形Bessel関数である。式(2.25)の法線方向微分係数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial T^*_{J}(x, t, \xi, \tau)}{\partial n}$$

$$= \frac{1}{8\pi \{\kappa(t-\tau)\}^{5/2}} \exp\left[\frac{-s}{4\kappa(t-\tau)}\right] \left\{ r_0 I_0\left[\frac{e}{2\kappa(t-\tau)}\right] \right.$$

$$\left. - r I_1\left[\frac{e}{2\kappa(t-\tau)}\right] n_r - (z-z_0) I_0\left[\frac{e}{2\kappa(t-\tau)}\right] n_z \right\} \quad (2.26)$$

温度場に対する非定常積分方程式は次式で示される<sup>[2,9]</sup>。

$$cT(x, t) = \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} [T^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} - \frac{\partial T^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau)] d\Gamma(\xi) d\tau$$

$$+ \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} T^*(x, t, \xi, \tau) W(\xi, \tau) d\Omega(\xi) d\tau$$

$$+ \int_{\Omega} T^*(x, t, \xi, \tau) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \quad (2.27)$$

境界における積分は、2次元の場合は線積分、3次元の場合は面積分、軸対称の場合は、境界上を $s(\xi)$ とすると $d\Gamma(\xi)=r_0 ds(\xi)$ となる。なお、式(2.27)における*c*は内点では  $c=1$ 、滑らかな境界上では  $c=0.5$  であり、外点では  $c=0$  である。これらの式を用いて非定常熱応力問題における基本解を誘導する。

時間および境界において一定要素を用いるものとし、境界上の温度および温度勾配を $T^{nf}$ 、 $q^{nf}$ とする。要素分割数、セルの分割数、時間分割数をそれぞれ*N*、*L*、*F*とし、離散化すると式(2.27)に対して次式のような離散化方程式が得られる。

$$cT(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F T^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* d\tau d\Gamma_n \\
& + \frac{\kappa}{\lambda} \sum_{\varrho=1}^L \sum_{f=1}^F w^{f\varrho} \int_{\Omega_1} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* d\tau d\Omega_1 \\
& + \sum_{\varrho=1}^L T^{1\varrho} \int_{\Omega_1} T^* d\Omega_1
\end{aligned} \tag{2.28}$$

式(2.28)の時間積分は次式のように分離できる。

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^*(x, t, \xi, \tau) d\tau = \int_{t_{f-1}}^t T^*(x, t, \xi, \tau) d\tau - \int_{t_f}^t T^*(x, t, \xi, \tau) d\tau \tag{2.29}$$

$a_f = r^2 / \{4\kappa(t - t_f)\}$ と置くと、時間積分は解析的に行える。また、式(2.29)の前半の時間積分も同様に解析積分が行える。2次元の場合、時間積分は次式のように与えられる。

$$\int_{t_f}^t T^*_2(x, t, \xi, \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi\kappa} E_1(a_f) \tag{2.30}$$

$$\int_{t_f}^t \frac{\partial T^*_2(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau = \frac{1}{2\pi\kappa r} \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-a_f) \tag{2.31}$$

3次元の場合の時間積分は次式のように与えられる。

$$\int_{t_f}^t T^*_3(x, t, \xi, \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi^{3/2}\kappa r} \Gamma(1/2, a_f) \tag{2.32}$$

$$\int_{t_f}^t \frac{\partial T^*_3(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau = \frac{1}{2\pi\kappa} \Gamma(1/2, a_f) \frac{\partial r}{\partial n} \tag{2.33}$$

$\Gamma(\cdot)$ は第2種不完全ガンマ関数である。軸対称の場合はベッセル関数を級数表現し、 $a_f = s / \{4\kappa(t - \tau)\}$ とにおいて時間積分を行う<sup>(24)</sup>。

$$\begin{aligned}
& \int_{t_f}^t T^*_J(x, t, \xi, \tau) d\tau \\
& = \frac{1}{2\kappa(\pi s)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} \Gamma\left(2k + \frac{1}{2}, a_f\right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_f}^t \frac{\partial \Gamma^*_{\cdot J}(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau \\
&= -\frac{1}{\kappa (\pi s)^{1/2}} [r n_r - [z - z_0] n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} \Gamma\left(2k - \frac{1}{2}, a_r\right) \\
&\quad - r n_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k+1}}{(k!)^2} \Gamma\left(2k - \frac{1}{2}, a_r\right) \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Bessel関数の引き数  $c = e / \{2\kappa(t_f - \tau)\}$  が大きい場合、変形Bessel関数の漸近展開を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{t_f}^t \Gamma^*_{\cdot J}(x, t, \xi, \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi \kappa e^{1/2}} \{E_1(B_f) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_1(k) b^k}{k! (16c)^k} \Gamma(-k, B_f)\} \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_f}^t \frac{\partial \Gamma^*_{\cdot J}(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} d\tau \\
&= -\frac{1}{2\kappa \pi s e^{1/2}} \left\{ -\frac{1}{b} \exp(-B_f) [(r - r_0) n_r - (z - z_0) n_z] \right. \\
&\quad \left. + [r n_r - (z - z_0) n_z] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_1(k) b^{k-1}}{k! (16c)^k} \Gamma(1-k, B_f) \right. \\
&\quad \left. - r n_r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_2(k) b^{k-1}}{k! (16c)^k} \Gamma(1-k, B_f) \right\} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

ただし、 $b = 1 - 2c$ ,  $B_f = a_f b$ 。また、 $f_1(k)$ ,  $f_2(k)$ は

$$f_1(k) = (2k-1)^2 (2k-3)^2 \cdots 1 \quad (2.38)$$

$$f_2(k) = (-1)^k [4 - (2k-1)^2] [4 - (2k-3)^2] \cdots [4-1] \quad (2.39)$$

である。

つぎに2次元問題における特異点の処理について述べる。式(2.28)の境界に関する線積分はガウス積分により行なえる。ただし、作用点が観測点と一致する場合、特異点の問題が生じるので、解析的に線積分を行った。すなわち、要素は一定要素とし、要素の長さを  $2R$ 、 $\beta = R^2 / \{4\kappa(t - t_f)\}$  とすると線積分は次式のようなになる。

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^{t_f} \Gamma^*_{\cdot 2} d\tau d\Gamma = \frac{1}{4\pi \kappa} A_1 \quad (2.40)$$

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^{t_F} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial n} d\tau d\Gamma = 0. \quad (2.41)$$

ただし、 $A_1$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-R}^R E_1(ar) dr \\ &= 2R(2-C) - 2R \ln(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2R}{(2n+1)n \cdot n!} \beta^n \end{aligned} \quad (2.42)$$

ただし、 $C$ はEuler定数である。以上のように境界上の線積分は解析的に処理することができる。

以上は一定時間内挿を用いて述べたが、線形時間内挿を用いた場合も、解析積分が可能であり、付録1にその詳細を示す。なお、時間および空間に関して数値積分を用いた解析例もあるが、解の精度および計算時間に関して問題があることは明らかである。

軸対称の非定常温度解析に関する特異点の処理方法は複雑である<sup>(24)</sup>。そこで、著者らはKummer関数（合流形超幾何級数）を用いる定式化を示し、横等方性体まで拡張した<sup>(49, 50, 54)</sup>。

### 2・3 従来の非定常熱応力解法

本論に入る前に、従来の境界要素法における非定常熱応力解析について述べる。非定常熱応力を境界要素法で解析する場合、従来は熱による影響を初期ひずみまたは初期応力と見なして定式化がなされてきた。汎用境界要素法システムBEASYもこの手法を用いている。まず、熱による影響を初期ひずみと見なした場合について述べる。平面ひずみ問題において、 $\alpha$ を熱膨張係数、 $\Delta T$ を温度差とすると、熱による影響を初期ひずみ

$$\varepsilon^{\theta}_{ij} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (2.43)$$

と見なすことが出来る<sup>(2)</sup>。境界を $\Gamma$ 、領域を $\Omega$ とすると、境界要素法の基礎式は次式で与えられる。

$$c_{ij}u_j = \int_{\Gamma} u^*_{ij} p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*_{ij} u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^*_{jki} \varepsilon^{\theta}_{jk} d\Omega \quad (2.44)$$

$u^*_{ij}$ ,  $p^*_{ij}$ は2次元弾性問題におけるKelvin解であり、 $\nu$ をポアソン比とすると、 $\sigma^*_{ijk}$ は次式のようなになる。

$$\sigma^*_{jki} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ki} - r_{,i} \delta_{jk}) + \nu r_{,i} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \quad (2.45)$$

内部応力は<sup>(2)</sup>

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} u^*_{ijk} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*_{ijk} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^*_{ijkl} \varepsilon^{\theta}_{kl} d\Omega + f_{ij}(\varepsilon^{\theta}_{kl}) \quad (2.46)$$

で与えられる。ただし、 $G$ を横弾性係数とすると、

$$f_{ij} = \frac{-G(1+\nu)\alpha T \delta_{ij}}{(1-\nu)} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma^*_{ijkl} = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \{ 2(1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j}) - 2r_{,i} r_{,j} \delta_{kl} \\ & - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\nu(\delta_{iir} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jkr} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ikr} r_{,l} r_{,j} + \delta_{jlr} r_{,i} r_{,k}) \\ & - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \delta_{kl} \} \quad (2.48) \end{aligned}$$



である。以上の定式化においては領域積分が必要であり、図2.2(a)に示すように内部にセルを設定する必要がある。内部にセルを設定することにより、境界要素法の利点が著しく損なわれる。本論文では図2.2(b)のように境界要素分割のみで解析することを目的としている。また、 $\sigma^*_{ijkl}$ は強い特異性を有しており、取り扱いが困難である。すなわち、厳密に積分を評価しておかなければ正しい解を得ることはできない。領域積分における誤差により解の信頼性が損なわれることも指摘しておかなければいけない。本定式化による解析も試みており、セルを一定要素とした場合、以下の手法が有効であった。

$\sigma^*_{ijkl}$ は $r \rightarrow 0$ において強い特異性をもっており、種々の解法が考えられているが<sup>(47)</sup>、以下の方法を用いることもできる<sup>(18)</sup>。セルは一定要素とし、図2.2に示すように、セルの内部にセルより小さな円を考える。円の部分の積分は

$$\int \int \varepsilon^{\alpha}_{ij} \sigma^*_{ijkl} r d\theta dr = \varepsilon^{\alpha}_{ij} \int \int \sigma^*_{ijkl} r d\theta dr \quad (2.49)$$

$$\int \sigma^*_{ijkl} r d\theta = 0 \quad (2.50)$$

となり式(2.49)は零となる。周りの部分はガウス積分を利用した。内点が境界に近い場合、式(2.46)の前から2つの積分は2重指数積分により行なった。以上の定式化では、セルを用いねばならず、境界要素法の利点が著しく損なわれていたことが明かである。なお、強い特異性の問題があり、解の精度にも問題がある。これらのことから、セルを用いなくて境界要素だけによる数値解析法を開発するという本論文の目的が有益なことであることが分かる。



図2.2 境界要素法

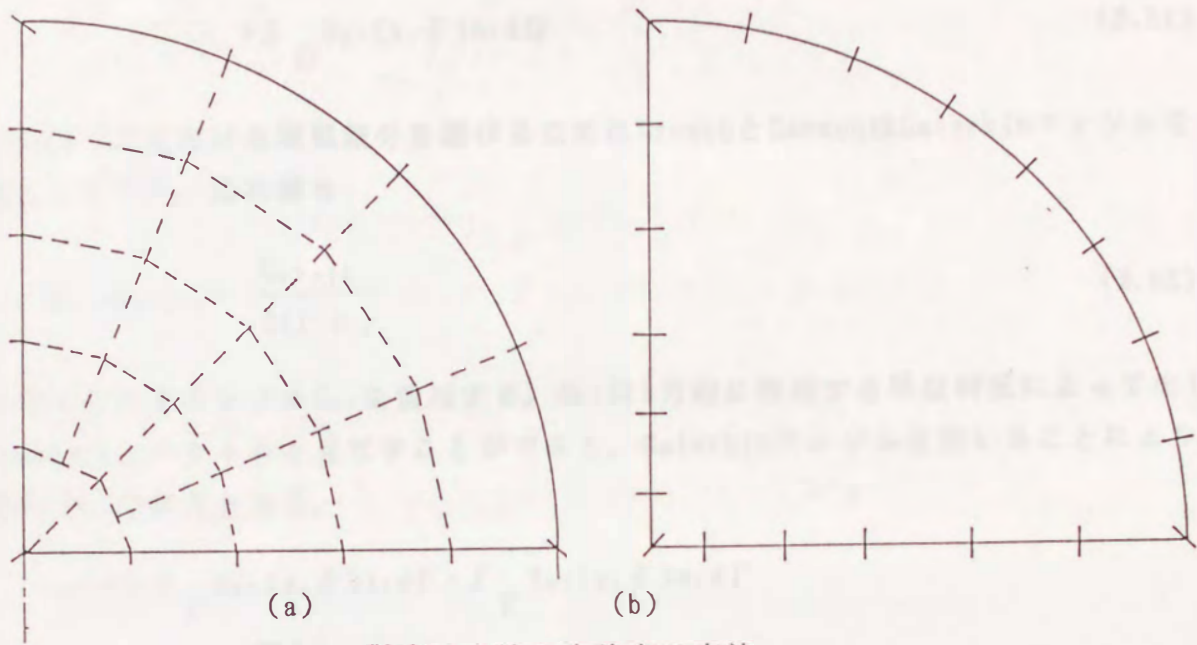


図2.2 従来の方法と本論文の方法

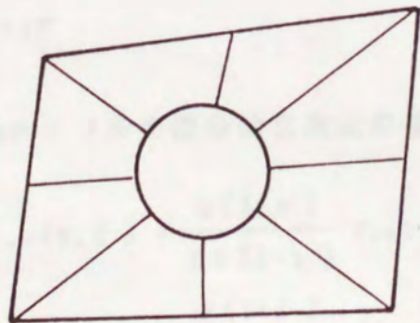


図2.3 特異点処理

## 2・4 従来の境界要素法による定常熱応力解析

定常熱応力解析においても、次式に示すように初期には領域積分が行われていた。

$$u_k(x) = \int_{\Gamma} U_{ki}(x, \xi) t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(x, \xi) u_i d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}(x, \xi) b_i d\Omega \quad (2.51)$$

