

三次元弾性問題における体積法法の汎用化に関する研究

森, 和也

<https://doi.org/10.11501/3063832>

出版情報 : 九州大学, 1992, 博士 (工学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :

三次元弾性問題における
体積力法の汎用化に関する研究

平成4年

森 和 也

①

三次元弾性問題における
体積力法の汎用化に関する研究

平成 4 年

森 和也

目 次

		頁
第 1 章	序論	1
1・1	まえがき	1
1・2	本論文の目的と内容	5
第 2 章	体積法法の基本原理	7
2・1	まえがき	7
2・2	解析理論	8
2・2・1	基本解	8
2・2・2	解の重ね合わせ	8
2・2・3	体積法法における離散化数値解析	11
2・2・4	基本密度関数	13
2・3	結び	18
第 3 章	体積法法の汎用化の基本原理	19
3・1	まえがき	19
3・2	解析理論	22
3・3	計算結果および考察	25
3・3・1	周期集中力による応力分布	25
3・3・2	円孔またはだ円孔を有する無限板の引張りにおける応力集中係数	25
3・3・3	縁き裂を有する半無限板の応力拡大係数	25
3・3・4	半だ円表面き裂を有する半無限体の応力拡大係数	30
3・4	結び	37
第 4 章	内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数	38
4・1	まえがき	38

4・2	解析理論	40
4・3	計算結果および考察	44
4・3・1	計算結果の精度の検討	44
4・3・2	無次元化した応力拡大係数 F_I , F_I^*	46
4・3・3	半無限体に存在する表面き裂の応力拡大係数 との比較	53
4・3・4	有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応 力拡大係数との比較	53
4・3・5	他の研究者の結果との比較	54
4・3・6	応力拡大係数の近似式	56
4・4	結び	69
第 5 章	引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する 半だ円表面き裂の応力拡大係数	70
5・1	まえがき	70
5・2	解析理論	72
5・2・1	内外円筒面の未知数	72
5・2・2	き裂面の未知数	72
5・2・3	境界条件と応力拡大係数	74
5・3	計算結果および考察	75
5・3・1	計算結果の精度の検討	75
5・3・2	丸棒の引張りにおける F_I^*	75
5・3・3	丸棒の曲げにおける F_I^*	75
5・3・4	円筒の引張りにおける F_I^*	78
5・3・5	円筒の曲げにおける F_I^*	78
5・3・6	応力拡大係数の近似式	78
5・4	結び	94
第 6 章	引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するだ円き 裂の応力拡大係数	95

6・1	まえがき	95
6・2	解析理論	97
6・3	計算結果および考察	100
6・3・1	計算結果の精度の検討	100
6・3・2	丸棒の引張りにおける $F_{T_A}^I$, $F_{T_B}^I$	100
6・3・3	丸棒の曲げにおける $F_{I_A}^I$, $F_{I_B}^I$	105
6・3・4	応力拡大係数の近似式	114
6・3・5	だ円形き裂の応力拡大係数を求める具体的方法	119
6・4	結び	121
第 7 章	三点曲げまたは四点曲げを受ける曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数	122
7・1	まえがき	122
7・2	解析理論	124
7・3	計算結果および考察	128
7・3・1	計算結果の精度の検討	128
7・3・2	無限板に存在する表面き裂の F_I^I	128
7・3・3	J I S ファインセラミックス曲げ試験片に存在する表面き裂の F_I^I	131
7・3・4	無限板に存在する表面き裂の応力拡大係数との比較	131
7・3・5	応力拡大係数の近似式	131
7・5	結び	136
第 8 章	結 論	137
	謝 辞	140
[付 録 1]	無限体に作用する集中力による応力場	141

[付録 2]	無限体に作用する集中力対による応力場	144
[付録 3]	無限体に作用する引張りの標準型集中力対による 応力場	148
[付録 4]	無限体に作用する集中力による矩形区間に作用す る合力	152
[付録 5]	無限体に作用する引張りの標準型集中力対による 矩形区間に作用する合力	157
[付録 6]	積分公式	163
	参考文献	167

第 1 章 序 論

1・1 まえがき

機械や構造物の強度設計において信頼性の向上に対する要求はますます高まっている。信頼性の向上は、製品をより無駄のない構造にするという立場から見ると、資源の有効利用のためにも重要である。この製品の信頼性の向上には、高精度の応力解析が重要な要素となる。また、設計などの実務においては、応力解析などの設計計算自体が効率的であることが必要とされる。応力解析が効率的に行われるためには、この応力解析の方法がデータの変更だけで解析される汎用解析法であることが望ましく、計算が効率的で短時間で必要なデータが得られることが重要である。実際の応力解析においては、解析対象となる製品が一般的に複雑であるために、解析的手法を用いることはほとんど不可能である。そこで数値計算による応力解析を行うことになる。

応力解析における数値解析法は、問題のモデル化において領域法と境界法に分けられる。領域法とは、支配方程式を領域全体にわたって近似する方法で、領域法の具体的解析法には有限要素法や差分法がある。境界法とは、支配方程式を完全に満たした解を用い、境界条件のみを近似する方法で、境界積分方程式法と逐次近似法とに分けられる。さらに、この境界積分方程式法は、直接法と間接法とに分けられ、具体的解析法には、直接法として境界要素法などがあり、間接法として、転位分布法や本論文で扱う体積力法などがある。

これらの数値解析法を用い機械の部品や構造物の部材などの応力解析を行う場合は、三次元問題として解析する必要がある場合が多い。三次元問題の解析は、二次元問題の解析に比べ、解析に伴い生じる問題点のはるかに多い。二次元問題ではどの数値解析法を用いても、実用上必要な精度の解を求めるのであれば、それほど解析の手間に差は見られないが、三次元問題では、領域法は領域全体を分割しなければならないため、必要となる計算機の記憶容量は膨大となり、データ入力の手間も同様に膨大なものとなる。一方、境界法は領域法と比較すると境界のみの分割を行えばよく計

算機の記憶容量の制限に対し有効で、また、入力データが少なくすみ手間がかなり省ける利点がある。さらに、間接法である体積法は、基本密度関数を用いることにより切欠きやき裂の問題に対しより少ない分割数で高精度の解析が可能である。しかし、一般に境界法は、計算時間が領域法に比べ長いと言う欠点がある。

そこで、先に述べた設計計算に必要とされる条件、すなわち高精度で、解析の手続きが簡単であり計算時間が短いこと、を満足する解析法として体積法を用いることが合理的であると思われる。したがって本研究では、体積法を研究対象としている。

1967年に西谷によって開発された体積法⁽¹⁾は、その後長年にわたる研究によって大きく発展し、多くの問題の解析に応用されている。初期段階における体積法は二次元弾性問題の解析に応用されたが、その後三次元弾性問題⁽²⁾、弾塑性問題⁽³⁾、動弾性問題⁽⁴⁾、さらに熱応力問題⁽⁵⁾と多種多様な問題の解析が可能となった。

開発段階よりすでに体積法が高精度であった理由は、基本密度関数⁽¹⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾の使用にある。基本密度関数を使用する目的は、求められる境界値を与えられた境界条件にできるだけ連続的に近づけることである。体積法において基本密度関数を用いる場合は、境界に分布させる体積力を(基本密度関数)×(重み)という形に置く。この基本密度関数は切欠きやき裂などの対象とする境界によって関数の形が異なり、応力集中係数や応力拡大係数を求める問題では特に有効で、切欠きやき裂による応力の特異性を見事に表現し少ない境界分割数で高精度の解析を可能にしている。

境界条件に関する精度向上の工夫としては、合力境界条件⁽¹⁰⁾を用いる方法や重みを多項式で近似する方法などがある。境界において応力変化が小さい場合や二次元問題のように境界の分割数にあまり制限がない場合は、境界条件として分割された各要素の midpoint における応力条件を用いる場合が多い。この方法においては境界の midpoint における応力値のみを求めればよいので計算が比較的簡単である。境界条件として合力境界条件を用いる場合、各境界要素において合力を与えられた境界条件に合わせる訳であるが、応力境界条件を用いる場合に比べ精度が計算結果においてほぼ一桁上がる。

したがって合力境界条件を用いる方法は、三次元問題のように計算機の記憶容量の制限のために要素分割を十分細かくできない場合などでは、高精度の解を得るための有効な手法である。また、応力境界条件を用いる場合、通常重みを階段関数で近似し各要素で一定とするが、重みを多項式で近似する方法もある。これは、超越特異積分方程式法⁽¹¹⁾と呼ばれ円弧き裂の解析などに対し有効である。

この他、精度向上の方法には特殊解を用いる方法がある。これまでに体積法で用いられた特殊解には次のようなものがある。二次元問題では、半無限板の解⁽¹⁾、帯板の解⁽¹²⁾、だ円孔を有する無限板の解⁽¹³⁾、界面き裂の解⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾などである。三次元問題では、半無限体の解⁽¹⁶⁾のみが応用されている。特殊解を用いる利点は、その解を用いることによって自由境界となる境界の境界条件が完全に満足されているために精度が向上する点とその境界を要素分割する必要がないために分割数の減少が図られる点である。三次元問題において特殊解が半無限体の解のみしか応用されていないのは、三次元における他の解を求めることが困難だからである。

以上述べたように、体積法において高精度の解を得るための理想的方法は、適当な基本密度関数を用い境界条件として合力境界条件を用いる方法である。二次元問題においてはすでにこの手法を用いたいくつかの汎用プログラムが開発されている。村上は、無限板に存在するき裂の解を用いてき裂を有する有限板の汎用プログラム⁽¹⁷⁾を開発し、石田らは、無限板に存在するだ円孔の解を用いて、だ円孔から発生した任意き裂群のプログラム⁽¹⁸⁾を開発している。さらに西谷らは、無限板に存在する円孔の解を用いて、積分の解を閉じた形で用いることによって数値積分を全く必要としない高精度の汎用プログラム⁽¹⁹⁾を開発している。

しかし、三次元問題の解析には、これらの汎用プログラムで用られた特殊解を用いる方法は、半無限体の解以外は解自体が求められていないために不可能である。そこで高精度の解を得るためには適当な基本密度関数を用い、合力を計算することが必要になる。ところが、合力を計算するためには、二次元問題では要素が線分であるため一重積分でよいが、三次元問題では要素が面であるため二重積分が必要となる。さらに、実際には体積

力を境界に連続的に分布させるために、二次元問題では二重積分となり、三次元問題では四重積分となる。この方法を機械の部品や構造物の部材などの複雑形状の問題に適用した場合、現時点においては、高性能な計算機を用いても膨大な計算量のために計算時間において問題があり計算の実行は不可能に近い。

そこで、現時点における体積法による三次元弾性問題の解析では、問題ごとに専用のプログラムを作成し効率的に計算を行うことによって計算時間を実行可能な時間に納めている。このままの方法では、計算機の性能が飛躍的に向上しない限り、三次元弾性問題に対する体積法の汎用化は計算時間の点で問題があり実質上困難と考えられる。即ち、汎用化につながる新しい効率的計算法が必要となる訳である。

1・2 本論文の目的と内容

本論文の目的は、前節で述べたように数多くの利点を持つ体積法を三次元の複雑な弾性問題に対しても少ない分割数で高精度な解析を実現しつつ、実行可能な計算時間で計算できるように効率的な解析法を開発し、汎用プログラムの開発を実現可能にすることにある。さらに、その解析法を重要ないくつかの問題に適用し、機械や構造物の強度の研究及び設計に有用な新しい資料を提供することである。

まず第2章では、これまでの標準的な体積法の基本原理について述べる。

第3章では、本研究で行った体積法の汎用化の基本原理について述べる。第4章から第7章までは、この原理を実際の三次元弾性問題に応用した例を述べる。

第4章では、内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の問題を解析する。この問題は、き裂面と自由境界面とが直線的に交わる問題の例である。

第5章では、引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する半だ円表面き裂の問題を解析する。この問題は、き裂面と自由境界面が曲線的に交わる問題の例である。

第6章では、引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するだ円き裂の問題を解析する。この問題は、き裂が内部に存在する問題の例である。

第7章では、三点曲げまたは四点曲げを受ける曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の問題の解析を行う。この問題は、第4章から第6章までの問題が自由境界面が曲面であるのに対し、自由境界面が平面である問題の例である。

これらの問題に対する他の解析法による解析例は、第4章で取扱った内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の問題に対する解析例のみが報告されている。この問題に対する他の解析法は、境界積分法、有限要素法などによるものである。本論文の一連の研究で取上げた問題は全てき裂問題であるが、き裂問題に対してこれらの境界積分法や有限要素法は、体積法のように基本密度関数の概念がないために、き裂の特異性を近似するためにはき裂部分の要素分割をかなり細かくしなければならない。ま

た、いかに細かくしても本質的に特異性を表現することができないので高精度の解析はあまり期待できない状況にある。第5章から第7章で取扱った問題に対しては、実用上重要な問題であるにもかかわらず他の解析法による解析例は見られないようである。これは、これらの複雑な問題に対しては、現時点において他の解析法による解析では信頼できる解析結果を得ることが困難であることを意味している。

第 2 章 体積力法の基本原理解

2・1 まえがき

計算機が高度に発達してきた現在では、ほとんどの応力解析は計算機を用いた数値計算によって解析されている。

数値解析の方法としては、これまで差分法、有限要素法などが多く利用され、それらの有用性は広く認識されている。その中で差分法と有限要素法は、有効な解析法ではあるが、両者とも領域型解析法であるため、解析すべき領域全体を分割する必要がある、データの入力が膨大になる。それと比較して境界型解析法である境界要素法は、弾性境界値問題を境界積分方程式に変換し、対象とする空間の次元を一次元下げて問題を解析するため、必要な入力データはかなり少ない。

一方、西谷は1967年、直観的物理的考察に基づいて、集中力の解の重ね合わせによって弾性問題を解析する独自の方法を開発した。それは体積法⁽¹⁾と呼ばれ、切欠きの応力集中とき裂の応力拡大係数の解析に多く応用され、高精度な解析法として発展してきた。体積法は、境界要素法と形式的には類似した解析法であるが、独自の発展をしてきたので解析の手法上色々な特長を有している。

この章では、これまでの標準的な体積法の基本原理解について、本論文で用いた基本解、解の重ね合わせ、離散化、そして体積法の高精度解析を可能にしている基本密度関数について述べる。

2・2 解析理論

通常の体積法は、無限体中の境界となるべき仮想境界面上に集中力または集中力対を分布させ、そのとき生じる弾性場によって解析しようとする問題の解を表現するものである。そこでまず、基本解である無限体に作用する集中力および集中力対による応力場の性質について述べる。そして体積法の基本原理である解の重ね合わせについて述べ、さらに実際の計算手順を説明する。

2・2・1 基本解

本論文の一連の研究における基本解は、図2・1に示すような無限体に作用する集中力による応力場⁽¹⁹⁾（付録1参照）と図2・2に示すような無限体に作用する集中力対による応力場である。この集中力対による応力場は、無限体に作用する集中力による応力を微分することによって求められる（付録2参照）。実際の問題の解析において分布させる集中力対は、図2・3に示すようなこれらの集中力対を組合わせたものを用いる。この集中力の組合せを引張りの標準型集中力対と呼ぶ⁽²⁰⁾。x方向の集中力対に対し大きさ $\nu/(1-\nu)$ の直交する二つのy方向およびz方向の集中力対を組合わせているのは、x方向の集中力対を分布させたとき、y方向およびz方向にひずみを起こさないためである。y方向およびz方向の標準型集中力対における組合わせも同様の理由によるものである。これらの標準型集中力対による応力場は、図2・2で示した集中力対の応力場を重ね合わせることによって求められる（付録3参照）。

2・2・2 解の重ね合わせ

体積法の基本的な考え方は、閉じた形で得られた特別な解を用い、重ね合わせの原理に基づいて、解析しようとする問題の解を表現するものである。

最も簡単な例として、図2・4に示すような二次元弾性問題の体積法による解析例を示してみる。境界 Γ 上に作用する荷重によって注目領域 Ω 内に生じる応力場を求める問題である。体積法では、このような応力場