式(2.51)における領域積分を避けるためにCrouchとDansonはGalerkinテンソルを導入した<sup>(51)</sup>。基本解を

$$U_{ki} = G_{ki,ij} - \frac{G_{ki,ji}}{2(1-\nu)} \quad (2.52)$$

で与えられるテンソル $G_{ki}$ を使用する。 $G_{ki}$ は $k$ 方向に作用する単位荷重によって生じるGalerkinベクトルと見なすことができる。Galerkinテンソルを用いることにより、式(2.51)は次式となる。

$$u_k(x) = \int_{\Gamma} U_{ki}(x, \xi) t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(x, \xi) u_i d\Gamma + \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \int_{\Gamma} \{T(\xi) G_{ki,ij}(x, \xi) - G_{ki,i}(x, \xi) T_{,jnj}\} d\Gamma \quad (2.53)$$

2次元の基本解に対応するGalerkinテンソルは

$$G_{ki} = \frac{1+\nu}{4\pi E} \delta_{ki} r^2 \ln \frac{1}{r} \quad (2.54)$$

であり、3次元の基本解に対応するGalerkinテンソルは

$$G_{ki} = \frac{1+\nu}{4\pi E} \delta_{ki} r \quad (2.55)$$

である。Galerkinテンソルの微分は2次元の場合、式(2.54)より次式で与えられる。

$$\frac{\alpha E}{2(1-\nu)} G_{ki,i}(x, \xi) = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} r_{,kr} \left( \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.56)$$

$$\frac{\alpha E}{2(1-\nu)} G_{ki,ij}(x, \xi) = \frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \left( \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) n_k - n_m r_{,m\Gamma, k} \right\} \quad (2.57)$$

3次元の場合、次式で与えられる。

$$\frac{\alpha E}{2(1-\nu)} G_{k i, i}(x, \xi) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} r_{, k} \quad (2.58)$$

$$\frac{\alpha E}{2(1-\nu)} G_{k i, i j}(x, \xi) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{n_k - n_m r_{, m} r_{, k}}{r} \right\} \quad (2.59)$$

内部応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) = & \int_{\Gamma} U_{ki}(x, \xi) t_i ds - \int_{\Gamma} T_{ki}(x, \xi) u_i d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \{T(\xi) S_{ij}(x, \xi) - V_{ij}(x, \xi) T_{, j}(\xi) n_j(\xi)\} d\Gamma \\ & - \frac{\alpha}{1-2\nu} T(x) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.60)$$

2次元の場合の  $S_{ij}(x, \xi)$  および  $V_{ij}(x, \xi)$  は次式で与えられる。

$$S_{ij}(x, \xi) = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\nu)r} [n_m r_{, m} \left( \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2r_{, i} r_{, j} \right) + n_i r_{, j} + n_j r_{, i}] \quad (2.61)$$

$$V_{ij}(x, \xi) = \frac{\alpha E}{\pi(1-\nu)} \left\{ r_{, i} r_{, j} + \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \left( \frac{1+2\nu}{2} - \ln \frac{r}{r} \right) \right\} \quad (2.62)$$

3次元の場合の  $S_{ij}(x, \xi)$  および  $V_{ij}(x, \xi)$  は次式で与えられる。

$$S_{ij}(x, \xi) = \frac{\alpha E}{8\pi(1-\nu)r^2} [n_m r_{, m} \left( \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 3r_{, i} r_{, j} \right) + n_i r_{, j} + n_j r_{, i}] \quad (2.63)$$

$$V_{ij}(x, \xi) = \frac{\alpha E}{8\pi(1-\nu)r} \left\{ r_{, i} r_{, j} - \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \right\} \quad (2.64)$$

2次元問題の場合、式(2.52)より基本解として次式を用いねばならない。

$$U_{ki} = \frac{1+\nu}{4E(1-\nu)} \left\{ [(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} - \frac{7-8\nu}{2}] \delta_{ki} + r_{, k} r_{, i} \right\} \quad (2.65)$$

本論文に示す熱弾性変位ポテンシャルを使用する解法では上式(2.65)を用いる必要がない。

### 第3章 非定常熱応力問題における基本解

非定常温度解析における境界要素法をもとに、非定常熱応力問題における熱弾性変位ポテンシャルを用いて基本解を誘導する。また、間接法の表現を用いて、物理的意味を考察する。

#### 3・1 2次元非定常熱応力問題における基本解の誘導と特性

熱弾性変位ポテンシャルを用いて基本解を誘導する<sup>(8)</sup>。温度分布 $T(\xi, t)$ が式(2.10)によて得られたとする。また、 $T(\xi, t)$ は次式で表すことができる。

$$T(\xi, t) = \int_0^t \frac{\partial T(\xi, t')}{\partial t'} dt' + T(\xi, 0) \quad (3.1)$$

$T(\xi, 0)$ は初期温度であり、ポテンシャル論より熱弾性変位ポテンシャル $\Phi$ は

$$\Phi(x, t) = \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) T(\xi, t) d\Omega(\xi) \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで、ポアソン比を $\nu$ 、線膨張係数を $\alpha$ で表すと、平面応力状態の場合 $\kappa = \alpha(1+\nu)$ 、平面ひずみの場合 $\kappa = \alpha(1+\nu)/(1-\nu)$ である。ただし、関数 $\eta(x, \xi)$ が、次式を満足するように決められているものとする。

$$\nabla^2 \eta^*(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (3.3)$$

式(3.1)、(3.2)より

$$\Phi(x, t) = \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) \int_0^t \left[ \frac{\partial T(\xi, t')}{\partial t'} + T(\xi, 0) \right] dt' d\Omega(\xi) \quad (3.4)$$

式(2.18)、(3.4)より

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = & \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) \int_0^t \left[ \kappa \nabla^2 T(\xi, t') + \frac{\kappa}{\lambda} W(\xi, t') \right] dt' d\Omega(\xi) \\ & + \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

式(3.5)における積分で、グリーンの定理を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\phi(x, t) = & \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ \eta^*(x, \xi) \frac{\partial T(\xi, t')}{\partial n(\xi)} \right. \\
& \left. - T(\xi, t') \frac{\partial \eta^*(x, \xi)}{\partial n(\xi)} \right] d\Gamma(\xi) dt' \\
& + \kappa \int_0^t \int_{\Omega} T(\xi, t') \nabla^2 \eta^*(x, \xi) d\Omega(\xi) dt' \\
& + \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) \int_0^t \frac{\kappa}{\lambda} W(\xi, t') dt' d\Omega(\xi) \\
& + \int_{\Omega} \eta^*(x, \xi) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

積分関係式

$$\int_0^t \int_0^{t'} f(t', \tau) g(\tau) d\tau dt' = \int_0^t \int_{\tau}^t f(t, \tau) dt g(\tau) d\tau \tag{3.7}$$

および、 $\eta^*(x, \xi)$ は定常状態における核関数であることより、式(3.6)は次式のよ  
うに変形することができる。

$$\begin{aligned}
\phi(x, t) = & \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ \phi^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \right. \\
& \left. - \frac{\partial \phi^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \\
& + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} \phi^*(x, t, \xi, \tau) W(\xi, \tau) d\Omega(\xi) d\tau \\
& + \int_{\Omega} \phi^*(x, t, \xi, 0) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\phi^*_2(x, t, \xi, \tau) = & -\kappa \int_{\tau}^t T^*(x, t', \xi, \tau) dt' + \eta^*(x, \xi) \\
= & \frac{\kappa}{2\pi} [-2E_1(a) + \ln(r)] \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi^*_2(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} = \frac{\kappa}{2\pi r} [1 - \exp(a)] \frac{\partial r}{\partial n} \tag{3.10}$$

なお、 $a=r^2/\{4\kappa(t-\tau)\}$ 、 $E_1$ は積分指数関数である。ここで、ポテンシャル論の用  
語を用いて、 $\phi^*$ を一重層熱弾性変位ポテンシャル、 $\partial \phi^*/\partial n$ を2重層熱弾性変位

ポテンシャルと呼ぶことにする。  $\delta_{ij}$  をクロネッカのデルタとすると、熱弾性変位ポテンシャル  $\Phi$  による変位  $u'_i$  および応力成分  $\sigma'_{ij}$  は次式で与えられる<sup>(1)</sup>。

$$u'_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

$$\sigma'_{ij} = 2G \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \Phi \right) \quad (3.12)$$

式(3.11)に式(3.8)を代入すると次式が求められる。

$$\begin{aligned} u'_i(x, t) = & \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u_i^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u_i^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \\ & + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} u_i^*(x, t, \xi, \tau) W(\xi, \tau) d\Omega(\xi) d\tau \\ & + \int_{\Omega} u_i^*(x, t, \xi, 0) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ただし

$$u_i^*(x, t, \xi, \tau) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{1}{r} [1 - \exp(-a)] \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} \\ & = \frac{\mu}{2\pi r^2} \left\{ (n_i - 2) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n} [1 - \exp(-a)] + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n} a \exp(-a) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

である。式(3.12)に式(3.8)を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(x, t) = & \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \\ & + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, \tau) W(\xi, \tau) d\Omega(\xi) d\tau \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, 0) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \quad (3.16)$$

ただし

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*2(x, t, \xi, \tau) &= \frac{G_m}{\pi r} \left\{ -[\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}] [1 - \exp(-a)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right] \exp(-a) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^*2}{\partial n} &= \frac{2mG}{\pi r^3} \left\{ -2a^2 [-\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}] \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-a) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right. \\ &\quad \left. \times [1 - \exp(-a) - a \exp(-a)] \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

である。以上の式より非定常熱応力の基本解が得られた。これらの基本解の内  $u_i^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$  は無限体に瞬間点熱源が発生した場合の変位と応力にあたり、Nowackiらによって導かれたのと同じものである。変位場および応力場を求めるにはこれらの基本解を時間および空間に関して積分をする必要がある。ここで、直接境界要素法を使用しているが、境界の外部での変位場および応力場は零ではないことに注意しておかねばならない。以上の表現では物理的意味が分かり難いので空間および時間に関して離散化し、時間に関して解析的に積分しておく。弾性解析に用いる Kelvin の解 (2次元) は、線積分を行うことにより無限大 (小) が除かれるか、または体積力法により物理的意味が明かにされている。しかし、非定常の基本解は、温度の基本解からも分かるように  $t - \tau = 0$  で無限大 (小) が現れ、時間に関して解析的に積分しておかないと、物理的意味が分かりにくい。

時間および境界において一定要素を用いるものとし、境界上の温度および温度勾配を  $T^{nf}$ ,  $q^{nf}$  とする。要素分割数、時間分割数をそれぞれ  $N$ ,  $F$  とし、離散化すると式 (3.8), (3.13), (3.16) に対して次式のような離散化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F T^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n \\ &\quad + \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \phi^* d\tau d\Gamma_n \end{aligned} \quad (3.19)$$



$$u'_{i}(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \Gamma^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n \\ + \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} u_i^* d\tau d\Gamma_n \quad (3.20)$$

$$\sigma'_{ij}(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \Gamma^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n \\ + \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sigma_{ij}^* d\tau d\Gamma_n \quad (3.21)$$

式(3.20)の時間積分は次式のように分離できる。

$$\int_{t_{r-1}}^{t_r} u^*(x, t, \xi, \tau) d\tau = \int_{t_{r-1}}^t u^*(x, t, \xi, \tau) d\tau - \int_{t_r}^t u^*(x, t, \xi, \tau) d\tau \quad (3.22)$$

同様に式(3.19), (3.21)も分離でき、 $a_r = r^2 / \{4\kappa(t-t_r)\}$ と置くと、時間積分は下記のように解析的に行える。また、式(3.22)の前半の時間積分も同様に行える。

$$\int_{t_r}^t \phi^* d\tau = \frac{\blacksquare}{4\pi\kappa} (t-t_r) \{2\ln(r) - \exp(-a_r) + [1+a_r]E_1(a_r)\} \quad (3.23)$$

$$\int_{t_r}^t \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\tau = \frac{\blacksquare}{8\pi\kappa} \frac{\partial r}{\partial n} r \{-E_1(a_r) - \frac{1}{a_r} [1 - \exp(-a_r)]\} \quad (3.24)$$

$$\int_{t_r}^t u_i^* d\tau = \frac{\blacksquare}{8\pi\kappa} \frac{\partial r}{\partial x_i} r \{-E_1(a_r) - \frac{1}{a_r} [1 - \exp(-a_r)]\} \quad (3.25)$$

$$\int_{t_r}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau \\ = \frac{\blacksquare}{8\pi\kappa} \{E_1(a_r)n_i + \frac{1}{a_r}(n_i - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}) [1 - \exp(-a_r)]\} \quad (3.26)$$

$$\int_{t_r}^t \sigma_{ij}^* d\tau \\ = \frac{\blacksquare G}{4\pi\kappa} \{-E_1(a_r)\delta_{ij} + \frac{1}{a_r} (\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) [1 - \exp(-a_r)]\} \quad (3.27)$$

$$\int_{t_r}^t \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} d\tau = \frac{\blacksquare G}{2\pi\kappa r} \{2[\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}] \frac{\partial r}{\partial n} \exp(-a_r)\}$$

$$+ \frac{1}{a_r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \times [1 - \exp(-a_r)] \quad (3.28)$$

以上の式を使用することにより、温度による変位場および応力場が求められる。物理的意味を分かりやすくするために、持続熱源による変位場および応力場を求める。これは、1重層熱弾性変位ポテンシャルを使用したものに相当する。なお、分かりやすくするために時間および空間に関して離散化した状態を考える。与えられた温度分布になるように、境界上に  $t_{r-1} < \tau < t_r$  でのみ一様な強さの持続線熱源  $P_{nr}$  (持続点熱源を並べる) を作用させる。温度勾配が指定されている場合は非定常温度解析用境界要素法により温度分布の変化を求めておく。時間分割数、要素分割をそれぞれ  $N$ 、 $F$  とすると要素  $i$  での温度は重ね合わせの原理、または間接法における境界要素法により次式により求められる。

$$T^i = \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} T^* d\tau d\Gamma_n P_{nr} \quad (3.29)$$

式(3.29)の時間積分を解析的に行うと

$$\int_{t_{r-1}}^{t_r} T^* d\tau = \frac{1}{4\pi\kappa} [E_1(a_r - a_{r-1}) - E_1(a_r)] \quad (3.30)$$

となる。ただし、 $a_r = r^2 / 4\kappa(t_f - t_r)$  である。各時間ごとに、 $n$  個の方程式が求められるので、各時間ごとの熱源の強さ  $P_{nr}$  が求められる。時間ステップ  $F$  においては過去の熱源  $P_{nr}$  をすべて考慮したものとなる。

熱弾性変位ポテンシャルを  $\Phi$  とすれば、 $\Phi$  は次式によって支配される。

$$\nabla^2 \Phi = T \quad (3.31)$$

式(3.31)の一般解は

$$\Phi = \kappa \int_0^t T dt' + \Phi_0 + t \Phi_1 \quad (3.32)$$

で与えられる。式(3.32)に式(3.29), (3.30)を代入し、変数変換  $u = r^2 / 4\kappa(t_f - t_r)$  を行い、部分積分法を繰り返し実行し、点熱源の作用点  $r=0$  においてその点熱源自身による変位が零になる条件  $\partial \Phi / \partial r |_{r=0} = 0$  により  $\Phi_0$ 、 $\Phi_1$  を求めると<sup>(14)</sup>

$$\Phi = \frac{m}{4\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nr} \{ \phi(n, f-1) - \phi(n, f) \} d\Gamma_n \quad (3.33)$$

$$\phi(n, f) = (t - t_r) [2 \ln(r) - \exp(-ar) + \{1 + ar\} E_1(ar)] \quad (3.34)$$

式(3.33), (3.34)を式(3.11), (3.12)に代入すると

$$u_i' = \frac{m}{8\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nr} \{ A(n, f-1) - A(n, f) \} d\Gamma_n \quad (3.35)$$

$$\sigma_{ij}' = \frac{mG}{4\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nr} \{ B(n, f-1) - B(n, f) \} d\Gamma_n \quad (3.36)$$

ただし、 $A(n, f), B(n, f)$ はそれぞれ

$$A(n, f) = \frac{\partial r}{\partial x_i} r [-E_1(ar) - \frac{1}{ar} \{1 - \exp(-ar)\}] \quad (3.37)$$

$$B(n, f) = -E_1(ar) \delta_{ij} + \frac{1}{ar} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \{1 - \exp(-ar)\} \quad (3.38)$$

となり、式(3.25), (3.27)と同じ形式である。以上より、基本解は無限体に瞬間点熱源が与えられた場合の変位分布と応力分布を与えるものに相当することが分かる。ただし、実際の熱源に対応させるには係数をかける必要がある。2重層熱弾性変位ポテンシャルは同様に2重層の熱源より誘導が可能である。これらは式(3.26), (3.28)に対応し、直接法による表示は、1重層ポテンシャル(熱源)と2重層ポテンシャルを境界に与え、外部領域の温度を零と置いたものに相当することが分かる。なお、これらの熱源により求められた変位場および応力場は無限体の場合におけるものであり、通常与えられた力学的条件は満足していない。

与えられた力学的条件を満足させるには、不連続量の評価をしておく必要がある。式(3.21)における不連続量を評価する。そのために、式(3.21)を次式のように置く。

$$\begin{aligned} \sigma'(x, t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa \int_0^{t-\delta} \int_{\Gamma} \left[ \sigma^* \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} - \frac{\partial \sigma^*}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \\ &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa \int_{t-\delta}^t \int_{\Gamma} \left[ \sigma^* \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} - \frac{\partial \sigma^*}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \end{aligned} \quad (3.39)$$

図3.1のように添字Lを付けた境界に沿った局所座標系  $(x_i^L, y_i^L)$  を考え、式(3.46)の第2項の特異点近傍の線積分を  $I_A$  と置き、 $\delta \rightarrow 0$  とする。 $\sigma_{ij}^*$  の項には不連続量は存在しないので、 $\partial \sigma_{ij}^* / \partial n$  の項を吟味する。なお、微小領域であるので  $T(\xi, t)$  は一定と見なせ、 $I_A$  は次式となる。

$$I_A(\sigma_{ij}^L) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G_m}{2\pi} T(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{x_i^L x_j^L}{r^2} \right) + \left[ n_j \frac{x_i^L}{r} + n_i \frac{x_j^L}{r} - 2 \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \right\} dy^L \quad (3.40)$$

$\lambda$  を 0 に十分近づけた後、 $\lambda \ll \varepsilon$  を保ちながら  $\varepsilon$  を 0 に近づけると次式が得られる。

$$I_A(\sigma_{xx}^L) = 0, \quad I_A(\sigma_{yy}^L) = -mGT(\xi), \quad I_A(\sigma_{xy}^L) = 0 \quad (3.41)$$

すなわち、境界に垂直な方向の応力  $\sigma_{xx}^L$  に関しては、熱弾性ポテンシャルの法線方向微分の2階微分係数による不連続量が温度の2重層による不連続量により打ち消され不連続は存在しない。また、境界に沿った方向の応力  $\sigma_{yy}^L$  は不連続が存在する。

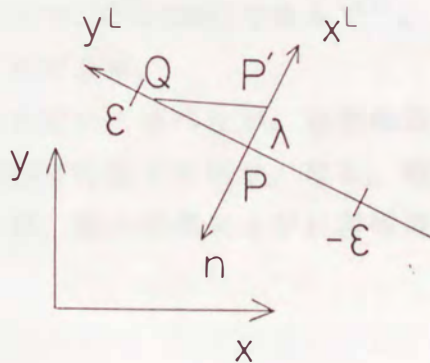


図3.1 特異点処理のための局所座標系

つぎに特異点の処理について述べる。式(3.20)~(3.28)の境界に関する線積分はガウス積分により行なえる。ただし、作用点が観測点と一致する場合、特異点の問題が生じるので、解析的に線積分を行った。すなわち、要素は一定要素とし、要素の長さを $2R$ 、 $\beta = R^2 / \{4\kappa(t-t_f)\}$ とすると線積分は次式のようにになる。

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^t u_i^* d\tau d\Gamma = 0. \quad (3.42)$$

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau d\Gamma = \frac{-m}{2\pi} [A_1 - 4\kappa(t-t_f)n_i] \quad (3.43)$$

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^t \sigma_{ij}^* d\tau d\Gamma = \frac{G_m}{8\pi\kappa} [A_1 - 8\kappa(t-t_f) \times (\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) A_2] \quad (3.44)$$

$$\int_{-R}^R \int_{t_f}^t \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} d\tau d\Gamma = 0. \quad (3.45)$$

ただし、 $A_1, A_2$ は次式で与えられる。

$$A_1 = \int_{-R}^R E_1(ar) dr = 2R(2-C) - 2R \ln(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2R}{(2n+1)n \cdot n!} \beta^n \quad (3.46)$$

$$A_2 = \int_{-R}^R \frac{1}{r^2} \{1 - \exp(-ar)\} dr = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\beta^n}{(2n-1)n! R} \quad (3.47)$$

ただし、 $C$ はEuler定数( $C=0.57721566$ )である<sup>(55)</sup>。以上のように境界上の線積分は解析的に処理することができる。

以上は一定時間内挿を用いて述べたが、線形時間内挿を用いた場合も、解析積分が可能であり、その詳細は付録2に示す。なお、時間および空間に関して数値積分を用いた解析例もあるが、解の精度および計算時間に関して問題があることは明らかである。

### 3・2 3次元問題における基本解の誘導と特性

3次元問題における基本解は、2次元問題における基本解の誘導と同様の手法で求めることができる。3次元の熱弾性変位ポテンシャル $\Phi$ は次式を満足している。

$$\nabla^2 \Phi = \blacksquare T \quad (3.48)$$

ここで、 $\blacksquare$ は次式で与えられる。

$$\blacksquare = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \quad (3.49)$$

2次元の場合と同じように熱弾性変位ポテンシャル $\Phi$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} [\phi^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \\ - \frac{\partial \phi^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau)] d\Gamma(\xi) d\tau \quad (3.50) \end{aligned}$$

ただし、空間に関する積分は面積積分であり、 $\phi^*(x, t, \xi, \tau)$ および $\partial \phi^*(x, t, \xi, \tau) / \partial n(\xi)$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} \phi^*_3(x, t, \xi, \tau) &= -\blacksquare \kappa \int_{\tau}^t T^*_3(x, t', \xi, \tau) dt' + \blacksquare \eta^*(x, \xi) \\ &= -\frac{\blacksquare}{4\kappa \pi^{3/2} r} \gamma\left(\frac{1}{2}, a\right) \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*_3(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} &= -\blacksquare \kappa \int_{\tau}^t \frac{\partial T^*_3(x, t', \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} dt' + \blacksquare \frac{\partial \eta^*(x, \xi)}{\partial n(\xi)} \\ &= \frac{\blacksquare}{2\kappa \pi^{3/2} r^2} \gamma\left(\frac{3}{2}, a\right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.52) \end{aligned}$$

$\gamma(z, p)$ は第1種不完全ガンマ関数であり、 $a = r^2 / \{4\kappa(t - \tau)\}$ である。熱弾性変位ポテンシャルと変位の関係より、次式が求められる。

$$u'_i(x, t) = \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} [u_i^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)}$$

$$-\frac{\partial u_i^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) d\Gamma(\xi) d\tau \quad (3.53)$$

ここで

$$u_i^*(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^{3/2}r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \gamma\left(\frac{3}{2}, a\right) \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u_i^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi^{3/2}r^3} \left[ \gamma\left(\frac{3}{2}, a\right) n_i + 2\gamma\left(\frac{5}{2}, a\right) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (3.55)$$

同様に、応力は次式で与えられる。

$$\sigma'_{ij}(x, t) = \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} - \frac{\partial \sigma_{ij}^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau) \right] d\Gamma(\xi) d\tau \quad (3.56)$$

ただし、

$$\sigma_{ij}^* = \frac{G_m}{\pi^{3/2}r^3} \left[ \delta_{ij} \gamma\left(\frac{3}{2}, a\right) - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \gamma\left(\frac{5}{2}, a\right) - 2a^{3/2} \delta_{ij} \exp(-a) \right] \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} = & \frac{2G_m}{\pi^{3/2}r^4} \left[ -\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right] \gamma\left(\frac{5}{2}, a\right) \\ & + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \gamma\left(\frac{7}{2}, a\right) \\ & + 2\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} a^{5/2} \exp(-a) \end{aligned} \quad (3.58)$$