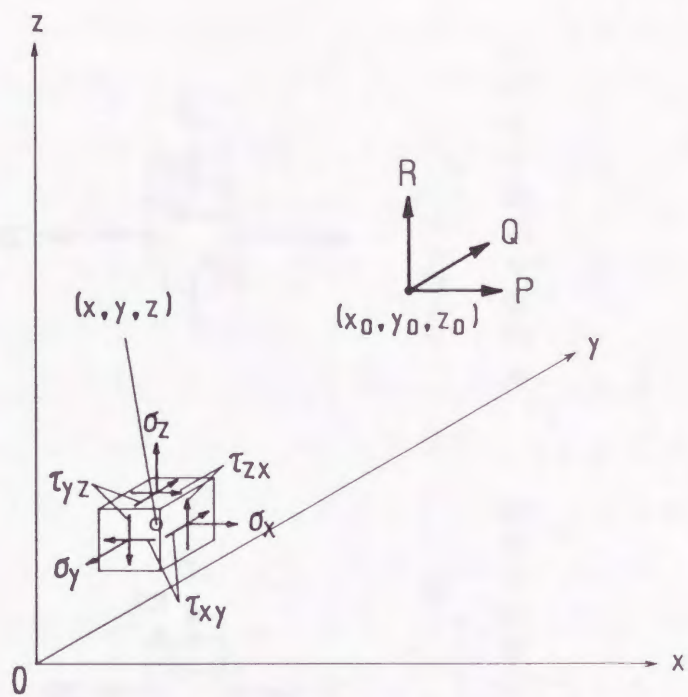


図 2・1 無限体に作用する集中力

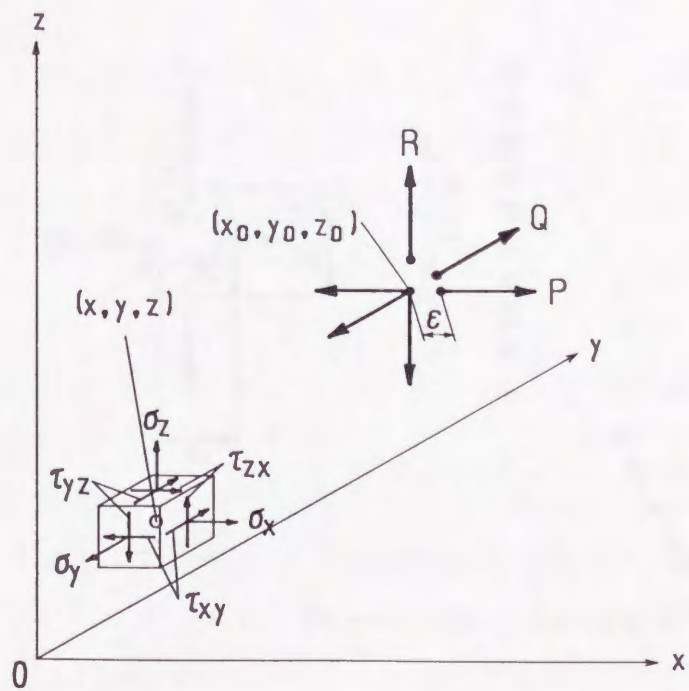


図 2・2 無限体に作用する集中力対

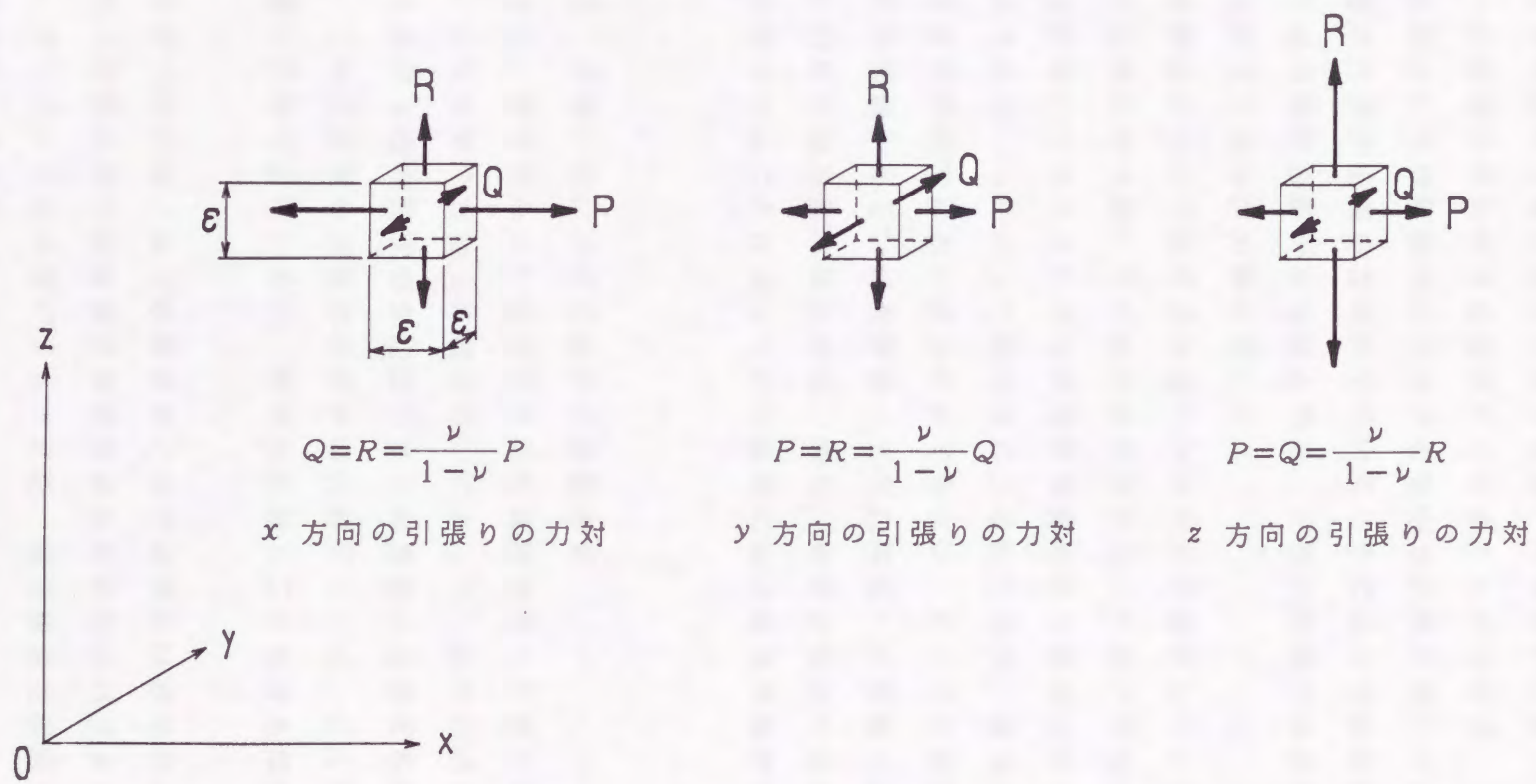


図 2・3 引張りの標準型集中力対

を、無限板中に作用する集中力による応力場の重ね合わせによって表現する。即ち、図2・5に示すように無限板中の境界となるべき仮想境界 Γ 上に適当な密度 ϕ の集中力を分布させると境界 Γ の無限小内側に、与えられた問題と同一の境界条件を有する領域 Ω を作ることができる。ここで重要な点は、基本解として無限板中に作用する集中力の解を用いていることである。無限板に作用する集中力の解を用いることによって解の重ね合わせが可能となり任意形状の解析が可能となる。三次元問題では基本解として無限体中に作用する集中力の解を用いる。

さて、この解法においては注目領域 Ω 内のみを問題としているため、補助領域（注目領域 Ω の外側）での応力を制御することができない。それは仮想境界 Γ 上において与えられた境界条件を満足する体積力は一意的に決定されるからである。したがって集中力による応力場は、境界の両側が解析対象となるき裂問題では用いることができない。そこでき裂問題では、無限板（二次元問題）あるいは無限体（三次元問題）に作用する集中力対（体積力対）の応力場を基本解とする。即ち、き裂となるべき仮想境界に集中力対を分布させることによってき裂境界における境界条件を満足させる。

2・2・3 体積力法における離散化数値解析

体積力法では、無限板あるいは無限体中の仮想境界上に分布させた集中力（体積力）または集中力対（体積力対）によって、弾性問題を、体積力の密度または体積力対の密度を未知数とする境界積分方程式を解く問題に帰着させる。この境界積分方程式を解析的に解くことは、ごく特別な場合を除いて一般に期待できないので、数値的に解くことを考えなければならない。

数値計算を行う際には、まず仮想境界 Γ 上で実際には連続的に変化しているべき体積力密度 ϕ または体積力対密度 ϕ を有限個のパラメータで離散化近似する。そして、それらのパラメータを、境界積分方程式を近似する連立1次方程式から求める。

最も簡単な離散化の例として、図2・4の問題を体積力密度を階段状関

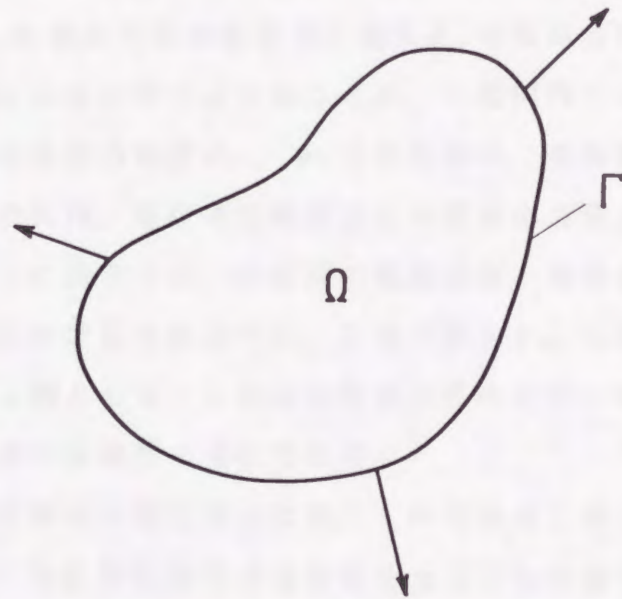


図 2・4 二次元弾性問題

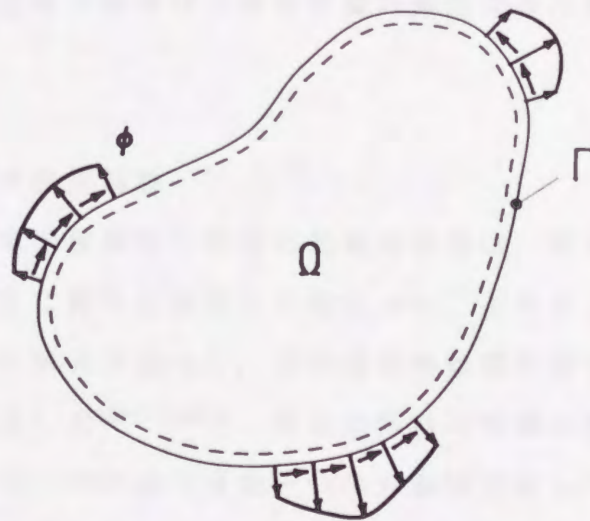


図 2・5 体積力法における解の表現

数で近似し、境界条件に代表点の応力値を用いた場合について考察してみる。

まず数値計算を行うためには、図 2・6 に示すように境界 Γ を n 個の区間 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ に分割する ($\Gamma = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$)。各区間にそれぞれ密度 ϕ_ε の垂線方向の体積力と密度 ϕ_n の法線方向の体積力を作用させる (ϕ_ε, ϕ_n は各区間ごとに異なるが、1 区間内では一定)。すると未知数は各区間の体積力密度 ϕ_ε, ϕ_n であるから、その個数は $2n$ 個となる。これらの未知数は、各区間の代表点における応力値が与えられた境界条件を満たすように決定する。各区間の代表点は、通常各区間の中点に取られ、この中点における垂線応力 σ_ε とせん断力 τ_ε を満足させるための条件の個数も $2n$ 個となる。これらの境界条件を同時に満足させるように $2n$ 個の体積力密度を決定する訳である。

さらに高精度の解が必要な場合には、この代表点における応力値を満足させる代わりに、各区間に作用する合力を与えられた境界条件に合わせる⁽¹⁵⁾。この場合は各区間に作用する合力を直交する 2 つの合力に分解し、やはり各区間の未知数の数を 2 個として計算を行う。三次元問題などでは、計算機の容量の制限などために十分に要素分割ができない場合がある。このようなとき、合力境界条件は十分な精度の解を得るための強力な手法である。

2・2・4 基本密度関数

体積力法での基本密度関数に関する最初の発想は、西谷によって切欠き干渉効果の近似計算に関する研究から始まった。1963年、西谷は切欠き干渉効果の一連の研究を行って、干渉効果の物理的意味を基にした簡単な近似計算法を提案した⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。現在における体積力法の立場からみると、ここでの計算は一つの切欠きを一つの分割区間として解析する最も簡単な体積力法と考えられるが、1 個の切欠きがある場合の厳密解を有効に利用して、簡単な近似計算にも関わらず非常に高い精度の解析結果を与えている。

基本密度関数とは 1 個の切欠きまたはき裂がある場合の応力場を表現す

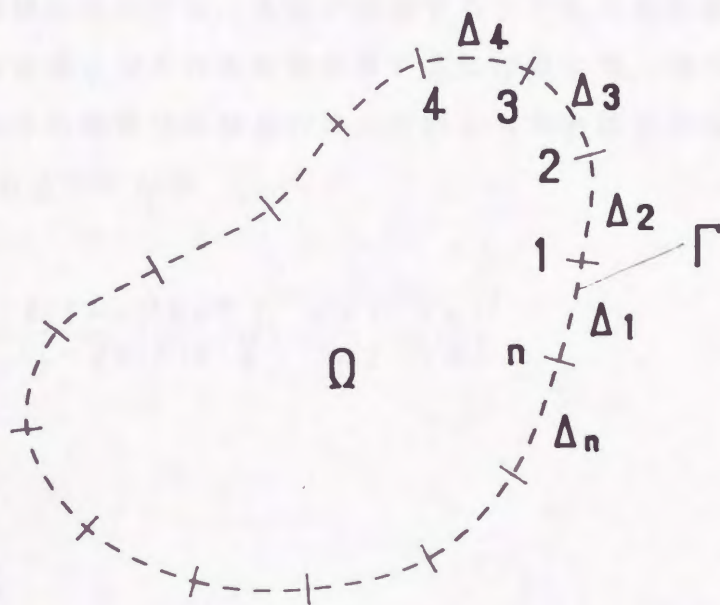


図 2・6 仮想境界の分割

る体積力の密度または体積力対の密度の特性を表す関数で、実際の計算においては、分布させる体積力の密度を「重み」掛ける「基本密度関数」と言う形におく。

$$(\text{体積力密度}) = (\text{重み}) \times (\text{基本密度関数}) \quad (2.1)$$

基本密度関数を用いる場合、この重みを未知数として取扱う。本論文で解析した三次元き裂問題を例に体積力対の基本密度関数を示してみる。図 2・7 に示すような遠方で一様な引張り応力 σ^∞ を受けるだ円板状き裂をもつ無限体の問題においては、き裂が存在することによる影響は、き裂のない無限体中のき裂となるべき仮想境界 Γ 上に作用する、密度 $\phi_z(\xi, \eta)$ の z 方向の引張りの標準型体積力対の分布によって表現される。ここで、 $\phi_z(\xi, \eta)$ は次のようになる。

$$\phi_z(\xi, \eta) = \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma^\infty}{(1-2\nu)E(\kappa)} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (2.2)$$

ただし、

$$\kappa^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2.3)$$

$E(\kappa)$ は第 2 種完全だ円積分である。

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} (1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda) d\lambda \quad (2.4)$$

よって三次元き裂を持つ問題では、き裂仮想境界 Γ 上に分布させる体積力密度を次のように仮定すればよい。

$$\phi_c(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \chi(\xi, \eta) \quad (2.5)$$

ここで、 $W(\xi, \eta)$ は重みで、 $\chi(\xi, \eta)$ は三次元き裂問題における基本密度関数である。式(2.2)により、

$$\chi(\xi, \eta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (2.6)$$

と定義する。

このように密度を(重み) × (基本密度関数) の形で仮定して数値解析を行う際には、式(2.5)の重み関数 $W(\xi, \eta)$ を階段関数、すなわち分割された各区分ごとに異なる定数として仮定しても精度がよい解析結果が得られる。この場合、き裂前縁に沿う点C(図2.7)の応力拡大係数は点Cにおける重み関数の値 $W(C)$ のみによって次のように求められる。

$$K_{Ic} = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2} \sqrt{\frac{\pi}{ab}} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4} W(C) \quad (2.7)$$

[β : 点Cの離心角(図2.7)]

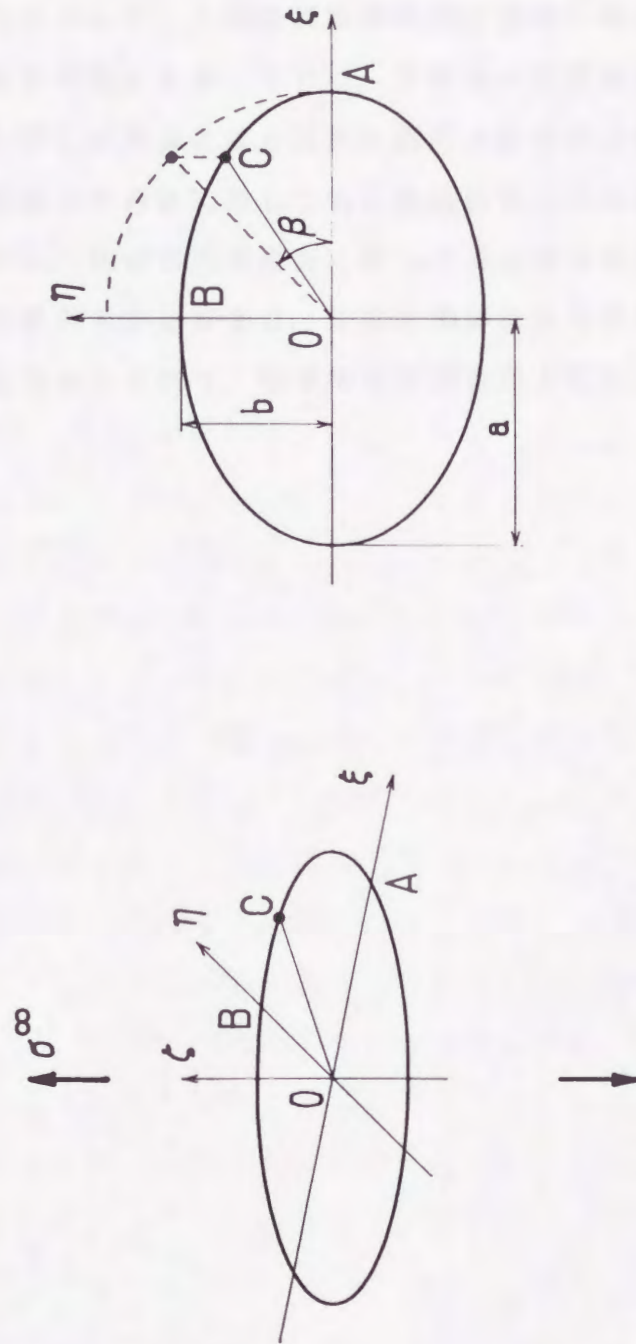


図 2・7 垂直応力 σ^∞ を受けるだ円板状き裂

2・3 結び

この章では、これまでの標準的な体積法法の基本原理について説明した。この中で基本密度関数の概念は、他の数値解析法に比べ、体積法法が高精度の解析を可能にする重要な概念である。特にき裂問題では、基本密度関数を用いることによって、その特異性を厳密に表現し極めて少ない分割数で高精度の解析を可能にする。これは、計算機の記憶容量の制限のために、要素の分割でしばしば問題となる三次元問題の解析には特に重要で、次章で述べる体積法法の汎用化に際してもき裂面に関しては従来通りの解析法を用いる。しかし、他の自由境界面に関して従来通りの方法、即ち仮想境界面に連続的に集中力を分布させ、分割区間の合力を計算する方法では、計算時間は膨大なものとなり、効率的な計算を行うためには新たな改良が必要となる。