ここで、時間および空間に関して式(3.53), (3.56)を離散化すると次式が求められる。ただし、時間および空間に関し一定要素を用いる。

$$u_i'(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F T^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n$$

$$+ \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} u_i^* d\tau d\Gamma_n \quad (3.59)$$

$$\sigma'_{ij}(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \Gamma^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} d\tau d\Gamma_n$$

$$+ \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \sigma_{ij}^* d\tau d\Gamma_n \quad (3.60)$$

ここで  $F, N$  はそれぞれ時間分割数と境界要素分割数である。式(3.59), (3.60)における時間積分は解析的に行える。すなわち、

$$a_f = r^2 / [4\kappa(t - t_f)] \quad (3.61)$$

と置くと、式(3.59), (3.60)における時間積分は次式で与えられる。

$$\int_{t_f}^t u_i^* d\tau = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{t - t_f}{r^2} \ll - \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2} \}$$

$$+ 2a_f \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) \} + 2a_f^{1/2} \{ 1 - \exp(-a_f) \} \gg \quad (3.62)$$

$$\int_{t_f}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{t - t_f}{r^3} \ll - (n_i - 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}) \{ \Gamma(1/2, a_f)$$

$$- \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2} \} + 2a_f (n_i - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}) \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) \}$$

$$+ 2a_f^{1/2} (n_i - 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial n}) \{ 1 - \exp(-a_f) \} \gg \quad (3.63)$$

$$\int_{t_f}^t \sigma_{ij}^* d\tau = \frac{G_{ij}(t - t_f)}{2\pi^{3/2} r^3} \ll - (\delta_{ij} - 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) \{ \Gamma(1/2, a_f)$$

$$- \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2} \} - 2a_f (\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) \}$$

$$+ 2a_f^{1/2} (\delta_{ij} - 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) \{ 1 - \exp(-a_f) \} \gg \quad (3.64)$$

$$\int_{t_f}^t \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial n} d\tau$$





$$\int_0^R \frac{1}{r^3} a_r \{ \Gamma(1/2, a_r) - \Gamma(1/2) \} r dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{R^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)n!} \beta^{2n+3} \quad (3.71)$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^3} a_r^{1/2} \{ 1 - \exp(-a_r) \} r dr$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{R^{2n} \beta^{2n+1}}{2n \cdot n!} \quad (3.72)$$

ここでは、1重層および2重層の熱弾性変位ポテンシャルで表現したが、2次元の場合と同様に、持続面熱源での表示も可能である。

### 3・3 軸対称問題における基本解の誘導と特性

軸対称問題における熱弾性変位ポテンシャル $\Phi$ は次式により支配されている。

$$\nabla^2 \Phi = \mathfrak{m} T \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (3.73)$$

ここで、 $\mathfrak{m}$ は次式で与えられる。

$$\mathfrak{m} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \quad (3.74)$$

2次元および3次元の場合と同様の手法により熱弾性変位ポテンシャルを求めると次式になる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = \kappa \int_0^t \int_S [\phi^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \\ - \frac{\partial \phi^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau)] r \, dS(\xi) \, d\tau \quad (3.75) \end{aligned}$$

ここで、 $\phi^*$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi^*_j(x, t, \xi, \tau) &= -\mathfrak{m} \kappa \int_{\tau}^t T^*_j(x, t', \xi, \tau) \, dt' + \mathfrak{m} \eta^*(x, \xi) \\ &= \frac{\mathfrak{m}}{2\pi^{1/2} s^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k} \gamma(2k+1/2, a)}{(k!)^2} \quad (3.76) \end{aligned}$$

$\gamma(z, p)$ は不完全ガンマ関数であり、 $a = s/\{4\kappa(t-\tau)\}$ とする。記号 $c$ および $s$ は第2・2節で既に与えられている。 $\phi^*_j$ の法線方向微分係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*_j(x, t, \xi, \tau)}{\partial n} \\ = \frac{-\mathfrak{m}}{2\pi^{1/2} s^{3/2}} \left\{ n_r r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [(4k+1)\gamma(2k+1/2, a) - 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -n_r r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k-1}}{(k!)^2} \gamma(2k+1/2, a) \\
& + n_z (z-z_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [(4k-1) \gamma(2k+1/2, a) - 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \quad (3.77)
\end{aligned}$$

熱弾性変位ポテンシャルと変位の関係は次式で与えられる。

$$u_i' = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i=r, z) \quad (3.78)$$

式(3.75)を式(3.78)に代入することにより次式が求められる。

$$\begin{aligned}
u_i'(x, t) = \kappa \int_0^t \int_S [u_i^*(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial n(\xi)} \\
- \frac{\partial u_i^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial n(\xi)} T(\xi, \tau)] r_0 dS(\xi) d\tau \quad (3.79)
\end{aligned}$$

ここで、 $u_i^*$ 、 $\partial u_i^*/\partial n$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
u_r^* = \frac{-\blacksquare}{2\pi^{1/2} s^{3/2}} \left\{ r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [(4k+1) \gamma(2k+1/2, a) - 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \right. \\
\left. - r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k-1}}{(k!)^2} \gamma(2k+1/2, a) \right\} \quad (3.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z^* = \frac{-\blacksquare(z-z_0)}{2\pi^{1/2} s^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [(4k-1) \gamma(2k+1/2, a) - 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r^*}{\partial n} = \frac{\blacksquare}{2\pi^{1/2} s^{5/2}} \{ [2rr_0 n_r + r(z_0-z)n_z] \\
\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)c^{2k}}{(k!)^2} [-(4k+1) \gamma(2k+1/2, a) + 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \\
- 2[(r^2+r_0^2)n_r + r_0(z_0-z)n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^{2k-1}}{(k!)^2} [-(4k+1) \gamma(2k+1/2, a) \\
+ 2\exp(-a)a^{2k+1/2}] \}
\end{aligned}$$

$$+4[2r_0 n_r + r(z_0 - z)n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} \exp(-a)a^{2k+3/2} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial u_z^*}{\partial n}$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2} s^{5/2}} [r_0 (z - z_0) n_r + (z - z_0)^2 n_z] \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)c^{2k}}{(k!)^2} [-(4k-1) \gamma(2k+1/2, a) + 2 \exp(-a)a^{2k+1/2}] \\ - [2r(z - z_0)n_r + r r_0 n_z] \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k c^{2k-1}}{(k!)^2} [-(4k+1) \gamma(2k+1/2, a) + 2 \exp(-a)a^{2k+1/2}] \\ + 4[r_0 (z - z_0) n_r + (z - z_0)^2 n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} \exp(-a)a^{2k+3/2} \quad (3.83)$$

時間および空間に関して離散化すると次式が得られる。ただし、時間および空間に関して一定要素を用いるものとし、時間分割数をF要素分割数をNとする。

$$u_i^*(x, t) = -\kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F T^{nf} \int_{S_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} d\tau r_0 dS_n \\ + \kappa \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F q^{nf} \int_{S_n} \int_{t_{r-1}}^{t_r} u_i^* d\tau r_0 dS_n \quad (3.84)$$

一定要素を用いた場合、時間積分は解析的に行うことが可能である。

$$a_r = s/[4\kappa(t - t_r)] \quad (3.85)$$

と置くと、式(3.84)の時間積分は次式で与えられる。

$$\int_{t_r}^t u_r^* d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m(t-t_f)}{2\pi^{1/2}S^{3/2}} \\
&\quad \times \left\{ r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_f) + (4k-1)a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \right. \\
&\quad \left. + 2r\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^{2k-1}}{(k!)^2} [-\gamma(2k+1/2, a_f) - a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \right\} \quad (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_f}^t u_z^* d\tau \\
&= \frac{-m(t-t_f)(z-z_\theta)}{2\pi^{1/2}S^{3/2}} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [-(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_f) - (4k-1)a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \\
&\hspace{15em} (3.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_f}^t \frac{\partial u_r^*}{\partial n} d\tau \\
&= \frac{m(t-t_f)}{\pi^{1/2}S^{5/2}} \{ [2rr_\theta n_r + r(z_\theta - z)n_z] \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)c^{2k}}{(k!)^2} [-(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_f) - (4k-1)a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \\
&\quad + [(r^2 + r_\theta^2)n_r + r_\theta(z_\theta - z)n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^{2k-1}}{(k!)^2} [(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_f) \\
&\quad + (4k-1)a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \\
&\quad + 4[2rr_\theta n_r + r(z_\theta - z)n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} a_f \Gamma(2k+1/2, a_f) \} \quad (3.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_f}^t \frac{\partial u_z^*}{\partial n} d\tau \\
&= \frac{m(t-t_f)}{2\pi^{1/2}S^{5/2}} \{ [r_\theta(z-z_\theta)n_r + (z-z_\theta)^2 n_z] \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)c^{2k}}{(k!)^2} [-(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_f) - (4k-1)a_f \Gamma(2k-1/2, a_f)] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [2r(z-z_0)n_r + rr_0n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kc^{2k-1}}{(k!)^2} [(4k+1)\gamma(2k+1/2, a_r) \\
& \qquad \qquad \qquad + (4k-1)a_r \Gamma(2k-1/2, a_r)] \\
& + 4[r_0(z-z_0)n_r + (z-z_0)^2 n_z] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(k!)^2} [a_r \Gamma(2k+1/2, a_r)] \} \quad (3.89)
\end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma(a, p) = \Gamma(a) - \gamma(a, p)$ である。

本節では、1重層および2重層熱弾性変位ポテンシャルで表現したが、持続面熱源による表示も可能である。本章では基本解およびその時間積分を級数で示した。これらを積分表示したものを付録6に示す。

## 第4章 非定常熱応力問題における定式化

第3章で非定常熱応力問題における基本解を示し、その変位場及び応力場を境界積分を用いて述べた。本章では非定常熱応力問題における熱弾性変位ポテンシャルと静弾性問題における解法を用いた定式化について述べる。初めに、熱弾性変位ポテンシャルによる変位および応力と静弾性における変位および応力の力学的境界条件を重ね合わせる手法を示す。次に、直接法における境界要素法形式の定式化、および体積法による定式化を示す。また、熱応力は異種材を接合した場合によく問題が発生するので、4・4節で異種接合材での非定常熱応力の取り扱い方法を示す。内部熱発生を伴う非定常熱弾性問題では、熱弾性変位ポテンシャルの概念を使用しても、領域積分を行わなければならないので内部にセルを設定しなければならない。そこで、熱発生の分布が空間的にあまり複雑でない場合、有効な手法として内部にセルを設定しない手法を4・5節に述べる。

### 4・1 重ね合わせによる定式化

第3章で既に、変位場及び応力場が求められているので、与えられた力学条件を満足するように静弾性の解を重ね合わせれば非定常熱応力問題の変位および応力が得られる。なお、変位場及び応力場は1重層熱弾性変位ポテンシャルより得られたものでも2重層熱弾性変位ポテンシャルより得られたものでもよい。もちろん、1重層および2重層熱弾性変位ポテンシャルより得られた直接法の表現での変位場および応力場でもよい。変位が規定されている境界を $\Gamma_1$ 、外力が規定されている部分を $\Gamma_2$ とする。熱弾性変位ポテンシャルによって得られた境界上の応力を、境界表面外向き法線の方向余弦 $n_j$ を用いて次式により等価な外力に変換する。2次元の場合、

$$p_i' = \sigma_{ij}' n_j \quad (i, j = x, y) \quad (4.1)$$

3次元の場合

$$p_i' = \sigma_{ij}' n_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (4.2)$$

軸対称の場合

$$p_i' = \sigma_{ij}' n_j \quad (i, j = r, z) \quad (4.3)$$



である。与えられた力学的境界条件を

$$u_i = u_i'' \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.4)$$

$$p_i = p_i'' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.5)$$

とすると、次の境界条件を満たす補解を重ね合わせる必要がある。

$$u_i^* = u_i'' - u_i' \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.6)$$

$$p_i^* = p_i'' - p_i' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.7)$$

未知の変位  $u_i^*$  および  $p_i^*$  は、式(4.6), (4.7)の条件で通常静弾性の問題を解くことにより求められる。これには、体積力法または静弾性問題における境界要素法により求めることができる。実際の未知の変位  $u_i''$  および外力  $p_i''$  は次式により求めることができる。

$$u_i'' = u_i' + u_i^* \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.8)$$

$$p_i'' = p_i' + p_i^* \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.9)$$