第3章 体積力法の汎用化の基本原理

3・1 まえがき

第1章において体積力法の汎用化における問題点を述べ、第2章においてこれまでの体積力法の基本原理について説明した。この章では、体積力法を汎用化するための具体的手法について述べる。

体積力法は、本質的には汎用性のある解析方法である。しかし従来の解析方法では、複雑な任意形状の三次元問題を解析する場合、膨大な計算量のために計算時間の点で問題が生じることがある。境界条件として分割区間の midpoint の応力境界条件を用いれば計算時間の点では、通常問題は生じないが、精度の点で問題が生じる場合がある。このような場合体積力法では、境界条件として合力境界条件⁽¹⁰⁾を用いる。故に、合力境界条件を用いつつかつ計算量を減少させる必要がある。そこで、従来の体積力法では自由境界となるべき仮想境界上に連続的に分布させた集中力を、各区間の注目領域の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を提案する。

有限個の集中力を用い境界条件を満足させる方法は、長谷川によって開発され、これまでに多くの問題の解析に応用されている⁽²¹⁾⁽²²⁾。この方法と合力境界条件とを組み合わせると、高精度の解を比較的短い計算時間で求めることができる。さらにこの解析法は、集中力対を適当に作用させることによって弾塑性計算への拡張も期待される。

この解析法は、図3・1に示すように境界を分割し集中力を各分割区間の外側(注目領域 Ω の外側)に作用させるものであるが、精度のよい解を得るためには集中力を適切な位置に置く必要がある。集中力が分割区間に近すぎると境界上の応力の乱れが解に影響を及ぼし、遠すぎると影響係数マトリックスの性質が悪くなり、通常マトリックスの解法では精度のよい解を得ることができなくなる。周期的に作用した集中力による境界上の応力の乱れは、すでに長谷川によって示されているが⁽²³⁾、合力境界条件を用いた場合の応力集中係数および応力拡大係数への集中力位置の影響は明らかにされていない。

そこでこの章では、有限個の集中力で境界条件を満たす具体的手法を説

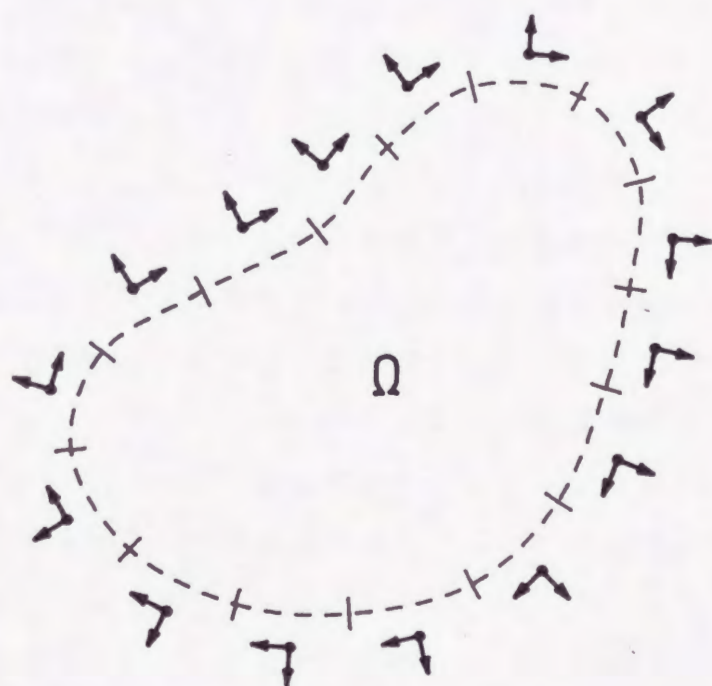


図 3・1 有限個の集中力で境界条件を満たす

明し、そこで問題となる集中力の最適位置を二次元および三次元のいくつかの応力集中問題の解析を行い求める。

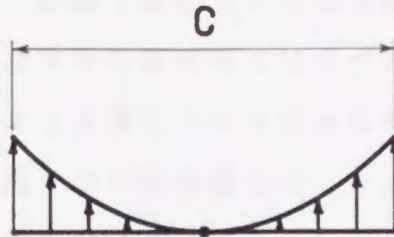
3・2 解析理論

これまでの体積法においては、集中力を仮想境界上に連続的に分布させ、区間の midpoint の応力境界条件を満足させた [図 3・2(a)]。図 3・3(a) に示すようにこの解析法では、区間の midpoint のみの応力境界条件を満足しているため、各区間で得られた表面力と与えられた表面力とは、完全には一致しない。そのとき分割区間の代表寸法を c 、その分割区間から注目点までの距離を s とすれば、境界条件の乱れによる影響は、三次元問題の場合、無限体中に作用する集中力と同様に、距離 s の増加とともに $(c/s)^2$ のオーダーで減少する [二次元の場合は (c/s) のオーダーで減少する]。この誤差の影響は、二次元問題においては分割数を増すことで実用上無視できる程度になるが、三次元問題では分割数の制限から問題によっては無視できなくなる。これを解決するためには、区間の midpoint の応力境界条件 [図 3・2(a)] のかわりに区間の合力境界条件 [図 3・2(b)] を用いればよい。合力境界条件を三次元問題に用いた場合、図 3・3(b) に示すように乱れによる応力場の影響は、無限体中に作用する集中力対と同様に $(c/s)^3$ のオーダーで応力境界条件の場合より急速に減少する。しかし、このとき四重積分が必要となり、三次元の複雑な形状の解析においては、現在の高性能計算機を用いてもかなりの計算時間を必要とする。

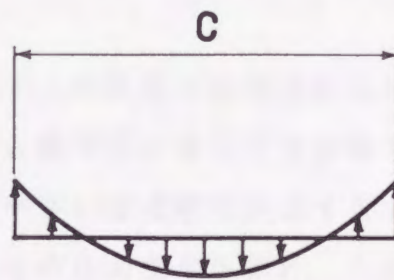
そこで本研究では、図 3・1、図 3・2(c) に示すように、集中力を仮想境界上に分布させるかわりに各区間の外側（注目領域 Ω の外側）に適当な大きさの集中力を作用させ各区間の合力境界条件を満足させる方法を提案する。この手法を用いれば三次元問題においても合力計算が二重積分となり比較的短い計算時間で高精度の解を得ることができる。

Body Force	Body Force	Point Force
Stress B. C.	Resultant Force B. C.	Resultant Force B. C.
Single Integral (2D)	Double Integral (2D)	Single Integral (2D)
Double Integral (3D)	Quadruple Integral (3D)	Double Integral (3D)
(a)	(b)	(c)

図 3・2 解析法による積分回数の違い



(a) Stress Boundary Condition



(b) Resultant Force Condition

図 3・3 境界条件の乱れ

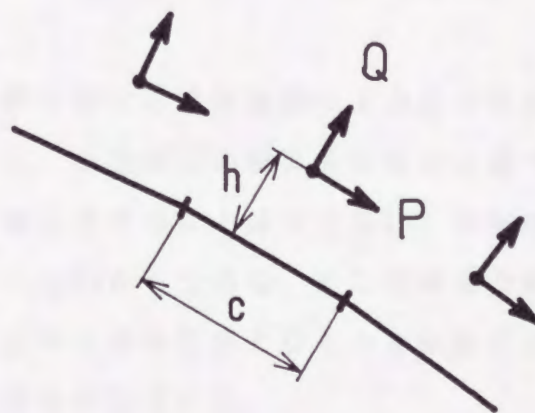


図 3・4 集中力と境界との距離

3・3 計算結果および考察

3・3・1 周期集中力による応力分布

連続的に分布させるべき集中力を有限個の集中力で置き換えることによって生じる問題点は、合力区間での応力の乱れである。この乱れは、分割区間の長さ c と集中力と境界との距離 h に依存する(図 3・4)。図 3・5, 3・6 は、周期集中力による境界における応力分布を示したものである。これらの図より、合力区間での応力の乱れは、 $c/h \leq 1.0$ ならば 1% 未満であることがわかる。すなわち、境界上の応力値が問題である切欠き問題では、少なくとも $c/h \leq 1.0$ となるようにしなければならない。

3・3・2 円孔またはだ円孔を有する無限板の引張りにおける応力集中係数

図 3・7 は、円孔を有する無限板の引張りにおける応力集中係数 K_t と c/h (分割区間長さ c と集中力と境界との距離 h との比) の関係を示したものである。 c/h が小さいほど精度がよくなることがわかる。

図 3・8 は、だ円の場合の応力集中係数 K_t と集中力位置 c/h との関係を示したものである。

図 3・7, 3・8 より、切欠き問題における集中力の最適位置は、 $c/h = 0.5 \sim 0.7$ であることがわかる。また、分割区間の長さは、切欠き底で切欠き半径の 4 分の 1 程度以下でなければならないことがわかる。

3・3・3 縁き裂を有する半無限板の応力拡大係数

き裂を含む問題では、き裂部分の境界条件を以上述べてきた補助領域に集中力を作用させて満足させることはできない。き裂は両側が解析対象であり、補助領域を持たないからである。そこで通常の体積力法の手法に従い、き裂については集中力対をき裂となるべき位置に連続的に分布させ、区間の midpoint の応力境界条件を用いる。

図 3・9 は、半無限板に存在する縁き裂の応力拡大係数 K_t と集中力の位置 c/h との関係を示している。き裂面には集中力を分布させ、半無限板の境界条件は集中力を補助領域に作用させることによって満足させてい

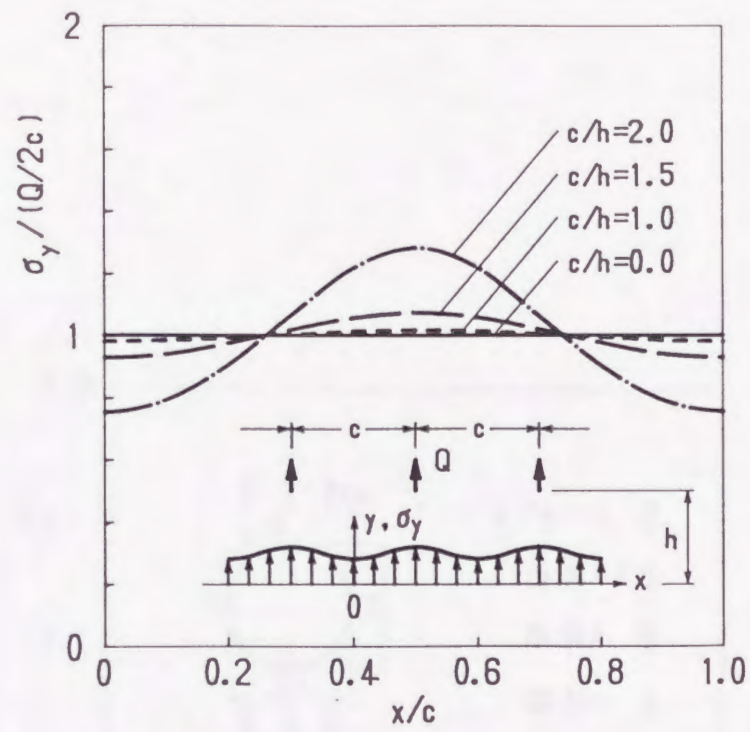


図 3・5 周期集中力による境界条件の乱れ(垂直応力)

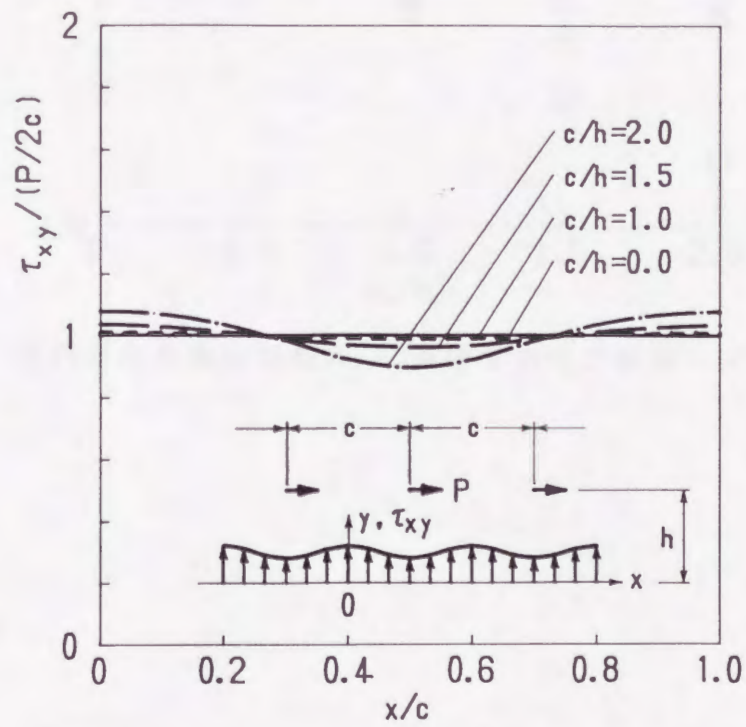


図 3・6 周期集中力による境界条件の乱れ(せん断応力)

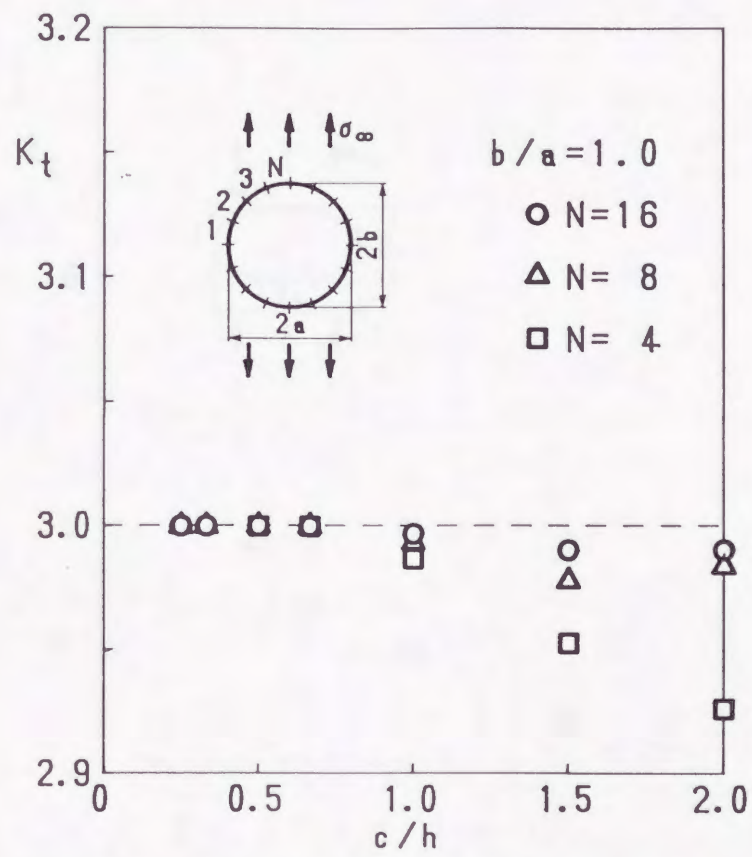


図 3・7 円孔の応力集中係数 K_t に及ぼす集中力位置 c/h の影響

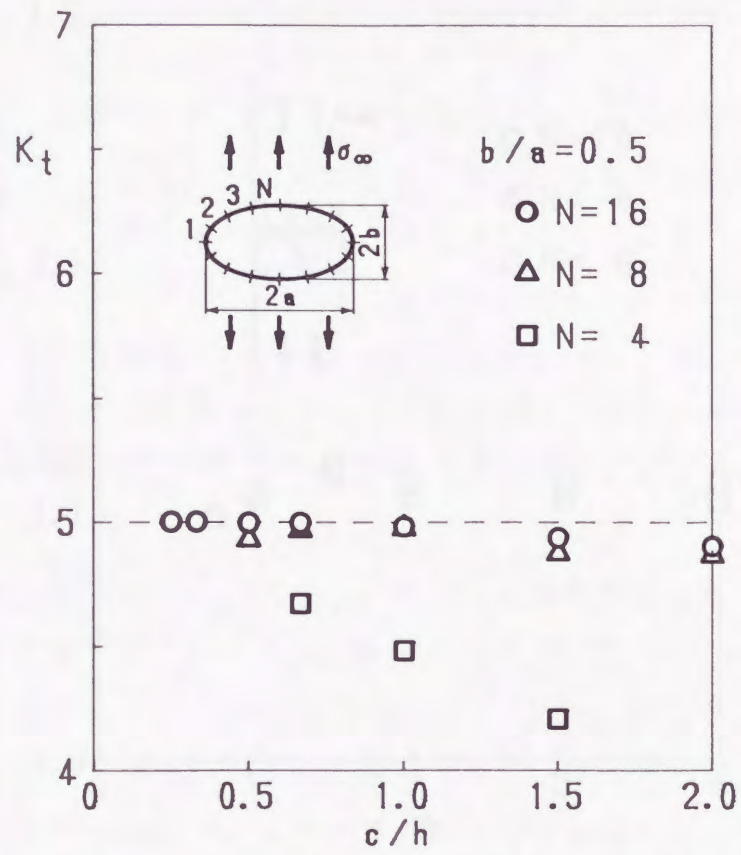


図 3・8 だ円孔の応力集中係数 K_t に及ぼす集中力位置 c/h の影響

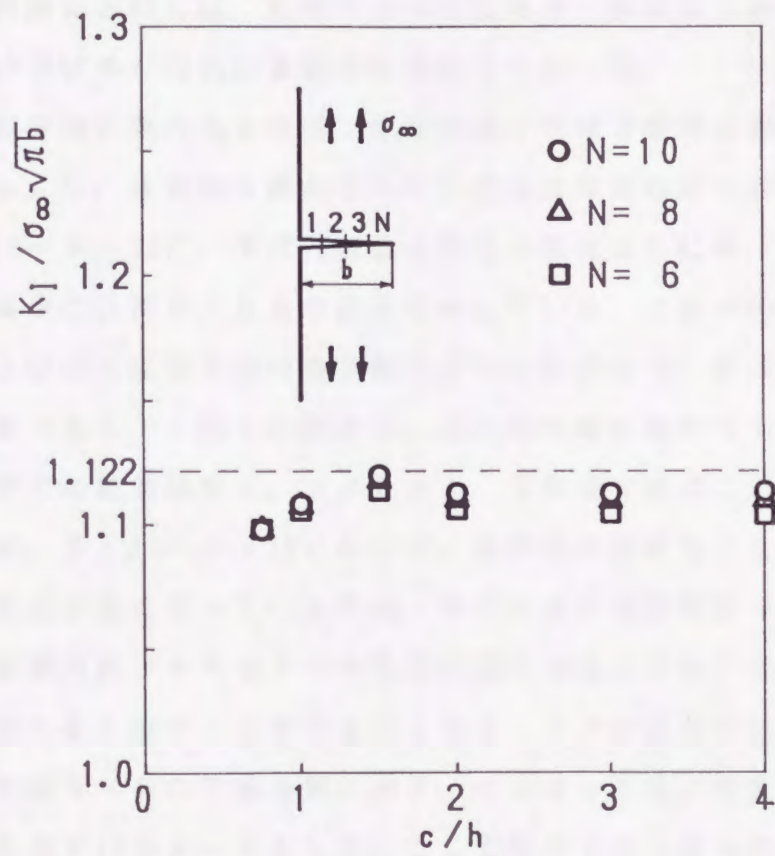


図 3・9 半無限板の縁き裂の K_I に及ぼす集中力位置 c/h の影響

る。自由縁の分割長さはき裂長さの約10倍とし、各分割区間の長さは、き裂の分割区間の長さとはほぼ等しくしている。

この図から、き裂問題の集中力の最適位置は、 $c/h = 1.5$ 程度であることがわかる。き裂問題の集中力の最適位置は、切欠き問題のそれに比べ境界に近い。

3・3・4 半だ円表面き裂を有する半無限体の応力拡大係数

三次元問題においては、比較できる精度の高い解析結果があまりないので、本論分では半だ円表面き裂の計算のみを行った。

自由縁の分割区間の大きさは、き裂の近くではき裂の分割区間の大きさとほぼ等しくし、き裂から離れるにつれて等比級数的に大きくしている。

図3・10～3・12に、半だ円表面き裂のき裂先端Cにおける応力拡大係数 K_I と集中力位置 c/h との関係を示している。これらの図における c の値は、き裂面に直角方向の自由縁の分割区間長さで、 N は、き裂半径方向の分割数である。これらの図から、三次元問題においても二次元問題と同様に集中力の最適位置は、 $c/h = 1.5$ 程度であることがわかる。

図3・9、3・10～3・12において、集中力の位置 c/h が1.5未満になると精度が悪くなっているのは、集中力が分割区間から離れることによって、影響係数マトリックスの性質が悪くなることと、き裂近傍の急な応力変化をうまく消すことができなくなることとによるためである。これらのことを図3・9の問題を例に示す。マトリックスの性質が悪くなっていることを表すパラメータとして、ここではマトリックスの解法におけるLU分解法の過程でのピボットの値の桁落ちを調べてみた。図3・13に、ピボットの値の桁落ちの桁数と c/h の関係を示す。この図より、 $c/h < 1.5$ になるとピボットの値の桁落ちの桁数が多くなることがわかる。また、図3・14、3・15に、き裂近傍の自由境界となるべき y 軸上の垂直応力およびせん断応力の分布を示す。どちらも $c/h \geq 1.0$ では、集中力が分割区間から離れるほど応力分布は滑らかになるが、 $c/h < 1.0$ になると応力分布が大きく乱れていることがわかる。

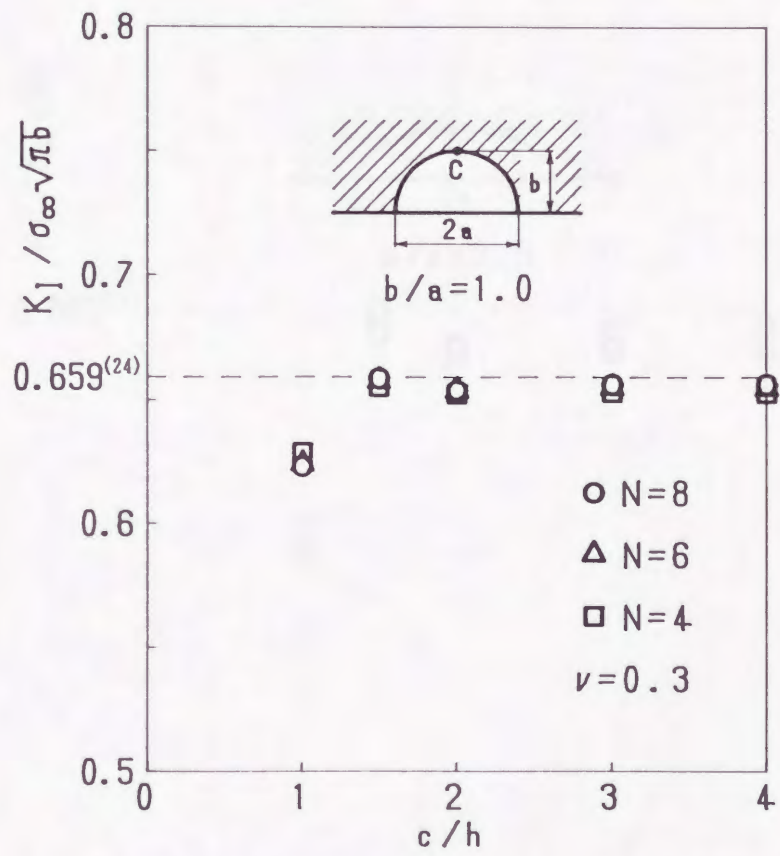


図 3・11 表面き裂の K_I に及ぼす集中力位置 c/h の影響 ($b/a = 1.0$)

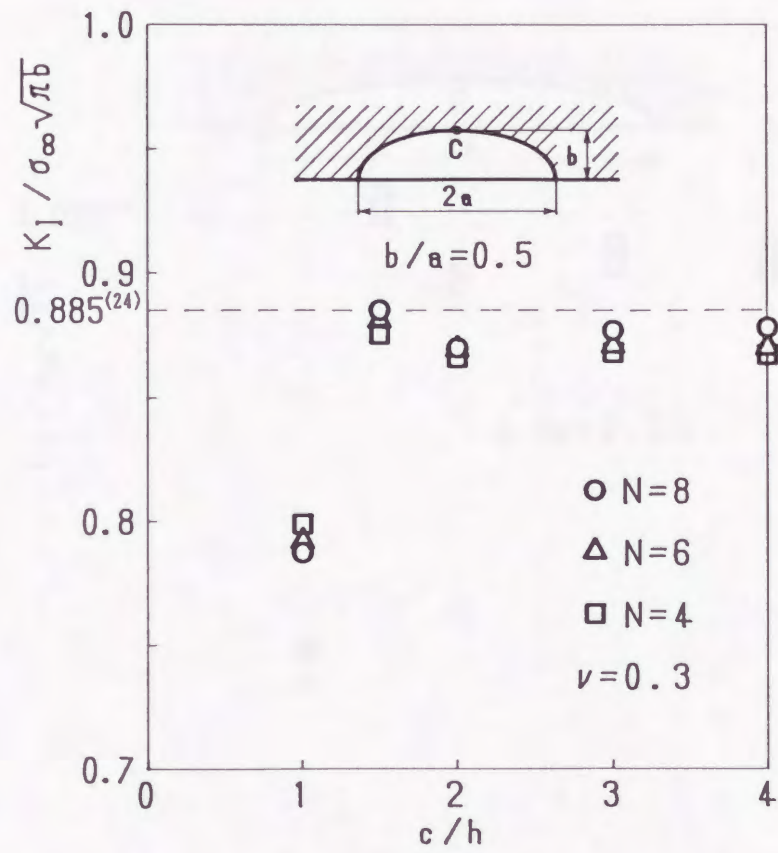


図 3・12 表面き裂の K_I に及ぼす集中力位置 c/h の影響 ($b/a = 0.5$)

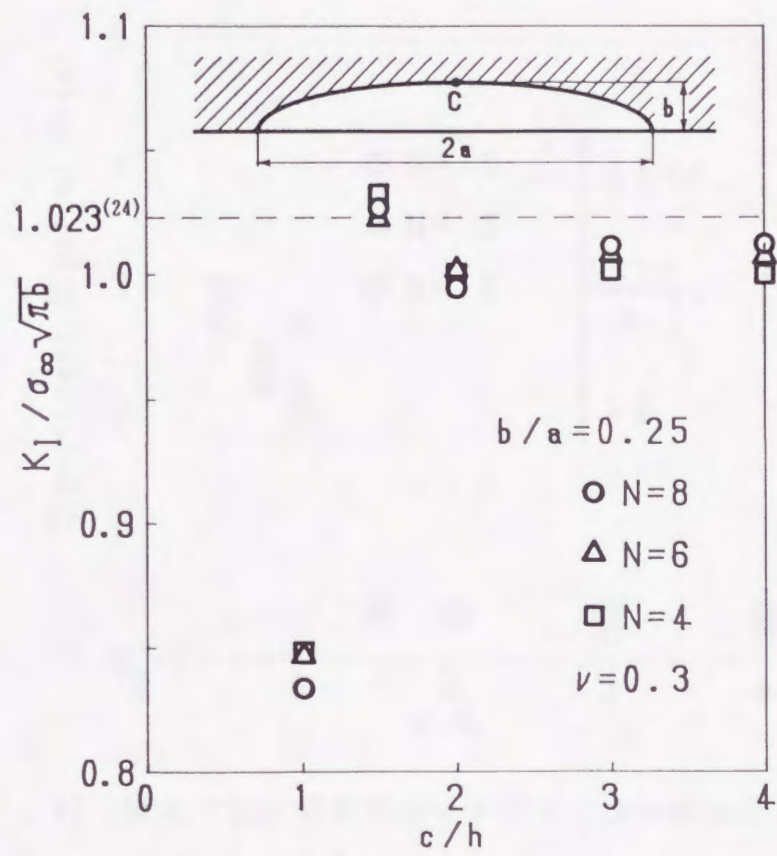


図 3・13 表面き裂の K_I に及ぼす集中力位置 c/h の影響 ($b/a = 0.25$)

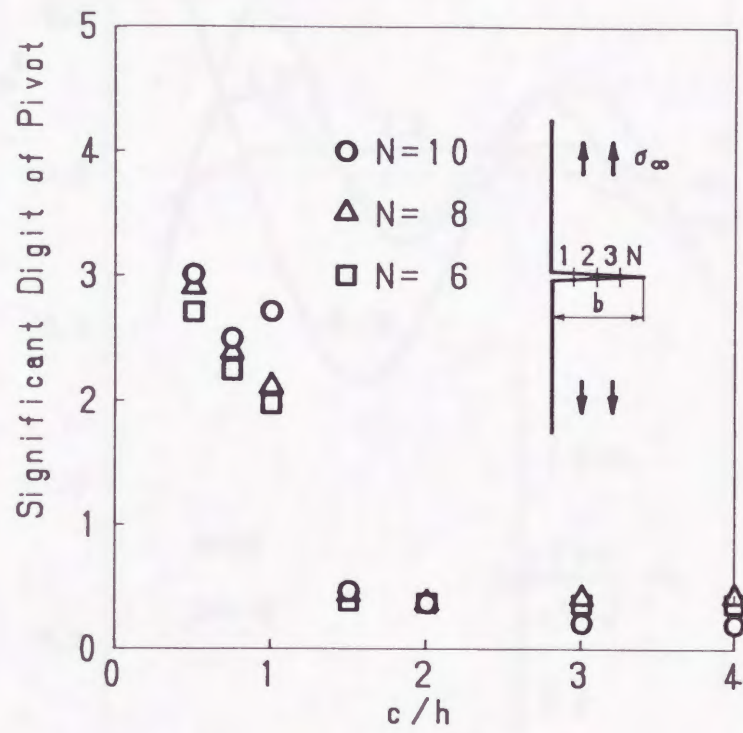


図 3・13 図 3・9 の問題でのマトリックスの解法における
ピボットの桁落ち

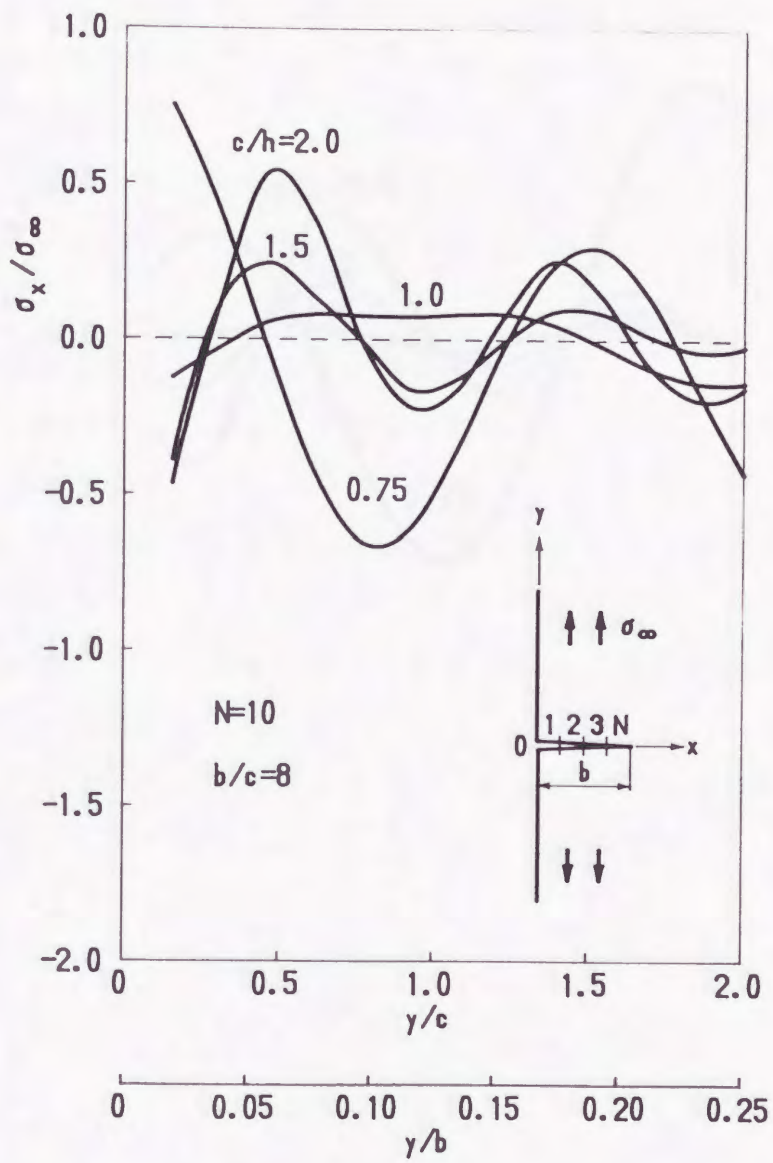


図 3・14 図 3・9 の問題での y 軸上の応力分布 (垂直応力)