内点の変位と応力も、熱弾性ポテンシャルによる値と体積力法または静弾性境界要素法による値を重ね合わせればよい。

軸対称問題においても同様に定式化が可能である。次に、非軸対称負荷(熱負荷)を受ける場合を示す。このような場合、一般には周方向にも要素分割を行わなければならない。しかし、軸対称体を考えているので、境界上に作用する外力は周方向にフーリエ級数に展開できる。そこで、熱弾性変位ポテンシャルで求められた変位および表面力を次式のようにフーリエ級数に展開する。 $\theta$  を角度とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} e_j u_j'(\theta) &= \sum_{g=0}^{\infty} \{ e_r u_r^g(r, z) \cos(g\theta) + e_{\theta} u_{\theta}^g(r, z) \sin(g\theta) + e_z u_z^g(r, z) \cos(g\theta) \} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} e_j p_j'(\theta) &= \sum_{g=0}^{\infty} \{ e_r p_r^g(r, z) \cos(g\theta) + e_{\theta} p_{\theta}^g(r, z) \sin(g\theta) + e_z p_z^g(r, z) \cos(g\theta) \} \end{aligned} \quad (4.11)$$

境界上に与えられた変位および外力も同様に次式のようにフーリエ級数展開する。

$$e_j u_j''(\theta) = \sum_{g=0}^{\infty} \left\{ e_r u_r^{(g)}(r, z) \cos(g\theta) + e_{\theta} u_{\theta}^{(g)}(r, z) \sin(g\theta) + e_z u_z^{(g)}(r, z) \cos(g\theta) \right\} \quad (4.12)$$

$$e_j p_j''(\theta) = \sum_{g=0}^{\infty} \left\{ e_r p_r^{(g)}(r, z) \cos(g\theta) + e_{\theta} p_{\theta}^{(g)}(r, z) \sin(g\theta) + e_z p_z^{(g)}(r, z) \cos(g\theta) \right\} \quad (4.13)$$

与えられた境界条件を満たすには、次式の境界条件を満たす補解を重ね合わせねばならない。

$$e_i u^* = e_j \{ u_j'' - u' \} = \sum_{g=0}^{\infty} [ e_r \{ u_r^{(g)} - u_r^{(g')} \} \cos(g\theta) + e_{\theta} \{ u_{\theta}^{(g)} - u_{\theta}^{(g')} \} \sin(g\theta) + e_z \{ u_z^{(g)} - u_z^{(g')} \} \cos(g\theta) ] \quad (4.14)$$

$$e_i p^* = e_j \{ p_j'' - p' \} = \sum_{g=0}^{\infty} [ e_r \{ p_r^{(g)} - p_r^{(g')} \} \cos(g\theta) + e_{\theta} \{ p_{\theta}^{(g)} - p_{\theta}^{(g')} \} \sin(g\theta) + e_z \{ p_z^{(g)} - p_z^{(g')} \} \cos(g\theta) ] \quad (4.15)$$

以上の定式化により、軸対称体の境界を周方向に要素分割する必要がなくなる。軸対称体に非軸対称荷重が作用する場合の静弾性解法はM. Mayr<sup>(91)</sup>の手法を用いればよい。

#### 4・2 境界要素法（直接法）に基づく定式化

次に変位のみで表現した定式化を示す。弾性問題における境界要素法の積分方程式は次式で与えられる。ただし、 $Q$ は境界上の点、 $P$ は境界内の点ある。

$$u(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) u(Q) d\Gamma(Q) \quad (4.16)$$

$u_{ij}^*(Q, P)$ 、 $p_{ij}^*(Q, P)$ はKelvinの解である。ここで、記号を以下のように決めて置く。

$u'(Q), p'(Q)$ : 熱弾性変位ポテンシャルから求められる境界上の変位と外力

$u''(Q), p''(Q)$ : 与えられた力学的条件

$u'(P)$  : 熱弾性変位ポテンシャルから求められる内点の変位

$u''(P), u^*(P)$ : 実際の内点の変位と力学的条件を満足させるために重ね合わせた条件より求められる内点の変位。

与えられた力学的条件を満足させるために重ね合わせる条件 $u^*, p^*$ は次式で与えられる。

$$u^*(Q) = u''(Q) - u'(Q) \quad (4.17)$$

$$p^*(Q) = p''(Q) - p'(Q) \quad (4.18)$$

また、次式の関係も成立する。

$$u^*(P) = u''(P) - u'(P) \quad (4.19)$$

重ね合わせる力学条件での、弾性問題における積分方程式は、次式となる。

$$u^*(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u^*(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p^*(Q) d\Gamma(Q) \quad (4.20)$$

式(4.20)に式(4.17), (4.18), (4.19)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} u''(P) - u'(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) [u''(Q) - u'(Q)] d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) [p''(Q) - p'(Q)] u(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (4.21)$$

式(4.21)は次式と等価である。

$$u''(P) - u'(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u''(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u'(Q) d\Gamma(Q)$$

$$= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p''(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p'(Q) d\Gamma(Q) \quad (4.22)$$

熱弾性変位ポテンシャルによる注目している領域の境界に対する力学的条件は  $u'(Q), p(Q)'$  である。すなわち、境界上に力学的条件  $u'(Q), p(Q)'$  を負荷しても、内部の値にはなんら影響を及ぼさない。従って、境界内では次式が成立する。

$$\begin{aligned} u'(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u'(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p'(Q) d\Gamma(Q) \\ = u'(P) \end{aligned} \quad (4.23)$$

式(4.22), (4.23)より次式が求められる。

$$\begin{aligned} u''(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u''(Q) d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p''(Q) d\Gamma(Q) + u'(P) \end{aligned} \quad (4.24)$$

P点境界上にある場合、境界要素法の境界における手法を用いることができる。なお、 $u'(P)$  に関しては境界上で不連続はない。 $u''(\cdot) = u'(\cdot), p''(\cdot) = p'(\cdot)$  と書き直し、第3章の熱弾性変位ポテンシャルによる変位  $u'(P)$  を用いて、書き改めると式(4.24)は次式となる。

$$\begin{aligned} cu_i(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u_i^*(P, t, Q, \tau) \frac{\partial T(Q, \tau)}{\partial n(Q)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_i^*(P, t, Q, \tau)}{\partial n(Q)} T(Q, \tau) \right] d\Gamma(Q) d\tau \\ &+ \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} u_i^*(x, t, \xi, \tau) W(\xi, \tau) d\Omega(\xi) d\tau \\ &+ \int_{\Omega} u_i^*(x, t, \xi, 0) T(\xi, 0) d\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ここで、 $\Gamma(Q)$  に関する積分は、2次元問題の場合は線積分であり、3次元の場合は面積分である。ここで、 $u_{ij}^*$ 、 $p_{ij}^*$  は Kelvin の解を示す。2次元の場合、

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (4.26)$$

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,j}r_{,i} \} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (4.27)$$

である。ただし、 $n$ は物体表面の法線、 $n^j$ は方向余弦、 $\delta_{ij}$ はKroneckerのデルタ、 $r$ は負荷点と考えている点との距離、 $r_{,i} = \partial r / \partial x_i = r_i / r$ である。平面応力問題として解析する場合、見かけ上の弾性係数、ポアソン比を次式のように置けばよい。

$$E' = E \left[ 1 - \frac{\nu^2}{(1+\nu)^2} \right] \quad (4.28)$$

$$\nu' = \nu / (1+\nu)$$

3次元等方弾性体に対する基本解は次式で与えられる。

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (4.29)$$

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (4.30)$$

内点に関しては、変位と応力の関係式より次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & -\int_{\Gamma} S_{kij}(Q,P)u_k(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{kij}(Q,P)p_k(Q)d\Gamma(Q) \\ & + \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij}^*(P,t,Q,\tau) \frac{\partial T(Q,\tau)}{\partial n(Q)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \sigma_{ij}^*(P,t,Q,\tau)}{\partial n(Q)} T(Q,\tau) \right] d\Gamma(Q)d\tau \\ & + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(x,t,\xi,\tau)W(\xi,\tau)d\Omega(\xi)d\tau \\ & + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^*(x,t,\xi,0)T(\xi,0)d\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで、 $D_{kij}$ および $S_{kij}$ は静弾性の場合と同じものであり、次式で与えられる。

$$D_{kij} = \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\{\delta_{kij}r_{,j} + \delta_{kjr}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}\} + br_{,i}r_{,j}r_{,k}] \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (4.32)$$

$$S_{kij} = \left\{ \frac{2G}{r^b} \left[ b \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\nu) \delta_{ijr,k} + (\delta_{ikr,j} + \delta_{jkr,i}) - cr_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \\ \left. + b\nu (n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu) (bn_{kr,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \right. \\ \left. - (1-4)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4a\pi(1-\nu)} \quad (4.33)$$

2次元の場合、 $a=1$ 、 $b=2$ 、 $c=4$ 、3次元の場合 $a=2$ 、 $b=3$ 、 $c=5$ である。2次元および3次元の場合と同様に、軸対称の場合の積分方程式は次式で与えられる。

$$cu_i(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(Q) r_{\theta} d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(Q) r_{\theta} d\Gamma(Q) \\ + \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u_i^*(P, t, Q, \tau) \frac{\partial T(Q, \tau)}{\partial n(Q)} \right. \\ \left. - \frac{\partial u_i^*(P, t, Q, \tau)}{\partial n(Q)} T(Q, \tau) \right] r_{\theta} d\Gamma(Q) d\tau \quad (4.34)$$

軸対称問題における静弾性の基本解 $u_{ij}^*$ 、 $p_{ij}^*$ は第1種および第2種完全楕円関数を $K(m_{\theta})$ 、 $E(m_{\theta})$ とすると以下で与えられる<sup>(42, 45, 69)</sup>。

$$u_{rr}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r_{\theta}rC_1} \left[ -4(1-\nu) \{ (r+r_{\theta})^2 + Z^2 \} + \frac{(r^2-r_{\theta}^2)^2 + Z^2(r^2+r_{\theta}^2)}{(r-r_{\theta})^2 + Z^2} \right] \\ \times E(m_{\theta}) + \{ 4(1-\nu)(r^2+r_{\theta}^2+Z^2) - (r^2+r_{\theta}^2) \} K(m_{\theta}) \quad (4.35)$$

$$u_{rz}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r_{\theta}C_1} Z \left[ \frac{r^2-r_{\theta}^2+Z^2}{(r-r_{\theta})^2+Z^2} E(m_{\theta}) - K(m_{\theta}) \right] \quad (4.36)$$

$$u_{zr}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)rC_1} Z \left[ \frac{r^2-r_{\theta}^2-Z^2}{(r-r_{\theta})^2+Z^2} E(m_{\theta}) + K(m_{\theta}) \right] \quad (4.37)$$

$$u_{zz}^* = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)C_1} \left[ \frac{Z^2}{(r-r_{\theta})^2+Z^2} E(m_{\theta}) + (3-4\nu)K(m_{\theta}) \right] \quad (4.38)$$

$$p_{ij}^* = \tau_{ijkl} n_k \quad (4.39)$$

$$\tau_{rrrr} = \{ 16\pi(1-\nu)r_{\theta}r^2C_1 \}^{-1} \left\{ \langle (7-8\nu) [(r+r_{\theta})^2 + Z^2] + [4(1-\nu) \{ r_{\theta}^2(r_{\theta}^2 - r^2) + Z^2(2r_{\theta}^2 + r^2 + Z^2) \} - 3(r^2 - r_{\theta}^2)^2 - 6Z^2(r^2 - r_{\theta}^2) + 9Z^4] \{ (r-r_{\theta})^2 + Z^2 \}^{-1} + \right. \\ \left. 4[(r_{\theta}+r)^3(r_{\theta}-r)^3 - Z^6 + Z^2(r^2 - r_{\theta}^2)(Z^2 + r^2 - r_{\theta}^2)] (r^2 + r_{\theta}^2 + Z^2) \{ (r+r_{\theta})^2 + Z^2 \}^{-1} \{ (r-r_{\theta})^2 + Z^2 \}^{-2} \rangle E(m_{\theta}) + \langle 3(r^2 - r_{\theta}^2) - 9Z^2 - 4(1-2\nu)(r^2 + 2r_{\theta}^2 + 2Z^2) \right\}$$

$$-\{(r_0+r)^3(r_0-r)^3-Z^6+Z^2(r^2-r_0^2)(Z^2+r^2-r_0^2)\}\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1} \\ \{(r-r_0)+Z^2\}^{-1} > K(m_0) \gg \quad (4.40)$$

$$\tau_{rzz} = \{4\pi(1-\nu)r_0C_1\}^{-1} < [(1-2\nu)\{(r^2-r_0^2+Z^2)+3Z^2\}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1} \\ +4Z^2(r_0^2+r^2+Z^2)(r_0^2-r^2-Z^2)\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-2}]E(m_0) \\ -[1-2\nu+Z^2(r_0^2-r^2-Z^2)\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1}]K(m_0) > \quad (4.41)$$

$$\tau_{rrz} = \{8\pi(1-\nu)r r_0 C_1\}^{-1} Z < [-\{6Z^2+2(1-2\nu)(r^2+r_0^2+Z^2)+Z^2\}\{(r-r_0)^2 \\ +Z^2\}^{-1}+4\{Z^4-(r^2-r_0^2)^2\}(r^2+r_0^2+Z^2)\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1} \\ \{(r-r_0)+Z^2\}^{-2}]E(m_0)+[3+2(1-2\nu)-\{Z^4-(r^2-r_0^2)^2\}\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1} \\ \{(r-r_0)+Z^2\}^{-1}]K(m_0) > \quad (4.42)$$

$$\tau_{zrr} = \{8\pi(1-\nu)r^2C_1\}^{-1} Z < [\{4(1-2\nu)r^2+6(r_0^2-r^2+Z^2)\}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1} \\ -4(r^2+r_0^2+Z^2)(r_0^2-r^2+Z^2)^2\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-2}]E(m_0) \\ +[-3+(r_0^2-r^2+Z^2)^2\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)+Z^2\}^{-1}]K(m_0) > \quad (4.43)$$

$$\tau_{zzz} = Z\{2\pi(1-\nu)C_1\}^{-1} < [-(1-2\nu)\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1}-4Z^2(r^2+r_0^2+Z^2) \\ \{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-2}]E(m_0)+Z^2\{(r+r_0)+Z^2\}\{(r-r_0)+Z^2\}^{-1} \\ K(m_0) > \quad (4.44)$$

$$\tau_{zrz} = -\{4\pi(1-\nu)rC_1\}^{-1} < [\{3Z^2+(1-2\nu)(r^2-r_0^2-Z^2)\}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1}+4Z^2 \\ (r^2+r_0^2+Z^2)(r^2-r_0^2-Z^2)\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)+Z^2\}^{-2}]E(m_0) \\ +[1-2\nu+Z^2(r_0^2-r^2+Z^2)\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}\{(r-r_0)^2+Z^2\}^{-1}]K(m_0) > \quad (4.45)$$