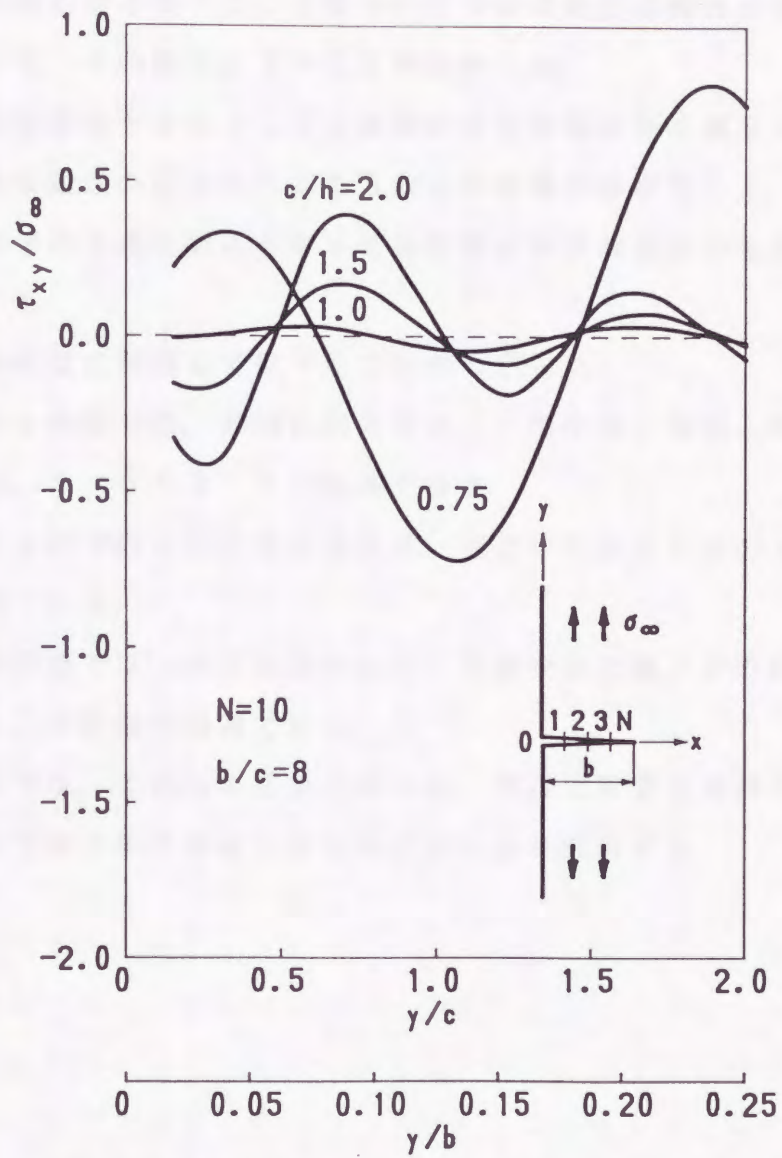


図 3・15 図 3・9 の問題での y 軸上の応力分布 (せん断応力)

3・4 結び

体積力法の三次元問題における汎用化に必要な計算量の減少を図るために、境界となるべき仮想境界に連続的に分布させるべき集中力を各区間の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を提案した。また、この解析法で問題となる集中力の位置をいくつかの問題の解析を行うことによって検討した。その結果以下のことがわかった。

(1) 有限個の集中力によって各区間の合力境界条件を満足させる方法は、計算が簡単な通常の応力法による方法と計算量がほぼ等しく、計算精度は、境界上に集中力を連続的に分布させ各区間の合力境界条件を満足させる方法に匹敵する。

集中力の位置に関連して以下のことがわかった。

(2) 切欠き問題では、分割区間の長さ c と集中力と境界との距離 h との比 c/h は、 $0.5 \sim 0.7$ が最適である。

(3) 切欠き底での分割区間の長さは、切欠き半径の 4 分の 1 以下であることが必要である。

(4) き裂問題では、分割区間の長さ c と集中力と境界との距離 h との比 c/h は 1.5 程度が最適である。

以下の章では、これらの結果に基づき、実用上重要な各種の問題を有限個の集中力で境界条件を満足させる方法により解析する。

第4章 内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数

4・1 まえがき

内圧 p が作用する有限肉厚円筒の内面に存在する半だ円表面き裂 (図 4・1) の解析は, 実用上各種圧力容器, 配管などのぜい性破壊強度や疲労限度の予測のために重要である. このため, その応力拡大係数を求める試みは, 多くの研究者によって行われている⁽²⁵⁾⁻⁽³³⁾.

Kobayashi ら⁽²⁷⁾ は, この問題と有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂を比較することによって, 円筒面の曲率の応力拡大係数への影響を検討した. Heliotら⁽²⁸⁾ は, 境界積分法を用いて応力拡大係数を求めた. Raju and Newman⁽³²⁾⁽³³⁾ は三次元有限要素法を用いて, 円筒の肉厚およびき裂形状に関して, 広い範囲の応力拡大係数を求めている. しかし, これらの結果には, 互いにかかなりの差が見られる⁽³²⁾⁽³³⁾.

そこで第4章では, 有限個の集中力による体積法を用いて, この問題に対する高精度の応力拡大係数を求め, 他の研究者の結果と比較した. また, 本結果が半無限体に存在する半だ円表面き裂または有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で, どの程度近似できるかについても検討した. さらに, 実用に供するために, 内圧を受ける有限肉厚円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を, 有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比の形で示した.

第3章では, これまでの体積法において, 仮想境界上に連続的に分布させた集中力を, 仮想境界の外側の点に作用する有限個の集中力で近似する方法を提案した. この方法は, 境界条件として, 分割した仮想境界の各区間の合力境界条件を用いることによって, 必要な情報が境界の近くでなければ, 高精度の解を短い計算時間で与えるものである. この章で取り扱うような複雑な三次元問題に対しては, この解析方法は特に有効である.

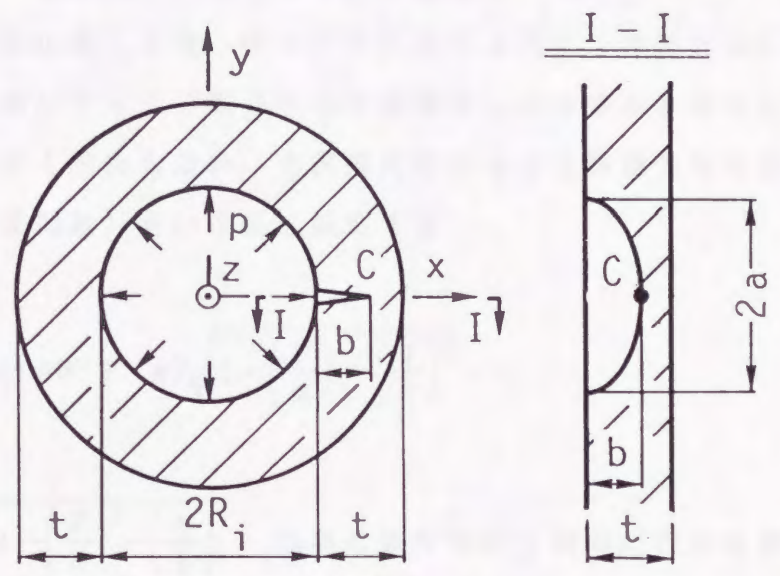


図 4・1 内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂

4・2 解析理論

第3章で述べたことに基づいて、次のような手法で数値解析を行った。体積力法では、基本的には適当な力の分布によって無限体中に与えられた与えられた境界条件を満足するような弾性場を作ればよいが、ここで必要なのは応力拡大係数、すなわち、き裂先端付近の情報であるので、き裂面と円筒面に対してそれぞれ異なる工夫をした。

(1) 内外円筒面に関しては、図4・2に示すよう円周方向及び軸方向に等比分割し、得られた折れ面で本来曲面である境界を近似する。各折れ面の中心から離れた点（注目領域の外側にある）に r , θ , z 方向（つまり、半径、円周、軸方向）の集中力を作用させる。

(2) き裂面に関しては、図4・3に示すように、半径方向に N_k 分割を行う。き裂面にそって引張りの標準型集中力対を分布させるが、応力拡大係数を精度よく求めるため、各区間に分布させる体積力対の密度を（重み） \times （基本密度関数）という形に仮定する。

$$\phi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (4.1)$$

ここで、 $\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}$ の項は無限体に1個のだ円状き裂がある問題を体積力法で表現するときの、き裂面に分布させるべき体積力対のパターンであり、本解析の基本密度関数である。 $W(\xi, \eta)$ はその基本密度関数に掛けるべき重みで、本解析では各区分ごとに一定とし、その値は各区分の中点の応力境界条件によって決定される。

なお、内外円筒面を折れ面で近似することによって円筒面の各分割区間が長方形となり、集中力と引張りの標準型集中力対による円筒面の各分割区間の合力は解析的に計算することができ（付録4, 5参照）、全体の計算時間はさらに大幅に短縮される。

今、き裂面上に分布させる体積力対の各分割区間における重みを $\{W\}$ とし、それによる、き裂面の各注目点の応力 σ_c と円周面の各分割区間での

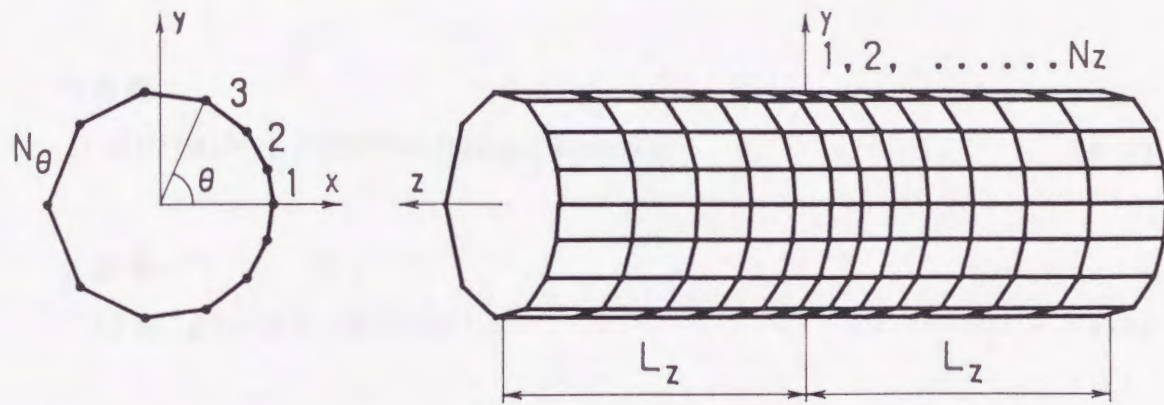


図 4・2 内外円筒面の分割

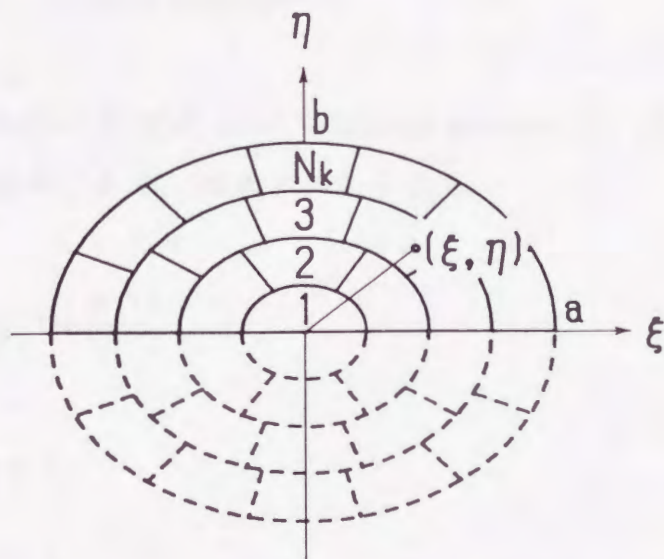


図 4・3 き裂面の分割

合力の影響係数マトリックスをそれぞれ $\langle FF \rangle$ と $\langle EF \rangle$ とする。円筒面上各着力点に作用させる集中力の大きさを $\{\phi\}$ として、それによる、き裂面の各注目点での応力 σ_0 と円筒面の各分割区間での合力の影響係数マトリックスをそれぞれ $\langle FE \rangle$ と $\langle EE \rangle$ とする。そうすれば、き裂面に内圧 p が作用しない場合の境界条件は次のようになる。

円筒面：

$$\langle EE \rangle \{\phi\} + \langle EF \rangle \{W^*\} = \{\text{Internal pressure}\} \quad (4.2)$$

き裂面：

$$\langle FE \rangle \{\phi\} + \langle FF \rangle \{W^*\} = \{0\} \quad (4.3)$$

式(4.2)、(4.3)から、 $\{W^*\}$ を求めるための方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (\langle FF \rangle - \langle FE \rangle \langle EE \rangle^{-1} \langle EF \rangle) \{W^*\} \\ & = -\langle FE \rangle \langle EE \rangle^{-1} \{\text{Internal pressure}\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

式(4.4)の右辺の項 $\langle FE \rangle \langle EE \rangle^{-1} \{\text{Internal pressure}\}$ は、内圧を受ける円筒での応力 σ_0 の分布であり、次式で与えられる。

$$\sigma_0 = \frac{p R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_o^2}{r^2} \right) \quad (4.5)$$

ここで、 $R_o = R_i + t$ 。

方程式(4.4)を解いて未知量である重み $\{W^*\}$ が決まれば、き裂面に内圧 p が作用しない場合のき裂前縁の応力拡大係数 K_{I^*} はその区間の重み W_c を用いて次の式から求められる。

$$K_I^* = \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)^2} \sqrt{\pi b} W_c \quad (4.6)^{*1}$$

また、き裂面に内圧 p が作用する場合の重み $\{W\}$ は式 (4.4) の右辺の項 $(FE)(EE)^{-1}\{\text{Internal pressure}\}$ に $\{\text{Internal pressure}\}$ を加えることによって求められる。

*1 き裂面に内圧 p が作用しない場合には*を付けて、 p が作用する場合のものと区別する。

4・3 計算結果および考察

内圧 p が作用する円筒の内面に存在する半だ円表面き裂 (図 4・1) の最深点 C における応力拡大係数を求めた。以下の計算では、内外円筒面の分割数を、 $N_z=N_k$ 、 $N_\theta=N_k$ 、とし、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

4・3・1 計算結果の精度の検討

本解析において、計算結果に含まれる誤差の主な原因は、次の二つである。一つは、本来無限長であるべき内外円筒面の荷重範囲 L_z を有限長さとしていることであり、もう一つは、連続的に満足されるべき境界条件を有限個の応力境界条件もしくは合力境界条件に置き換えていることである。図 4・4 は、応力拡大係数におよぼす a/L_z の関係を示している。この図より、内外円筒面の荷重範囲 L_z を有限としていることによる誤差は、 $L_z/a \geq 2$ と置くことによって 10^{-3} 以下となることがわかる。また、図 4・5 は、形状パラメータ $t/R_i=0.1$ 、 $b/t=0.2$ 、 $a/b=1.0$ の場合の無次元化した応力拡大係数 F_I (または F_I^*) と分割数 N_k の関係を示している (以下では、き裂面に内圧 p が作用する場合を F_I 、き裂面に内圧 p が作用しない場合を F_I^* で表すことにする)。この図より、 $N_k=6$ (総分割数=324) において、すでによい外そう性を示していることがわかる。以上の結果から、応力拡大係数を計算するに当たっては、 $L_z/a=2$ とし、 $N_k=8$ 、 10 のときの値によって厳密解を推定した。

4・3・2 無次元化した応力拡大係数 F_I 、 F_I^*

表 4・1、4・2 および図 4・6 ~ 4・10 に、き裂の最深点における無次元化した応力拡大係数とき裂深さ b/t の関係を示す。表および図における $b/t=0$ の値は引張りを受ける半無限体に存在する半だ円表面き裂の結果⁽²⁴⁾である。

これらの図において、本解析結果は Isida らの結果⁽²⁴⁾ ($b/t=0$) に滑らかにつながっている。

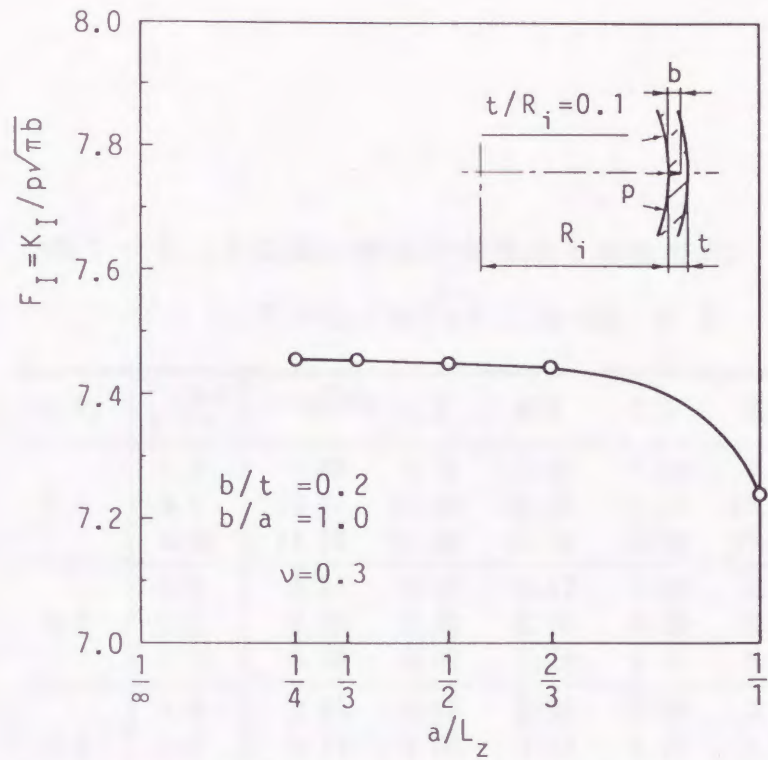


図 4・4 円筒面の荷重範囲 L_z と解の収束性の例

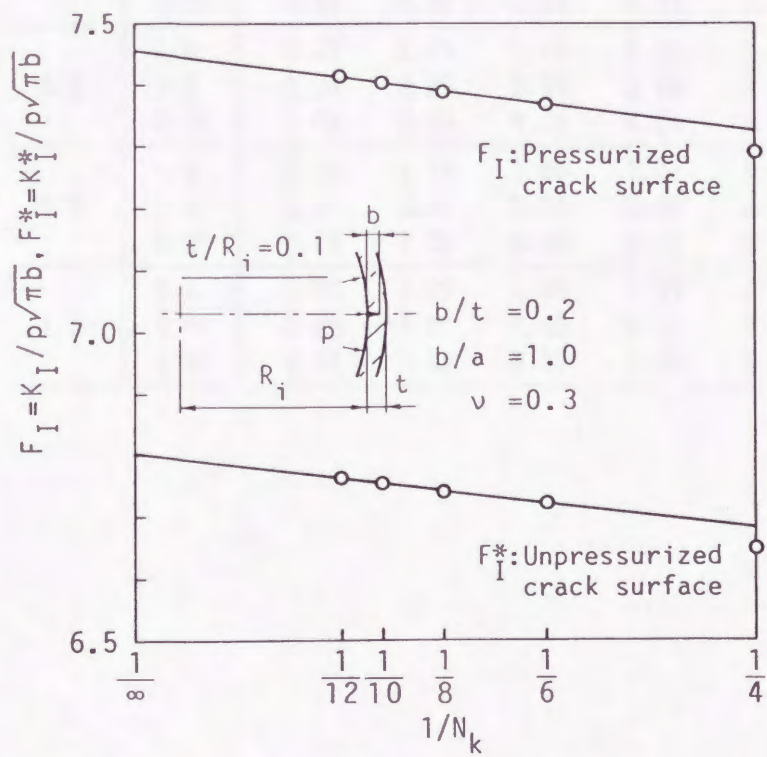


図 4・5 F_I , F_I^* と分割数 N_k の関係

表 4・1 き裂面に内圧が作用する場合の F_I

$$(F_I = K_I / \rho \sqrt{\pi b} , \nu = 0.3)$$

t/R_i	b/t		$0^{[24]}$				
	b/a		0.2	0.4	0.6	0.8	
0.1	1.0		7.59	7.45	7.42	7.49	7.71
	0.5		10.20	10.06	10.45	11.11	11.90
	0.25		11.79	11.86	13.24	15.09	17.01
0.2	1.0		4.31	4.15	4.07	4.07	4.24
	0.5		5.79	5.59	5.70	6.06	6.71
	0.25		6.70	6.57	7.23	8.31	9.83
0.3	1.0		3.23	3.05	2.95	2.94	3.09
	0.5		4.34	4.09	4.13	4.39	4.99
	0.25		5.01	4.81	5.24	6.07	7.43
0.4	1.0		2.69	2.50	2.39	2.37	2.52
	0.5		3.61	3.34	3.34	3.56	4.13
	0.25		4.18	3.93	4.24	4.93	6.17
0.5	1.0		2.37	2.17	2.05	2.03	2.18
	0.5		3.19	2.89	2.86	3.06	3.60
	0.25		3.68	3.39	3.63	4.24	5.36
0.7	1.0		2.02	1.78	1.66	1.64	1.80
	0.5		2.71	2.37	2.31	2.48	3.21
	0.25		3.13	2.78	2.93	3.40	5.16
1.0	1.0		1.76	1.49	1.33	1.37	1.51
	0.5		2.36	1.97	1.89	2.02	2.48
	0.25		2.73	2.30	2.37	2.70	3.49

表 4・2 き裂面に内圧が作用しない場合の F_I^*

$$(F_I = K_I / \rho \sqrt{\pi b} , \nu = 0.3)$$

t/R_i	b/a \ b/t	$0^{[24]}$	0.2	0.4	0.6	0.8
		0.1	1.0	6.94	6.79	6.76
	0.5	9.31	9.17	9.52	10.11	10.82
	0.25	10.77	10.77	12.82	13.74	15.47
0.2	1.0	3.65	3.50	3.42	3.40	3.52
	0.5	4.91	4.71	4.79	5.07	5.59
	0.25	5.67	5.55	6.08	6.96	8.21
0.3	1.0	2.57	2.40	2.30	2.27	2.37
	0.5	3.45	3.23	3.22	3.41	3.84
	0.25	3.99	3.92	3.11	3.58	4.43
0.4	1.0	2.03	1.85	1.74	1.70	1.79
	0.5	2.73	2.48	2.44	2.57	2.95
	0.25	3.15	2.92	3.11	3.58	4.43
0.5	1.0	1.71	1.52	1.41	1.36	1.44
	0.5	2.30	2.04	1.97	2.07	2.40
	0.25	2.66	2.40	2.52	2.89	3.61
0.7	1.0	1.36	1.14	1.02	0.97	1.04
	0.5	1.83	1.53	1.43	1.49	1.90
	0.25	2.11	1.79	1.83	2.07	3.10
1.0	1.0	1.10	0.86	0.71	0.69	0.73
	0.5	1.48	1.14	1.03	1.05	1.24
	0.25	1.71	1.34	1.30	1.42	1.77

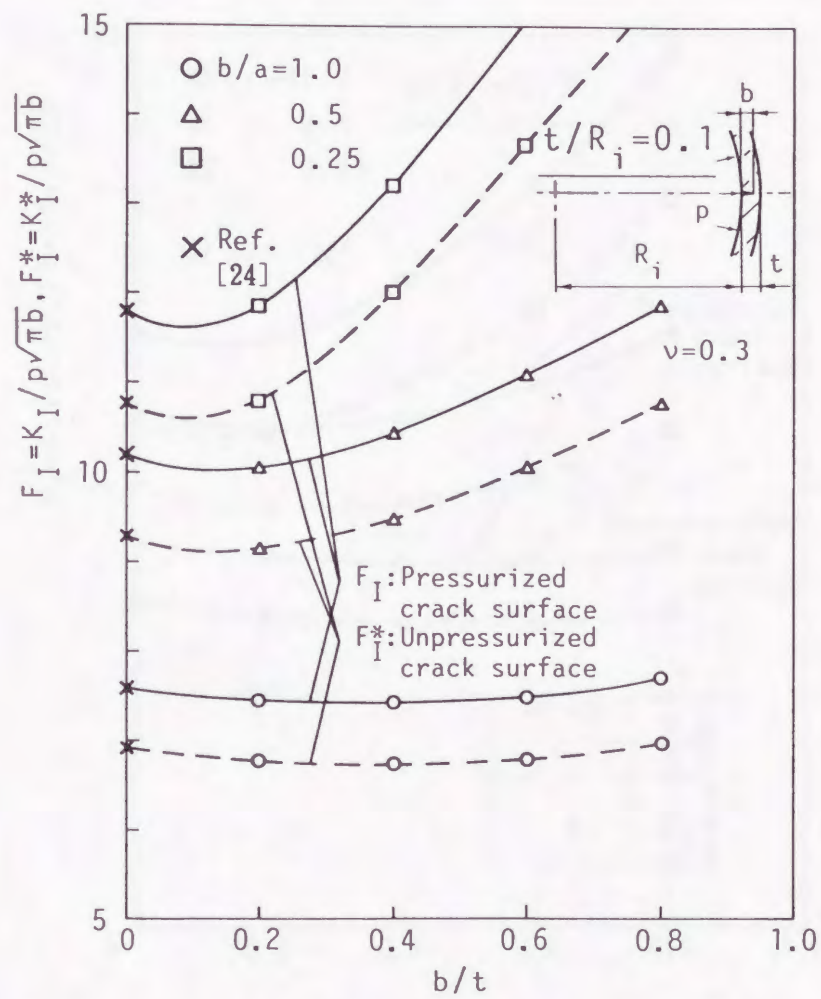


図 4・6 F_I , F_I^* と b/t の関係 ($t/R_i=0.1$)

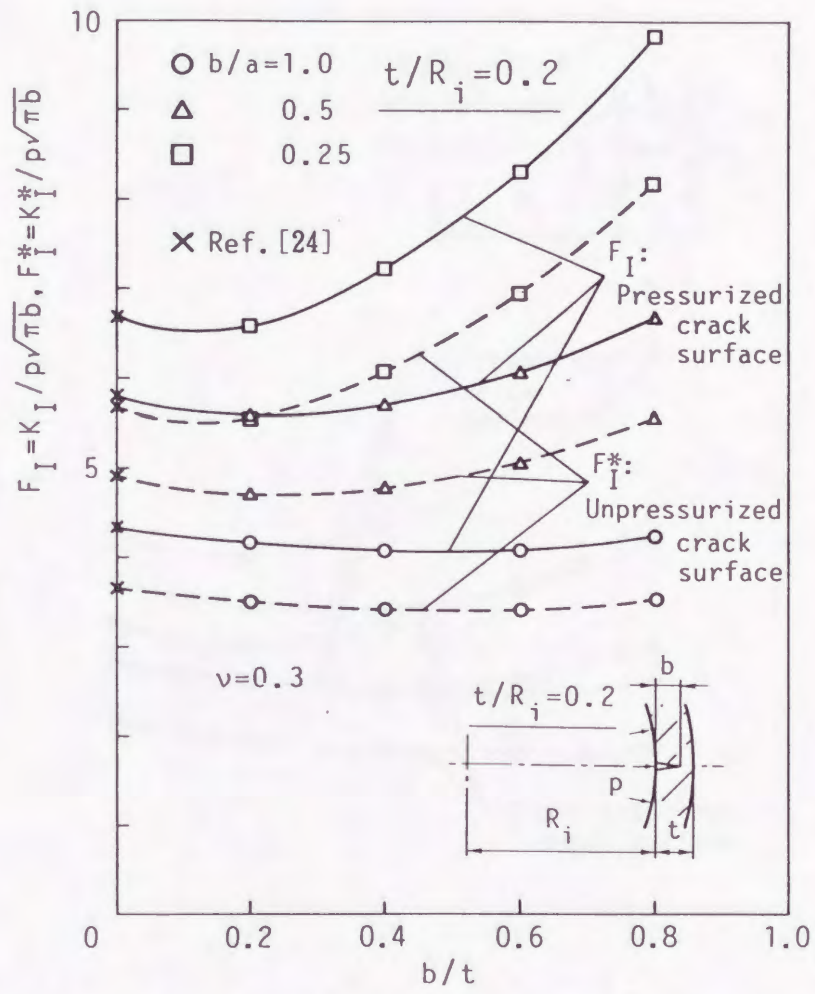


図 4・7 F_I , F_I^* と b/t の関係 ($t/R_i=0.2$)

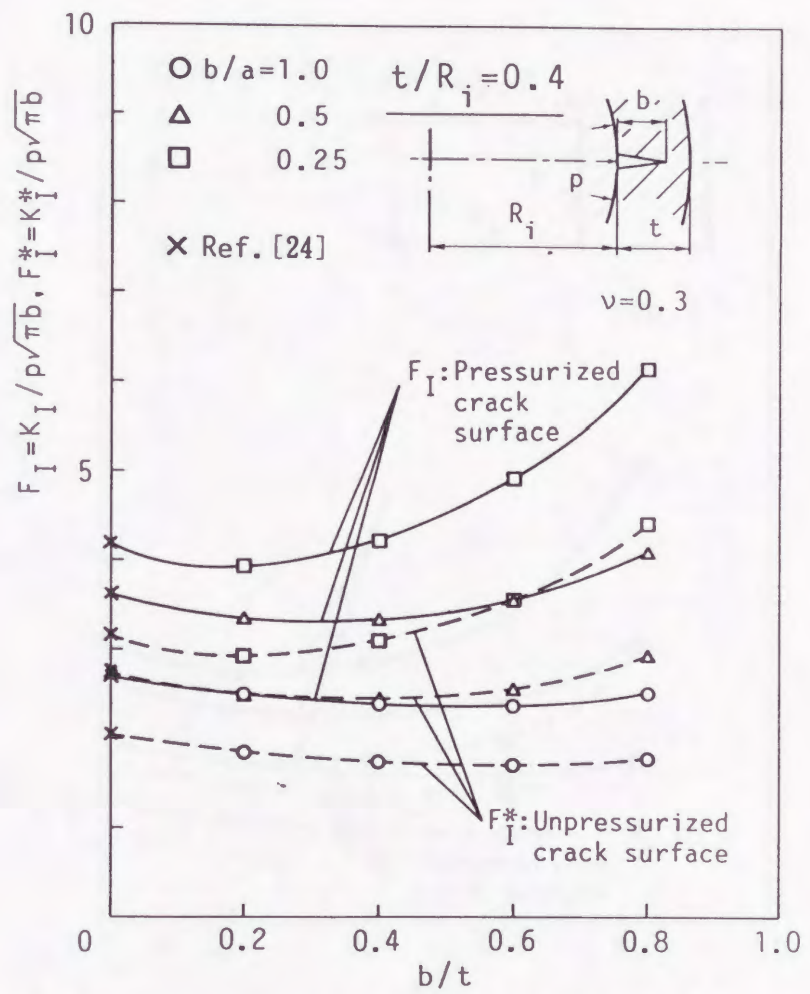


図 4・8 F_I, F_I^* と b/t の関係 ($t/R_i=0.4$)

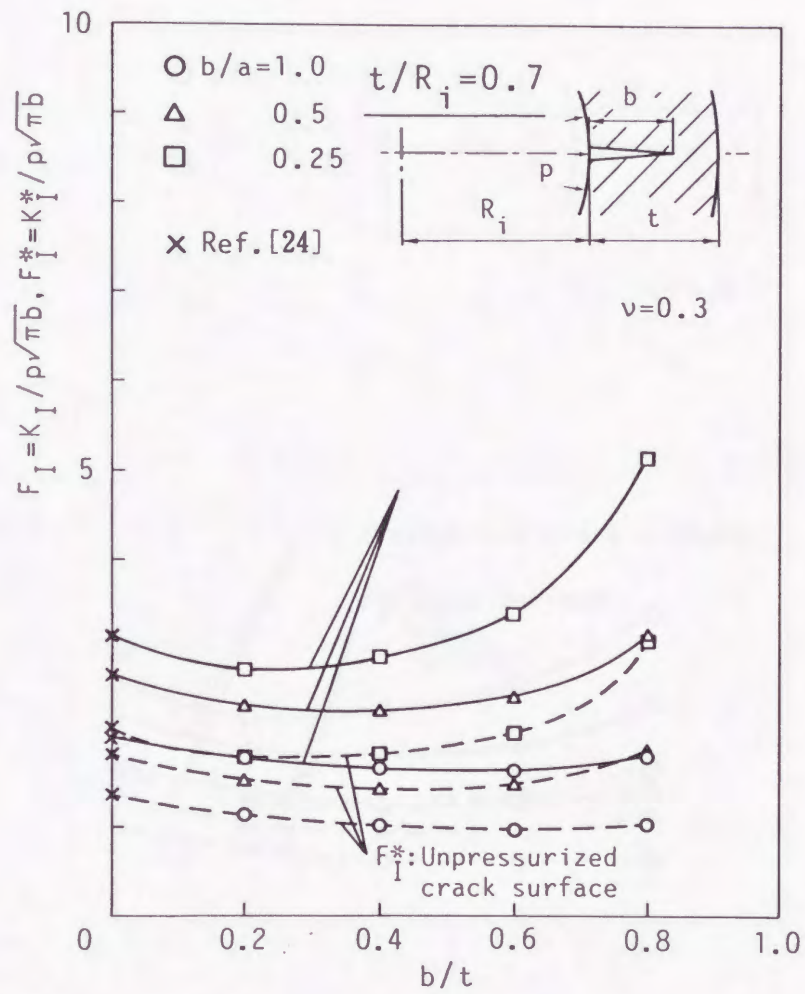


図 4・9 F_I, F_I^* と b/t の関係 ($t/R_i=0.7$)

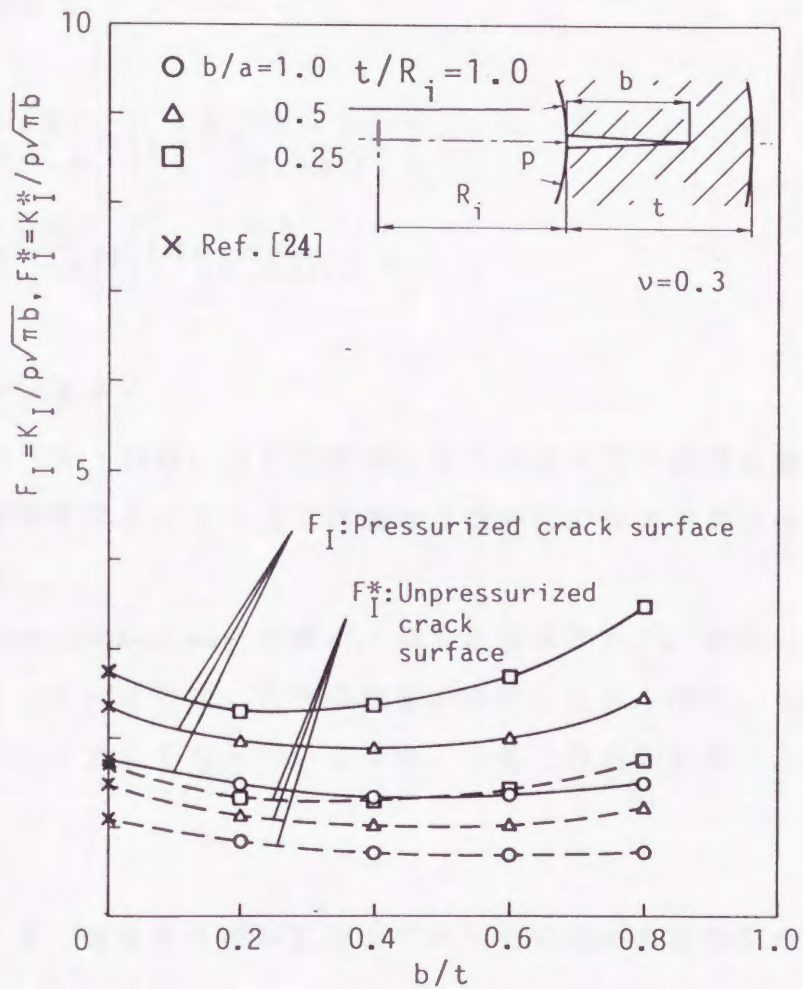


図 4・10 F_I , F_I^* と b/t の関係 ($t/R_i=1.0$)