ただし、 $E(m_0) = \int_0^{\pi/2} (1-m_0^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$ ,  $K(m_0) = \int_0^{\pi/2} (1-m_0^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi$ ,

$m_0^2 = 4rr_0\{(r+r_0)^2+Z^2\}^{-1}$ ,  $C_1 = \{(r+r_0)^2+Z^2\}^{1/2}$ ,  $Z = z - z_0$ である。著者らは、式(4.35)~(4.45)を横等方性体にまで拡張した式を誘導し、境界積分方程式を示している(85-87, 92)。

直接法の境界要素の定式化は付録3に示すように弾性問題における相反定理から導くこともできる。直接法の境界要素法では、直接的に表面応力を求めることは困難である。熱応力解析においては表面応力が必要となることが多いので、ここでは差分法を併用した方法で表面力を求める手法について述べる。図4.1に示すように表面ひずみを $\varepsilon_u$ 、外力の法線方向成分を $P_N$ とすると、2次元熱弾性問題におけるフックの法則を示す式より平面ひずみおよび平面応力状態の表面応力 $\sigma_u$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sigma_u = \frac{E \varepsilon_u}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu} P_N - \frac{ET\alpha}{1-\nu} \quad (4.46)$$

$$\sigma_u = E \varepsilon_u + \nu P_N - ET\alpha \quad (4.47)$$

$$P_N = p_x n_x + p_y n_y$$

図4.1に示すように節点0  $(x_0, y_0)$  および1  $(x_1, y_1)$  における変位を  $(u_0, v_0), (u_1, v_1)$  とし、節点0 および1の距離を  $L$  とすると、表面ひずみ  $\varepsilon_u$  は差分により次式で近似することができる。

$$\varepsilon_u = [2(x_0 - x_1)(u_0 - u_1) + 2(y_0 - y_1)(v_0 - v_1) + (u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2] / (2L^2) \quad (4.48)$$

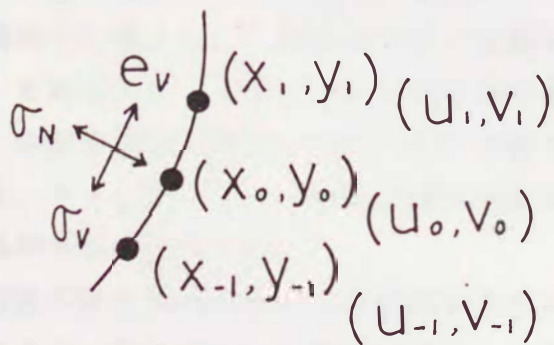


図4.1 表面応力を求めるための記号



#### 4・3 体積法による定式化

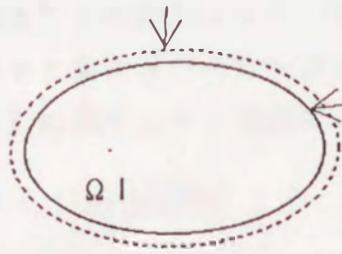
体積法による解法も4・1節で示した解の重ねあわせの原理による手法であるが、ここでは体積法の手順に厳密に沿って定式化を行う<sup>(60)</sup>。体積法を用いることにより、物理的意味が明かになるとともに、体積法から生み出された数値解析上有効な多くの手法が活用できる<sup>(60)</sup>。第3章で示した直接法の温度場から求められた変位場および応力場をもつ注目領域を補助領域に埋め込むことにより、注目領域の問題を空かのない無限体の問題として扱うことができる。ここでは、直接法の温度場から求められたものを使用して定式化を示すが、1重層または2重層の熱弾性変位ポテンシャルだけから求められた場を用いても同様の定式化が可能である。ここで、温度場による変位および応力場は無有限体での場であり、補助領域もこの温度場による変位および応力場の影響を受け、解が重ね合わせられている。4・3節では体積法において使用されている記号を用いることにする<sup>(60)</sup>。なお、直接法の境界要素法も体積法により導くことができる<sup>(44)</sup>。

4.3.1 図4.2(a)に示すように、温度および外力や強制変位を受けていないAなる弾性体 $\Omega_1$ を考える。弾性体 $\Omega_1$ において、温度の影響により第3章の変位場および応力場が生じたとする。なお、この変位場および応力場は境界積分により表現が可能である。すなわち、変位場および応力場は境界上に置かれた1重層または2重層の熱弾性変位ポテンシャルにより作り出されたものである。さらに、内部に物体力 $f_i(Q)$ が作用し境界面 $\Gamma$ 上に表面力 $t_i n^1(Q)$ が作用しているとする。ここで $i$ は直角座標の $i$ 方向成分を、 $Q$ は任意の点を、 $n_i$ は $\Omega_1$ の外向き法線を意味するものとする。そのとき、弾性体は変形前の形Aから変形後の形A'なる形に移る(AからA'に移る表面変位を $u_i^1(Q), Q \in \Gamma$ )で表す。領域 $\Omega_1$ における熱弾性場を無限体に作るため、図4.2(b)に示すような外部領域 $\Omega_E$ を考える。ここでは、 $\Omega_E$ を注目領域 $\Omega_1$ の補助領域と呼ぶ。注目領域を無限領域を含む外部領域としてもよい。

補助領域は内部に物体力 $f_i^E(Q), Q \in \Gamma$ を受け、内表面に表面力 $t_i n^E(Q), Q \in \Gamma$ を受け、さらに境界上に置かれた1重層または2重層の熱弾性変位ポテンシャルによる影響もある。それらによって空かの形が変形前のAから変形後のA''に移るとする。(AからA''に移る表面変位を $u_i^1(Q), Q \in \Gamma$ で表す。)ここでは $n^E$ は $\Omega_E$ の外向き法線を意味する。4・1節で示した方法の重ね合わせにおいて用いた体積法では境界の力学的条件のみを使用した。

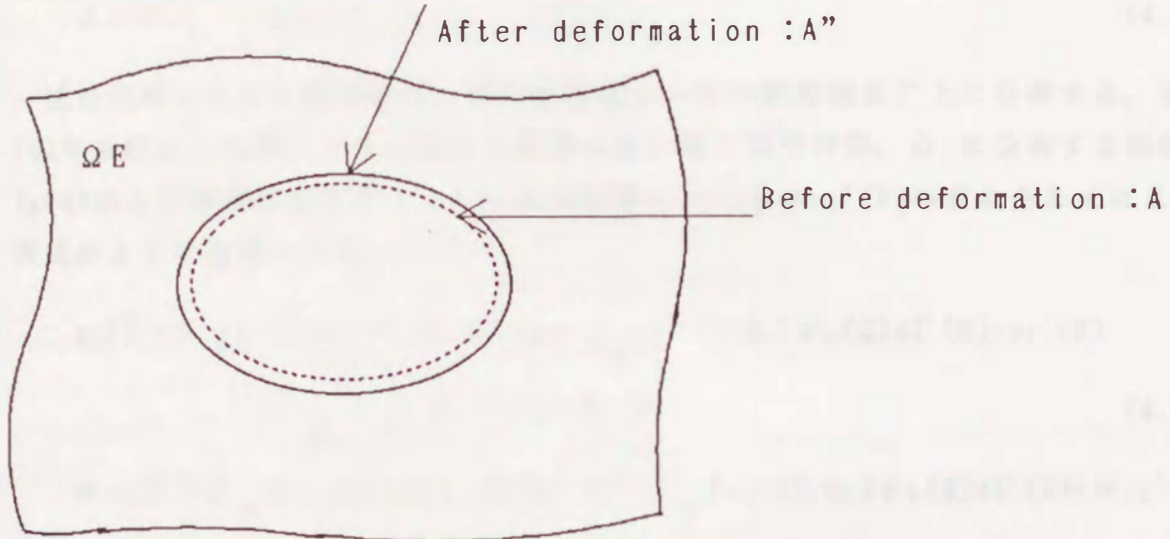
いま、変形後の弾性体を変形後の補助領域である無限体の空かに入れることを考える。これにより、無限弾性体の問題に変換し、単純な解の重ね合わせで $\Omega(\Omega_1 + \Omega_E)$ の熱弾性場を表現する。

Before deformation: A

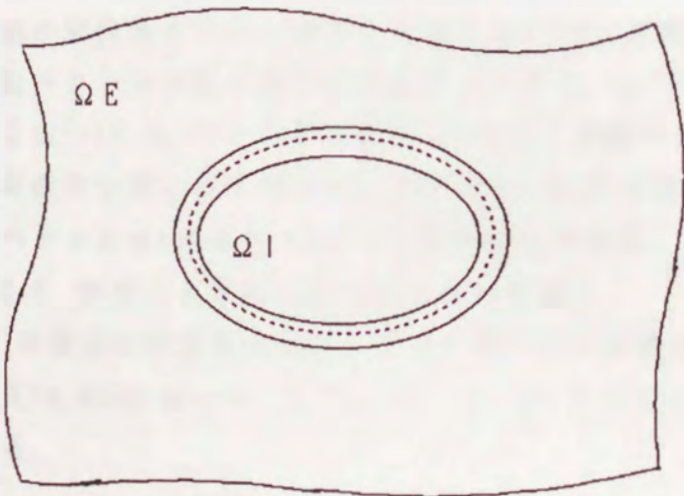


After deformation: A'

(a) 注目領域



(b) 補助領域



(c) (b)に(a)を埋め込む

図4.2 体積力法

形Aと形A"との差によって、弾性体表面と空か内表面の間には一般にプラスかマイナスのすき間およびずれが存在する。しかし、変位と $u_i^I(Q)$ と $u_i^E(Q)$ の差は、仮想境界面 $\Gamma$ に埋め込まれた次式の食い違い密度 $\phi_i(Q)$ で補償される。

$$\phi_i(Q) = u_i^E(Q) - u_i^I(Q) \quad (Q \in \Gamma) \quad (4.49)$$

仮想境界 $\Gamma$ 上に沿って、次式の密度の体積力 $\phi_i(Q)$ も残る。

$$\phi_i(Q) = t_i^n^E(Q) + t_i^n^I(Q) \quad (Q \in \Gamma) \quad (4.50)$$

注目領域における弾性場は、無限体領域 $\Omega_\infty$ 中の仮想境界 $\Gamma$ 上に分布する、 $\phi_i(Q)$ なる密度の体積力と $\phi_i(Q)$ なる密度の食い違い量の作用、 $\Omega_1$ に分布する物体力 $f_k(Q)$ および熱弾性変位ポテンシャルの影響 $u_i^*(P)$ と $\sigma_{ij}^*(P)$ の重ね合わせによって次式のように表現される。

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} u_i(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_i^*(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + u_i^*(P) + \int_{\Omega_1} u_i(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.51)$$

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^*(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + \sigma_{ij}^*(P) + \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.52)$$

ここで $u_i(P, Q_k)$ ,  $\sigma_{ij}(P, Q_k)$ および後で出てくる $t_i^n(P, Q_k)$ はそれぞれ無限体の点Qにk方向の単位集中力が作用するときの点Pでのi方向変位、応力のij成分および点Pでの法線ベクトルを持つ面の方向表面力であり、 $u_i^*(P, Q_k)$ ,  $\sigma_{ij}^*(P, Q_k)$ および後で出てくる $t_i^n^*(P, Q_k)$ はそれぞれ無限体の点Qに法線ベクトル $n(P)$ をもつ面に関するk方向の単位食い違いが作用するときの点Qでのi方向変位、応力のij成分および点Pでの法線ベクトル $n(P)$ をもつ面のi方向表面力である。