4・3・3 半無限体に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比較

比較するべき、半無限体に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数は、図4・11に示すように、内圧 p を受ける円筒のき裂がない場合の応力分布を直線で近似した応力分布（円筒断面の最内側において σ_i 、き裂先端において σ_s ）が半無限体に作用するときのものである²⁴。 σ_i および σ_s は、次式より求まる。

$$\sigma_i = \frac{pR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left\{ 1 + \frac{R_o^2(R_i + 3b)}{(R_i + b)^3} \right\} \quad (4.7)$$

$$\sigma_s = \frac{pR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left\{ 1 + \frac{R_o^2}{(R_i + b)^2} \right\} \quad (4.8)$$

ここで、 $R_o = R_i + t$ 。

図4・12～4・16は、円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と半無限体に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比を示したものである。

$K_i/K_{i \text{ SEMI-INFINITE BODY}}$ の値が、相対き裂長さ b/t が短いときに1より小さくなっているのは、円筒の内面の曲率によるもので、 b/t が1に近づくとつれて大きくなっているのは、円筒の外面の影響によるものである。

4・3・4 有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比較

図4・17～4・21は、円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比を示したものである。比較すべき、有限厚さの板に加わる応力分布は、4・3・3と同様に図4・11に示す応力分布である。

これらの図より、実用上重要な円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数は、円筒厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲においては、有限厚さの板

に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることがわかる
(誤差約5パーセント以内)。

4・3・5 他の研究者の結果との比較

図4・22は、Kobayashiらの結果²⁷⁾と本解析結果を比較したものである。Kobayashiらの結果は、 $b/a \geq 0.6$ において、本解析結果とよく一致している。

図4・23は、Heliotらの結果²⁸⁾およびMcGown and Raymundの結果³⁰⁾と本解析結果を比較したものである。三次元有限要素法を用いたMcGown and Raymundの結果より境界積分法を用いたHeliotらの結果の方が、精度がよいことがわかる。

図4・24は、Raju and Newmanの結果³³⁾と本解析結果を比較したものである。

4・3・6 応力拡大係数の近似式

まず、円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数を有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で近似し、次に、曲率の影響を補正する。

有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂に、図4・25に示されるような遠方荷重が作用するときの応力拡大係数の近似式は、石田ら²⁴⁾によって次のように与えられている。

$$\frac{K_{I \text{ PLATE}}}{\sqrt{\pi b}} = \sigma_p^I F_p^I + \sigma_p^B F_p^B \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} F_p^I = & 1.1362 - 0.3927\mu - 0.3454\mu^2 + 0.2623\mu^3 \\ & + \lambda(-0.2179 + 0.2354\mu + 0.3773\mu^2 - 0.4189\mu^3) \\ & + \lambda^2(5.0486 - 16.7939\mu + 19.9861\mu^2 - 8.0212\mu^3) \\ & + \lambda^3(-2.6383 + 8.6007\mu - 9.6332\mu^2 + 3.5118\mu^3) \end{aligned}$$

(4.10)

$$\begin{aligned}
 F_p^B = & 1.1359 - 0.3929\mu - 0.3440\mu^2 + 0.2613\mu^3 \\
 & + \lambda(-1.5184 + 0.4178\mu + 0.7846\mu^2 - 0.6329\mu^3) \\
 & + \lambda^2(4.3721 - 13.9152\mu + 16.2550\mu^2 - 6.4894\mu^3) \\
 & + \lambda^3(-3.9502 + 12.5334\mu - 14.6137\mu^2 + 5.8110\mu^3)
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

$$\lambda = b/t, \quad \mu = b/a \tag{4.12}$$

式(4.7), (4.8)で示した σ_i , σ_c と式(3)の σ_p^T , σ_p^B との関係は、き裂面に内圧 p が作用する場合次のようになる。

$$\sigma_p^T = \left(1 - \frac{t}{2b}\right)\sigma_i + \frac{t}{2b}\sigma_c + p \tag{4.13}$$

$$\sigma_p^B = \frac{t}{2b}\sigma_i - \frac{t}{2b}\sigma_c \tag{4.14}$$

円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数を式(4.9)で近似するときの誤差は、ほぼ7%以下である($t/R_i \leq 0.5$, $0.25 \leq \mu \leq 1.0$, $\lambda \leq 0.6$)。

また、円筒の曲率の影響は次式で補正される。

$$\left. \begin{aligned}
 K_i &= \beta \cdot K_{i \text{ PLATE}} \\
 \beta &= 1 + 0.23\lambda(\lambda - 0.79)(t/R_i)^{0.2}/\mu^{0.5}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.15}$$

($t/R_i \leq 0.5$, $0.25 \leq \mu \leq 1.0$, $\lambda \leq 0.6$ において誤差1.6%未満)

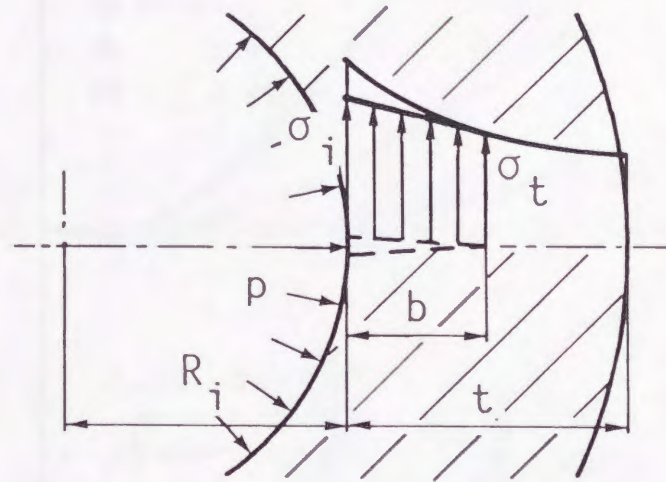


図 4・11 内圧 p が作用する円筒の応力分布の直線近似

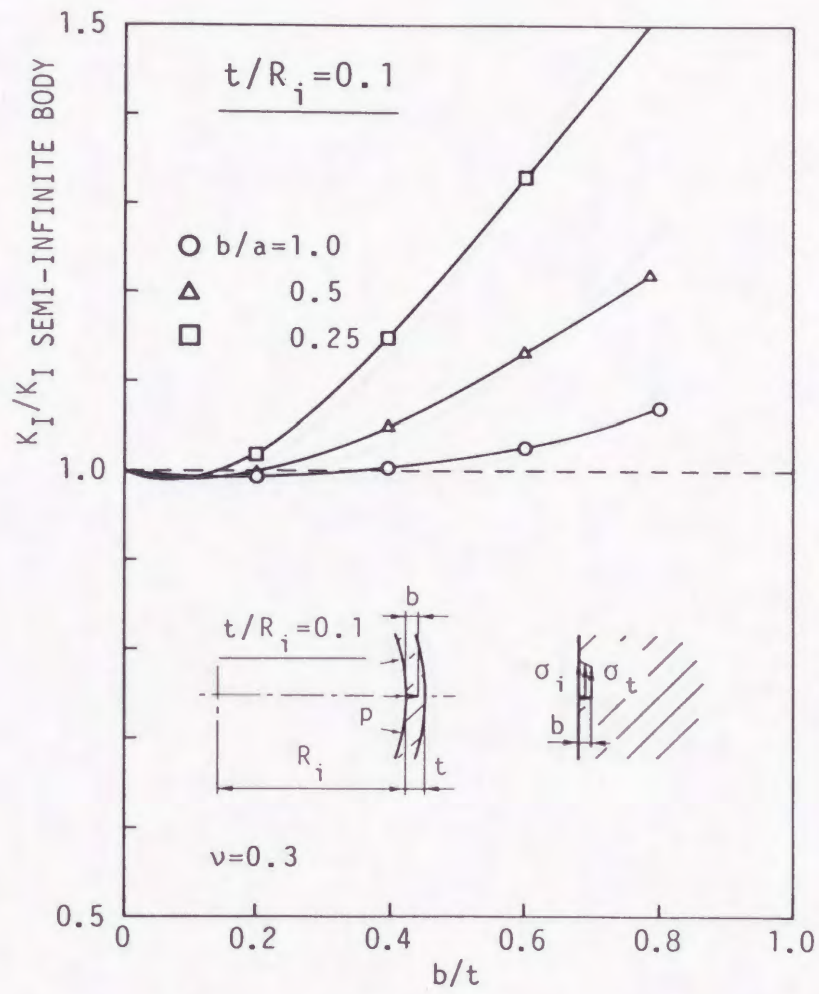


図 4・12 半無限体との比較 ($t/R_i=0.1$)

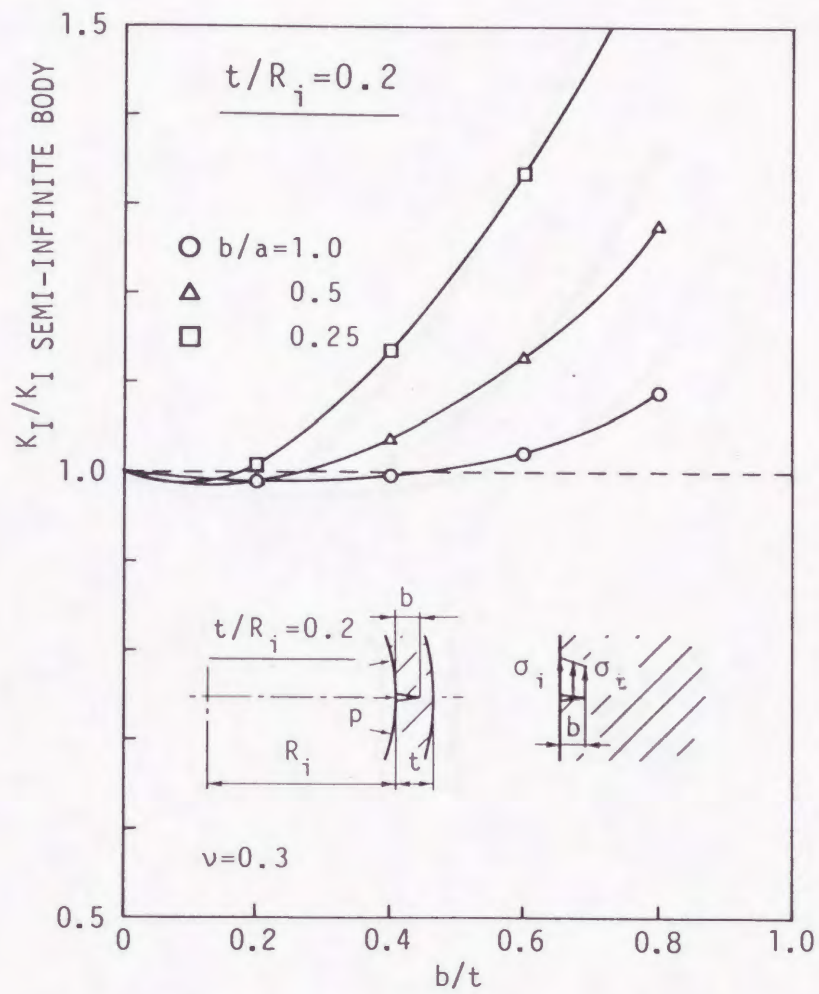


図 4・13 半無限体との比較 ($t/R_i = 0.2$)

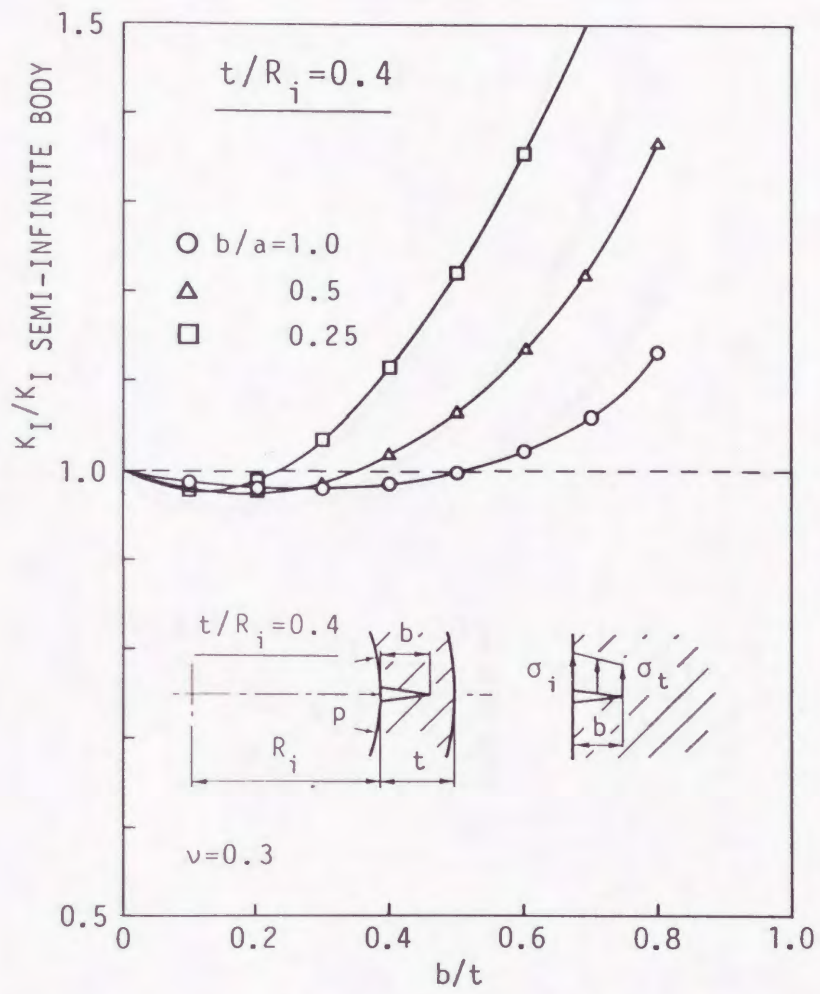


図 4・14 半無限体との比較 ($t/R_i = 0.4$)

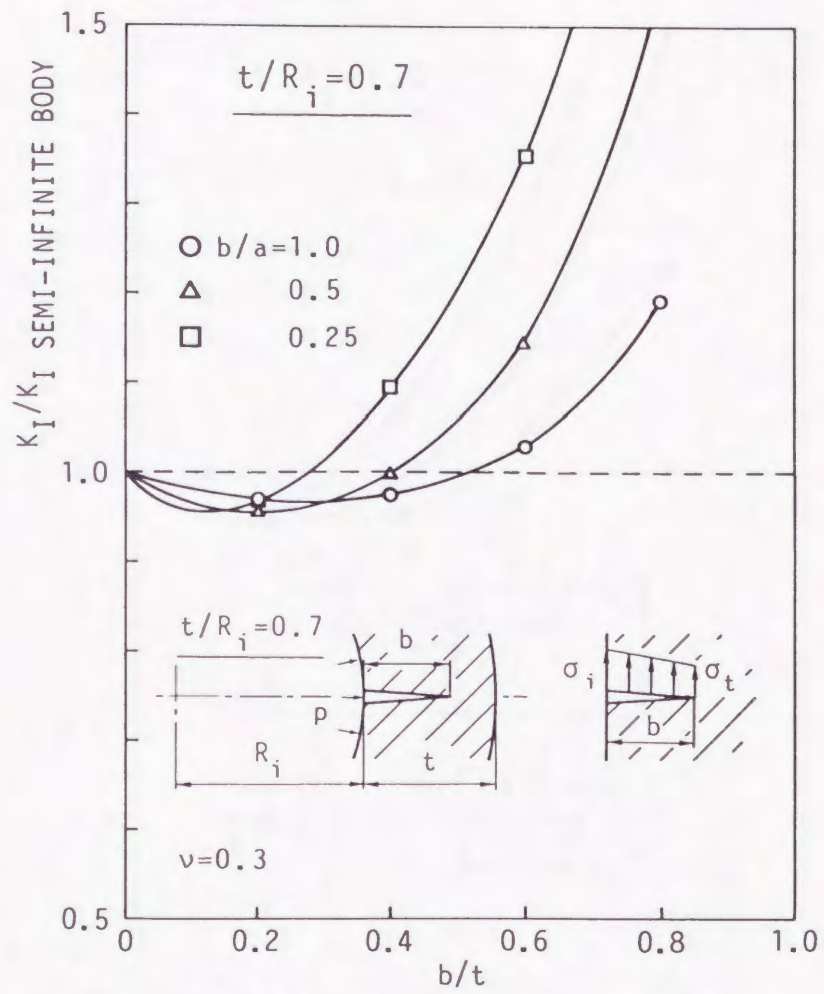


図 4・15 半無限体との比較 ($t/R_i=0.7$)