#### 4.3.2 熱応力を考慮した体積力法の基礎式

##### (1) 体積力の密度を未知数とする体積力法の基礎式

式(4.45)において、 $u_k^E(Q) = u_k^I(Q)$ ,  $Q \in \Gamma$ すなわち $\phi(Q) = 0$ とおくことにより得られる。

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} u_i(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + u_i^*(P) + \int_{\Omega_1} u_i(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + \sigma_{ij}'(P) \\ & + \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (4.54)$$

(2) 食い違いの密度を未知数とする体積力法の基礎式

式(4.46)において、 $t_k^{n^E}(Q) = -t_k^{n^I}(Q)$ ,  $Q \in \Gamma$  すなわち  $\phi(Q) = 0$  とおくことにより得られる。

$$\begin{aligned} u_i(P) = & \int_{\Gamma} u_i^*(P, Q_k) \phi_k(Q) d\Gamma(Q) + u_i'(P) \\ & + \int_{\Omega_1} u_i(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^*(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + \sigma_{ij}'(P) \\ & + \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (4.56)$$

#### 4.3.3 未知数を決めるための境界積分方程式

前項の式を用いて、体積力の密度を未知数とする体積力法、食い違いの密度を未知数とする体積力法、および表面力および表面変位を未知数とする境界要素法（直接法）の定式化を示す。 $\Gamma$ 上の点Pにおける $\Omega$ の外向き法線ベクトルを $n_j(P)$ とすれば、 $\Gamma$ 上の表面力は応力変換の公式により次式のように書くことができる。

$$t_i^n(P) = \sigma_{ij}(P) n_j(P) \quad (4.57)$$

体積力および食い違い量に関する境界上の性質は文献<sup>(60)</sup>に詳しいので省略する。不連続量に関しては第3章に示したように、熱弾性変位ポテンシャルから求められ変位に関してはまったくない。応力に関しては、2重層熱弾性変位ポテンシャルから求められたものには不連続が存在するが式(4.51)に示すように表面力に変換した場合まったく考慮しなくてもよい。以上より、体積力法における定式化においては、熱の影響のない体積力法の式に、熱弾性変位ポテンシャルから求められる項を付け加えるだけで熱応力問題の体積力法の式が求められる。以下に結果を記す。

(a) 体積力の密度を未知数とする体積力法の境界積分方程式

(1) 変位境界値に対して

$$\begin{aligned} u_i(P) = & \int_{\Gamma} u_i(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + u_i'(P) \\ & + \int_{\Omega_1} u_i(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (4.58)$$

(2) 応力境界値に対して

$$t_i^n(P) = \int_{\Gamma} t_i^n(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + \sigma_{ij}'(P) n_j(P) + \int_{\Omega_1} t_i^n(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.59)$$

(b) 食い違いの密度を未知数とする体積力法の境界積分方程式

(1) 変位境界値に対して

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} u_i^*(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + u_i'(P) + \int_{\Omega_1} u_i(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.60)$$

(2) 応力境界値に対して

$$t_i^n(P) = \int_{\Gamma} t_i^n(P, Q_k) \phi_k d\Gamma(Q) + \sigma_{ij}'(P) n_j(P) + \int_{\Omega_1} t_i^n(P, Q_k) f_k(Q) d\Omega(Q) \quad (4.61)$$

#### 4・4 異種接合材への適用

熱膨張係数や弾性係数などの物性値が異なる部材を接合した場合に、熱応力による破損が生じたり、熱ひずみによる”そり”などの問題が生じたりすることがよくある。そこで、本節では材質が異なる部材を接合した場合の取り扱い方法を示す。本節では、4・1節に示した手法で述べる。まず、非定常温度解析について示す。非定常温度解析の基礎式は次式のように書くことができる。

$$\sum_{f=1}^F H_{rF} T_r = \sum_{f=1}^F G_{rF} Q_r \quad (4.62)$$

ベクトル{B}により  $0 \leq \tau \leq t_{F-1}$  までの影響を表し、 $H_{rF}, G_{rF}$ などをマトリックス[H]、[G]で示すと次式が求められる。

$$[H]\{T\} = [G]\{q\} + \{B\} \quad (4.63)$$

図4.3に示すように、上の添字で領域を示し、下の添字1,2はそれぞれ温度指定境界および温度勾配指定境界を示すものとし、下の添字Cは接触面を示すものとする、次式が求められる。

$$\begin{bmatrix} H_1^1 & H_2^1 + h_1 G_2^1 & H_c^1 - G_c^1 & 0 & 0 \\ 0 & H_c^2 & \lambda_1 G_c^2 / \lambda_2 & H_2^2 + h_2 G_2^2 & H_1^2 \end{bmatrix} \{T_1^1 \ T_2^1 \ T_c^1 \ q_c^2 \ T_2^2 \ T_1^2\}^T \\ = \begin{bmatrix} G_1^1 & h_1 G_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 G_2^2 & G_1^2 \end{bmatrix} \{q_1^1 \ T_a^1 \ T_a^2 \ q_1^2\}^T + \{B_1 \ B_2\}^T \quad (4.64)$$

ここで、 $h_1$ および $h_2$ は相対熱伝達率、 $T_a^1$ および $T_a^2$ は外周温度であり、 $\lambda_1$ および $\lambda_2$ はそれぞれの領域における熱伝導率である。

次に、非定常熱応力を求めるための手法を述べる。本節では、4・1節に示した解の重ね合わせによる定式化を用いて述べる。変位が規定されている境界を $\Gamma_1$ 、外力が規定されている部分を $\Gamma_2$ とする。熱弾性変位ポテンシャルによって求められた境界上の応力を次式により等価な外力に書き換える。

$$P_i' = \sigma_{ij}' n_j \quad (4.65)$$

与えられた境界条件を

$$u_i = u_i'' \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.66)$$

$$p_i = p_i'' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.67)$$

とすると、次式の値を重ね合わせる必要がある。

$$u_i^* = u_i'' - u_i' \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.68)$$

$$p_i^* = p_i'' - p_i' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.69)$$

また、図4.3のように領域1と2の接合部分では、接合時の食い違い量（例えば、焼ばめの場合など）を $u_i^4$ とすると、領域1、2を上添字1、2により、接合部を下添字Cにより示すと、重ね合わせに必要な見かけ上の食い違い量 $u_i^{4*}$ 、および外力差 $p_i^{4*}$ は

$$u_i^{4*} = u_i^4 + u_i^{1F'} - u_i^{2F'} \quad (4.70)$$

$$p_i^{4*} = -(p_i^{1F'} + p_i^{2F'}) \quad (4.71)$$

となる。未知の変位 $u_i''$ および応力 $p_i''$ は、式(4.68)、(4.69)の条件で静弾性境界要素法により求める。すなわち、 $\{U\}, \{P\}$ を変位および外力ベクトル、 $[H], [G]$ をマトリックスとし、単領域における境界要素法の基礎式を $[H]\{U\} = [G]\{P\}$ の形式で表現する。二領域の場合、上の添字1、2はそれぞれ領域を示し、下の添字Fは接触面を示すものとする、解くべき静弾性境界要素法の基礎式は次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^{1F} & -G^{1F} & 0 \\ 0 & H^{2F} & G^{2F} & H^2 \end{bmatrix} \{U^{1*} \ U^{1F*} \ P^{1F*} \ U^{2*}\}^T \\ = \begin{bmatrix} G^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H^{2F} & G^{2F} & G^2 \end{bmatrix} \{P^{1*} \ U^{4*} \ P^{4*} \ P^{2*}\}^T \quad (4.72)$$

実際の未知の変位および外力 $u_i'', p_i'', u_i^{1F'}, u_i^{2F'}, p_i^{1F'}, p_i^{2F}'$ は次式により求められる。

$$u_i'' = u_i' + u_i^* \quad (4.73)$$

$$p_i'' = p_i' + p_i^* \quad (4.74)$$

$$u_i^{1F''} = u_i^{1F'} + u_i^{1F*} \quad (4.75)$$

$$p_i^{1F''} = p_i^{1F'} + p_i^{1F*} \quad (4.76)$$

$$u_i^{2F''} = u_i^{1F*} + u_i^{4*} + u_i^{2F'} \quad (4.77)$$

$$p_i^{2F''} = -p_i^{1F*} + p_i^{4*} + p_i^{2F'} \quad (4.78)$$

内点の変位および応力も、熱弾性ポテンシャルによる値と静弾性境界要素法による値を重ね合わせる。4・2節の方法でも同様に計算が可能である。

熱弾性ポテンシャルによる値		静弾性境界要素法による値	
変位	応力	変位	応力
$u_1$	$\sigma_1$	$u_1$	$\sigma_1$
$u_2$	$\sigma_2$	$u_2$	$\sigma_2$
$u_3$	$\sigma_3$	$u_3$	$\sigma_3$
$u_4$	$\sigma_4$	$u_4$	$\sigma_4$

図4.1 熱弾性ポテンシャルによる値と静弾性境界要素法による値の重ね合わせ

熱弾性ポテンシャルによる値		静弾性境界要素法による値	
変位	応力	変位	応力
$u_1$	$\sigma_1$	$u_1$	$\sigma_1$
$u_2$	$\sigma_2$	$u_2$	$\sigma_2$
$u_3$	$\sigma_3$	$u_3$	$\sigma_3$
$u_4$	$\sigma_4$	$u_4$	$\sigma_4$

図4.2 熱弾性ポテンシャルによる値と静弾性境界要素法による値の重ね合わせ



$h_1$	$T^1_s$	$h_2$	$T^2_s$
$T^1_2 \quad q^1_2$		$T^2_2 \quad q^2_2$	
$T^1_1$	$T^1_F$	$T^2_F$	$T^2_1$
$q^1_1$	$q^1_F$	$q^2_F$	$q^2_1$
<b>1</b>		<b>2</b>	
$\lambda_1$		$\lambda_2$	

図4.3 異種接合材の温度に関するモデル化

$U_4^*$		$P_4^*$	
$U^1_*$ $P^1_*$		$U^2_*$ $P^2_*$	
$U^1_F^*$		$U^2_F^*$	
$P^1_F^*$		$P^2_F^*$	
<b>1</b>		<b>2</b>	

図4.4 異種接合材の力学的モデル化

#### 4・5 内部熱発生を伴う場合の熱応力

前節までの手法で熱発生を伴う非定常熱応力解析を行う場合、内部をセルで分割する必要がある。セルを用いる方法ではデータ作成の点で本手法の本来の利点が損なわれる。そこで、熱発生の分布が幾何学的に複雑でない場合には、不均一熱発生の場合でも、セルを設定せずに、非定常熱応力解析が行えることを示す。

温度解析手法は、2次元非定常温度解析のための時間依存の基本解を用いた従来の境界要素法を応用する。従来の手法では熱源を伴う場合には内部にセルを設定する必要があるが、均一熱発生は境界温度条件の変化に置き換えることができ、従来のセルを設定しない境界要素法が応用できることを示す。この温度場による熱弾性変位ポテンシャルを解析的に計算し、熱応力を求める。なお、境界の変位および外力の条件は解の重ね合わせにより満足させる。本解法は複雑な熱発生を伴う熱応力問題にも適用することができるが、FEMや従来の境界要素法に対する利点は減少する。

##### 4.5.1 基礎式の誘導

従来の境界要素法で熱源を伴う温度解析を行う場合には内部にセルを設定する必要がある<sup>(2)</sup>。そこで、熱発生の分布が複雑でない場合には、不均一熱発生の場合にも、セルを設定せずに、非定常熱応力解析が行えることを示す。図4.5に示すように領域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_k$ に $W_1(t), W_2(t), W_3(t), \dots, W_k(t)$ の熱発生が存在するとする。ただし、それぞれ熱発生のある領域内では、熱発生量は均一であるとする。セルを設定せずに解析するために、無限領域に均一熱発生を伴う仮想空間を考える。この仮想空間での温度を基準値に置けば、当然ではあるが均一熱発生に伴う温度変化はこの仮想無限空間上ではない。このように考えると均一熱発生は実空間と仮想空間の温度差に置き換えることができる。すなわち、仮想空間における境界条件の変化に置き換えることが可能である。

熱応力は、3・1節の後半で示した解法で求める。温度場を仮想領域の境界上に配置した仮想線熱源による温度場に置き直し<sup>(18)</sup>、この温度場による熱弾性変位ポテンシャルを解析的に計算し、熱応力を求める。無限仮想空間上では均一熱発生による熱応力は存在せず、温度変化に伴う均一膨張または収縮のみが発生する。熱応力は、この仮想熱源による境界上の応力分布と変位を熱弾性ポテンシャルにより求め、均一膨張または収縮を考慮して、境界上に外力と変位を重ね合わせることにより、既知の境界条件を満足させる。未知の境界値は静弾性問題用の境界要素法により求める。

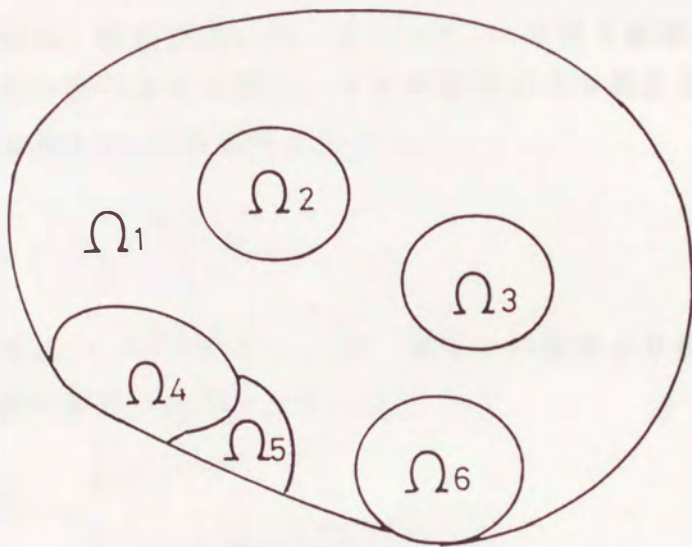


図4.5 不均一熱発生を伴う領域

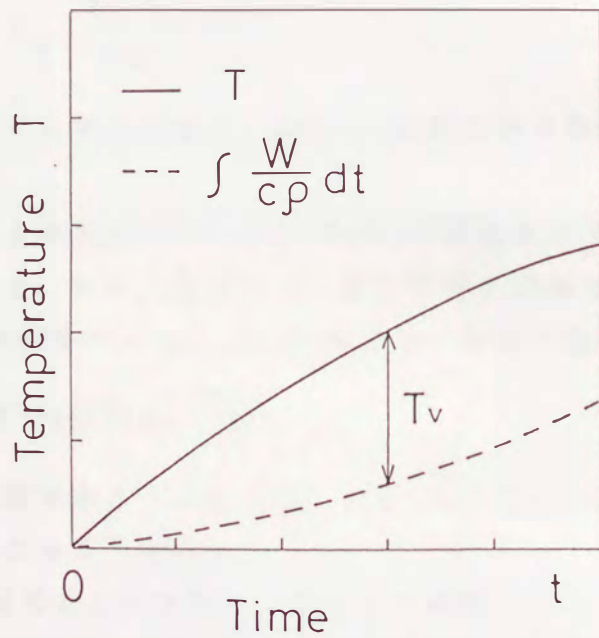


図4.6 仮想空間での温度 $T_v$ と実際の温度 $T$ の関係

4.5.2 温度分布 温度、温度伝導率、密度、比熱をそれぞれ $T, \kappa, \rho, C$ と置き、熱発生量を $W(t)$ と置くと、2次元非定常温度方程式は

$$\nabla^2 T = \kappa^{-1} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{\kappa C \rho} \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (4.79)$$

で与えられる。無限領域に均一熱発生 $W_k(t)$ を伴う仮想空間を考える。この仮想空間での温度を基準値零に置く。この仮想空間での温度を $T^k_v$ とすれば実際の温度 $T$ との関係は図4.6より次式で示される。

$$T = T^k_v + \int_0^t \frac{W_k(\tau)}{C \rho} d\tau \quad (4.80)$$

式(4.80)を式(4.79)に代入し、均一熱発生の条件より仮想空間上では次式が成立する。(調和関数であればよい。)

$$\nabla^2 T^k_v = \frac{\partial T^k_v}{\partial t} \quad (4.81)$$

このように置くことにより通常のセルを設定しない非定常温度解析用の境界要素法を用いることができる。但し、温度境界条件は次式に示す値だけ変化する。

$$T^k_w = \int_0^t \frac{W_k(\tau)}{C \rho} d\tau \quad (4.82)$$

分かりやすくするために、図4.6に仮想空間での温度 $T_v$ と実際の温度 $T$ の関係を示す。

次に領域1および2に $W_1(t), W_2(t)$ の熱発生を伴う場合を考える。初期温度を $0^\circ\text{C}$ とすると、セルを設定しない非定常温度解析の境界要素法において時間 $0 < t < t_{F-1}$ の項の和をベクトル $\{B\}$ で示すと、基礎方程式は

$$[H]\{T\} = [G]\{q\} + \{B\} \quad (4.83)$$

の形式で表現することができる。ただし、 $\{T\}, \{q\}$ はそれぞれ温度および温度勾配を表すベクトルである。

図4.7のように上の添字1、2により領域を示し、下の添字F, 1, 2により接触面、温度指定域、温度勾配指定域を示す。領域1、2における熱伝導率を $\lambda_1,$

$\lambda_2$ とする。外部温度を $\{T_s\}$ 、相対熱伝達率を $h_1, h_2$ とすると、それぞれの領域で次式が成立する。

$$[H^1]\{T^1_v\}=[G^1]\{q^1_v\}+\{B^1\} \quad (4.84)$$

$$[H^2]\{T^2_v\}=[G^2]\{q^2_v\}+\{B^2\} \quad (4.85)$$

接合面での温度および温度勾配の式は

$$\{T^1_{Fv}\}+\{T^1_w\}=\{T^2_{Fv}\}+\{T^2_w\} \quad (4.86)$$

$$\{q^1_{Fv}\}=\{q^2_{Fv}\}\lambda_1/\lambda_2 \quad (4.87)$$

である。式(4.84)~(4.87)より解くべき境界要素法の基礎式は次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} H^1_1 & (H^1_2+h_1 G^1_2) & H^1_F \\ 0 & 0 & H^2_F \\ & -G^1_F & 0 & 0 \\ & (G^2_F \lambda_1/\lambda_2) & (H^2_2+h_2 G^2_2) & H^2_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (T^1_{1v}+T^1_w) & (T^1_{2v}+T^1_w) & (T^1_{Fv}+T^1_w) & q^1_{Fv} \\ & & & (T^2_{2v}+T^2_w) & (T^2_1+T^2_w) \end{Bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} G^1_1 & G^1_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^2_2 & G^2_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1_{1v} & h_1(T_s^1-T^1_w) & h_2(T_s^2-T^2_w) & q^2_{1v} \end{Bmatrix}^T + \{B^1 \ B^2\} \quad (4.88)$$

内部の温度は同様に、それぞれの領域単独で、式(4.83)により求めることができる。以上の関係は一般的熱発生の場合でも成立する。

$h_1 \quad T^1_s$	$h_2 \quad T^2_s$																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>T^1_2</math></td> <td style="text-align: center;"><math>q^1_2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>T^1_1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>T^1_F</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>q^1_1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>q^1_F</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b>1</b></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>W_1(t)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\lambda_1</math></td> <td></td> </tr> </table>	$T^1_2$	$q^1_2$	$T^1_1$	$T^1_F$	$q^1_1$	$q^1_F$	<b>1</b>		$W_1(t)$		$\lambda_1$		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>T^2_2</math></td> <td style="text-align: center;"><math>q^2_2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>T^2_F</math></td> <td style="text-align: center;"><math>T^2_1</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>q^2_F</math></td> <td style="text-align: center;"><math>q^2_1</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b>2</b></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>W_2(t)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\lambda_2</math></td> <td></td> </tr> </table>	$T^2_2$	$q^2_2$	$T^2_F$	$T^2_1$	$q^2_F$	$q^2_1$	<b>2</b>		$W_2(t)$		$\lambda_2$	
$T^1_2$	$q^1_2$																								
$T^1_1$	$T^1_F$																								
$q^1_1$	$q^1_F$																								
<b>1</b>																									
$W_1(t)$																									
$\lambda_1$																									
$T^2_2$	$q^2_2$																								
$T^2_F$	$T^2_1$																								
$q^2_F$	$q^2_1$																								
<b>2</b>																									
$W_2(t)$																									
$\lambda_2$																									

図4.7 異なる熱発生が伴う場合の温度に関するモデル化

$U_4^*$	$P_4^*$										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>U^1_*</math></td> <td style="text-align: center;"><math>P^1_*</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>U^1_F^*</math></td> <td style="text-align: center;"><math>U^2_F^*</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>P^1_F^*</math></td> <td style="text-align: center;"><math>P^2_F^*</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b>1</b></td> <td style="text-align: center;"><b>2</b></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>W_1(t)</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W_2(t)</math></td> </tr> </table>	$U^1_*$	$P^1_*$	$U^1_F^*$	$U^2_F^*$	$P^1_F^*$	$P^2_F^*$	<b>1</b>	<b>2</b>	$W_1(t)$	$W_2(t)$	
$U^1_*$	$P^1_*$										
$U^1_F^*$	$U^2_F^*$										
$P^1_F^*$	$P^2_F^*$										
<b>1</b>	<b>2</b>										
$W_1(t)$	$W_2(t)$										

図4.8 異なる熱発生が伴う場合の力学的モデル

4.5.3 境界条件を満たすための解の重ね合せ 変位が規定されている境界を  $\Gamma_1$ , 外力が規定されている部分を  $\Gamma_2$  とする。熱弾性ポテンシャルによって求められた境界上の応力を、境界表面法線の方向余弦を用いて次式により等価な外力に書き変える。

$$p_i' = \sigma_{ij}' n_j \quad (j=x, y) \quad (4.89)$$

与えられた本問題の境界条件を

$$u_i = u_i'' \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.90)$$

$$p_i = p_i'' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.91)$$

とする。仮想空間上の熱源による境界上の変位量  $u_{iM}$  は、境界の座標を  $X_i$  で示すと次式で与えられる。

$$u_{iM} = X_i \alpha \int_0^t \frac{w(\tau)}{C\rho} d\tau \quad (4.92)$$

従って、実際の解を求めるには、次の境界条件を満たす補解を重ね合わせる必要がある。

$$u_i^* = u_i'' - u_i' - u_{iM} \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.93)$$

$$p_i^* = p_i'' - p_i' \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.94)$$

未知の変位  $u_i^*$  および  $p_i^*$  は、式(4.87), (4.88)の条件で通常静弾性境界要素法により求める。実際の未知の変位  $u_i''$  および外力  $p_i''$  は次式により求められる。

$$u_i'' = u_i' + u_i^* + u_{iM} \quad (\Gamma_2 \text{上}) \quad (4.95)$$

$$p_i'' = p_i' + p_i^* \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (4.96)$$

内点の変位と応力も、熱弾性ポテンシャルによる変位と静弾性境界要素法による値を重ね合わせるにより求める。

次に、図4.8の場合を考える。領域1と2の接合部分では、領域1、2を上添字1、2により、接合部を下添字Fにより示すと、重ね合わせに必要な見かけ上の食い違い量  $u_i^{4*}$ , および外力差  $p_i^{4*}$  は

$$u_i^{4*} = u_i^{1F'} - u_i^{2F'} + u_i^{1M} - u_i^{2M} \quad (4.97)$$

$$p_i^{4*} = -(p_i^{1F'} + p_i^{2F'}) \quad (4.98)$$

となる。未知の変位 $u_i$ および外力 $p_i$ は、式(4.93),(4.94),(4.97),(4.98)の条件で静弾性境界要素法により求める。すなわち、 $\{U\}, \{P\}$ を変位および外力ベクトル、 $[H], [G]$ を静弾性におけるマトリックスとし、単領域における境界要素法の基礎式を $[H]\{U\}=[G]\{P\}$ の形式で表現する。2領域の場合、上の添字1,2はそれぞれ領域を示し、下の添字Fは接触面を示すものとする、解くべき静弾性境界要素法の基礎式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^1_F & -G^1_F & 0 \\ 0 & H^2_F & G^2_F & H^2 \end{bmatrix} \{U^{1*} \ U^{1_F*} \ P^{1_F*} \ U^{2*}\}^T \\ = \begin{bmatrix} G^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H^2_F & G^2_F & G^2 \end{bmatrix} \{P^{1*} \ U^{4*} \ P^{4*} \ P^{2*}\}^T \quad (4.99)$$

実際の未知の変位および外力 $u_i$ ,  $p_i$ ,  $u_i^{1_F}$ ,  $u_i^{2_F}$ ,  $p_i^{1_F}$ ,  $p_i^{2_F}$ は次式により求められる。

$$u_i = u_i' + u_i^* \quad (4.100)$$

$$p_i = p_i' + p_i^* \quad (4.101)$$

$$u_i^{1_F} = u_i^{1_F'} + u_i^{1_F*} \quad (4.102)$$

$$p_i^{1_F} = p_i^{1_F'} + p_i^{1_F*} \quad (4.103)$$

$$u_i^{2_F} = u_i^{1_F*} + u_i^{4*} + u_i^{2_F'} \quad (4.104)$$

$$p_i^{2_F} = -p_i^{1_F*} + p_i^{4*} + p_i^{2_F'} \quad (4.105)$$

内点の変位および応力も、熱弾性ポテンシャルによる値と静弾性境界要素法による値を重ね合わせる。以上のことは、複雑な熱発生の場合にも成立する。