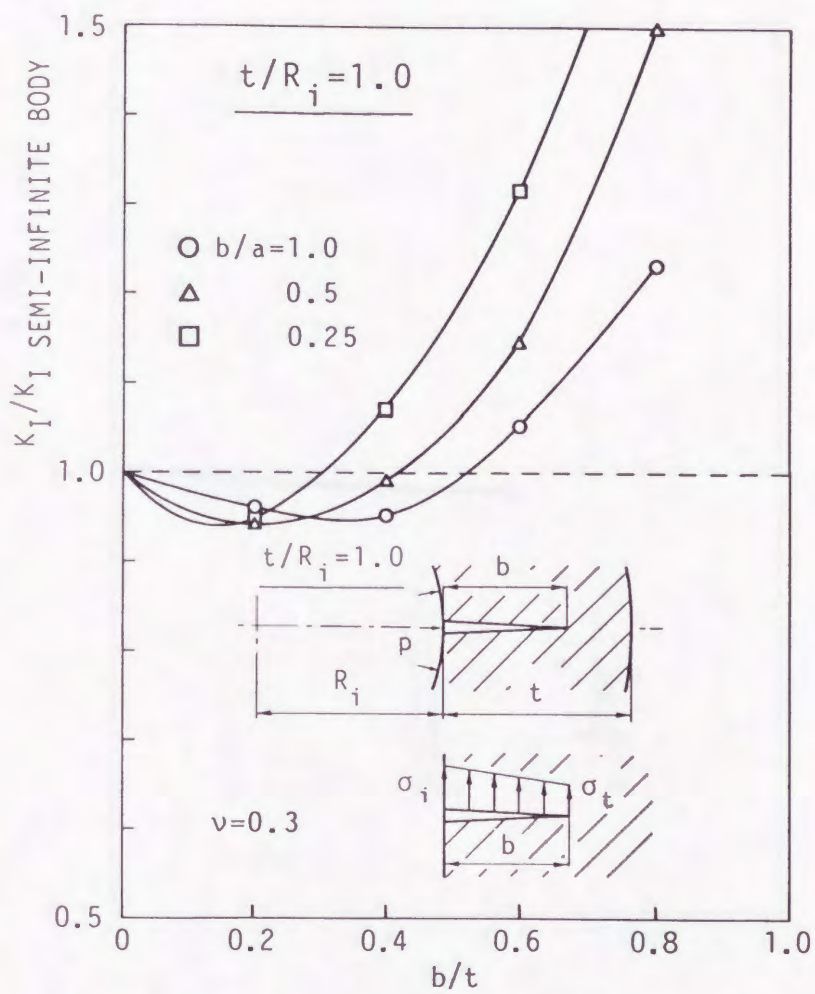


図 4・16 半無限体との比較 ($t/R_i = 1.0$)

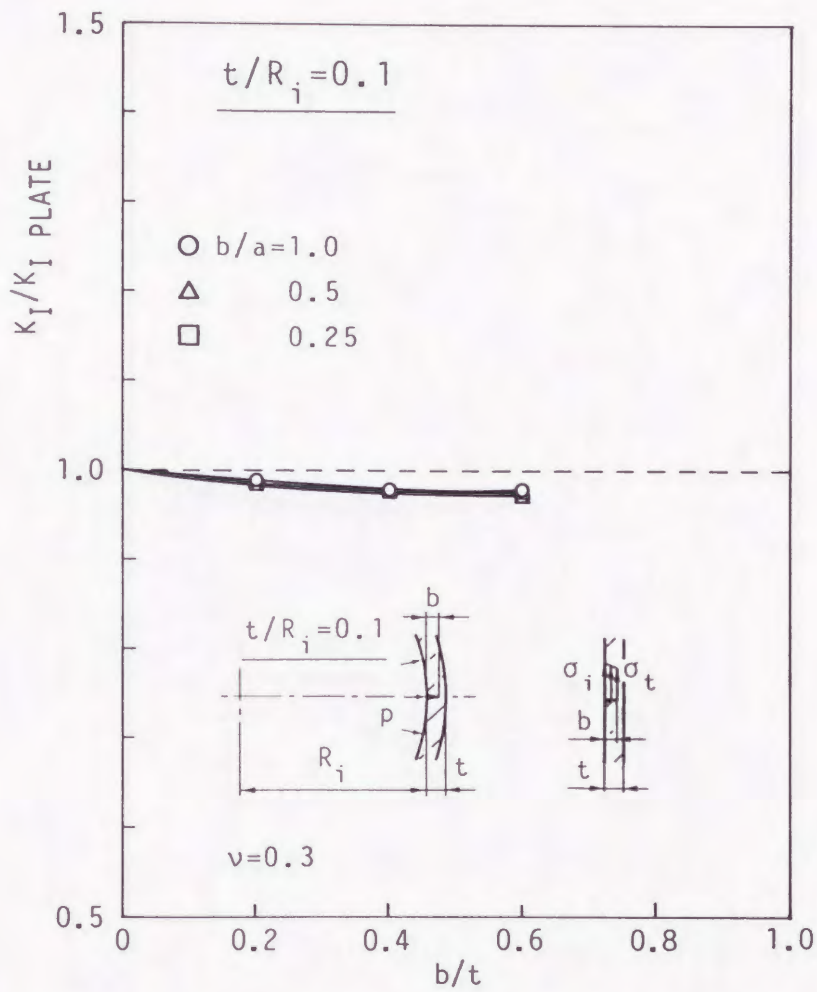


図 4・17 有限厚さの板との比較 ($t/R_i = 0.1$)

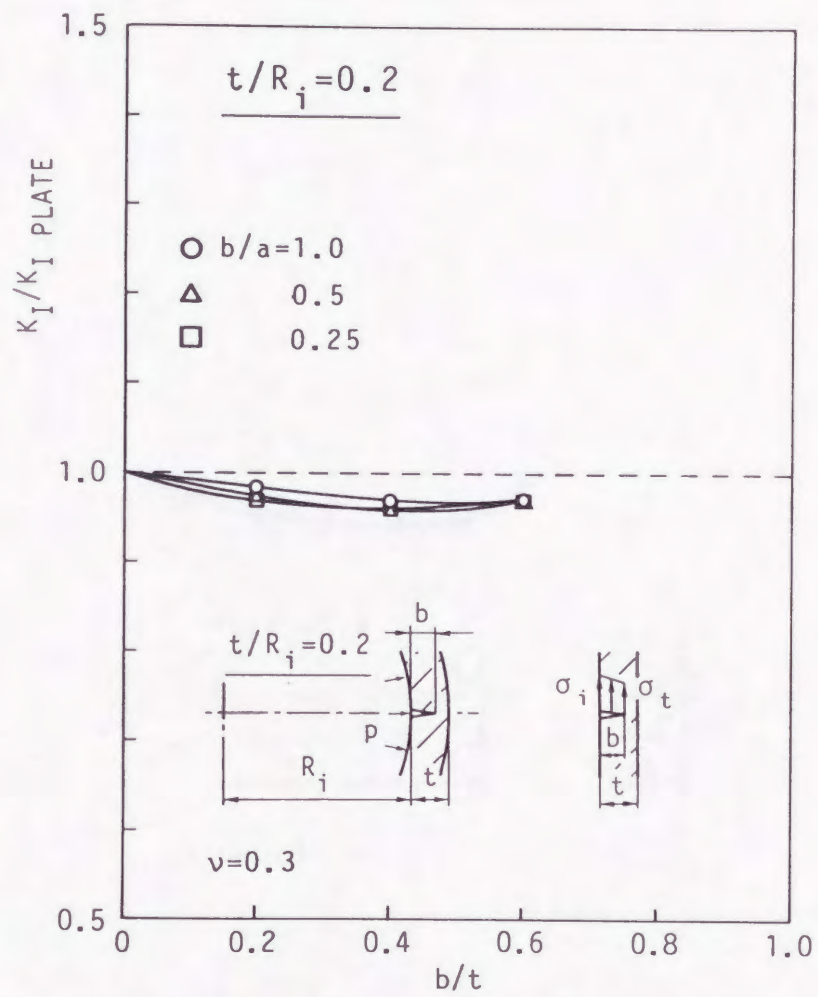


図 4・18 有限厚さの板との比較 ($t/R_i = 0.2$)

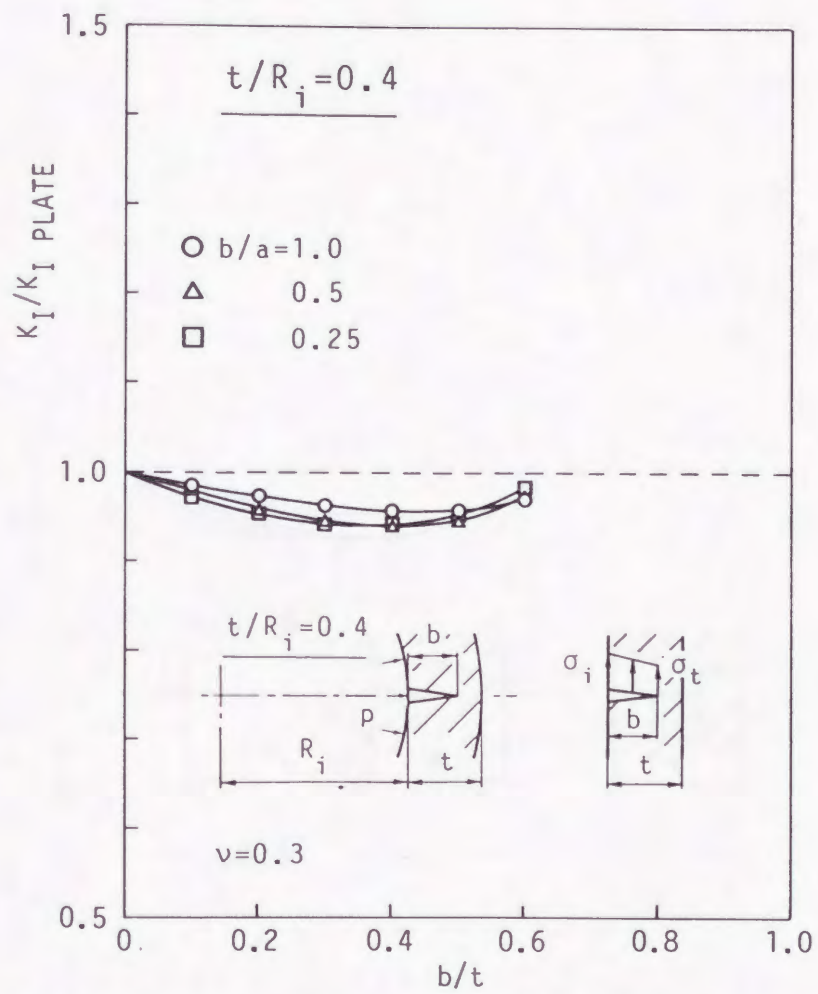


図 4・19 有限厚さの板との比較 ($t/R_i = 0.4$)

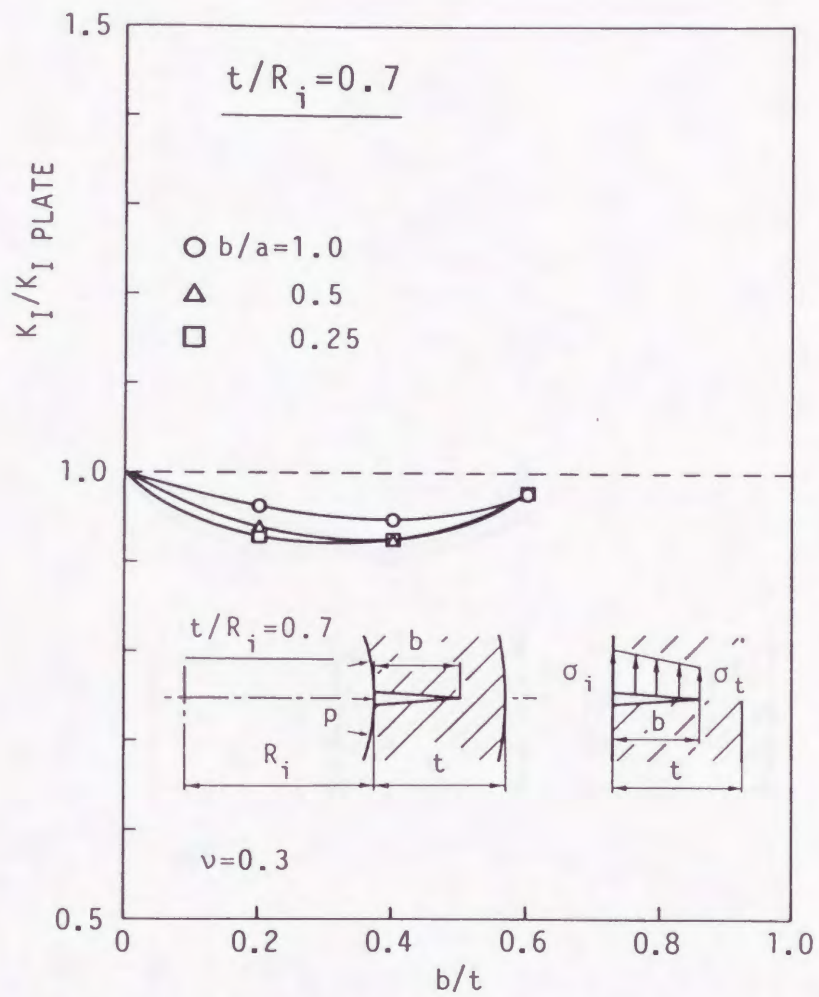


図 4・20 有限厚さの板との比較 ($t/R_i = 0.7$)

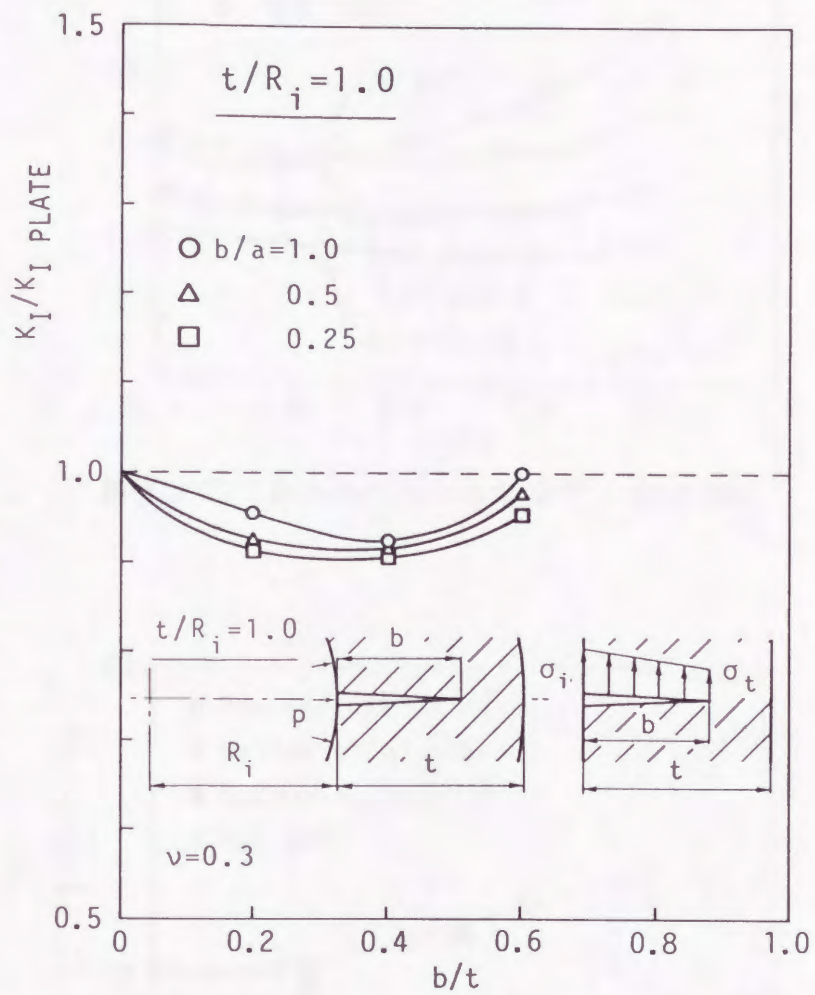


図 4・21 有限厚さの板との比較 ($t/R_i = 1.0$)

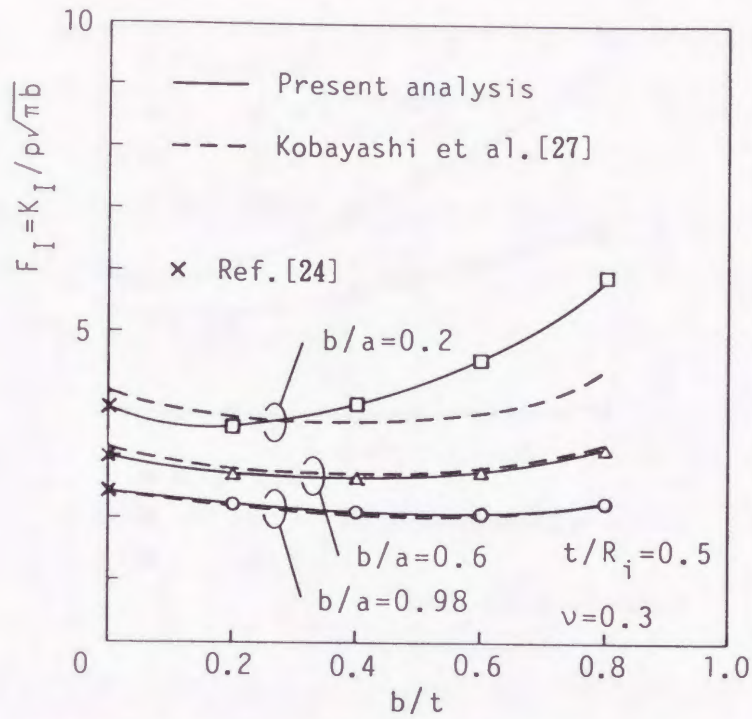


図 4・22 Kobayashiらの結果⁽²⁷⁾との比較

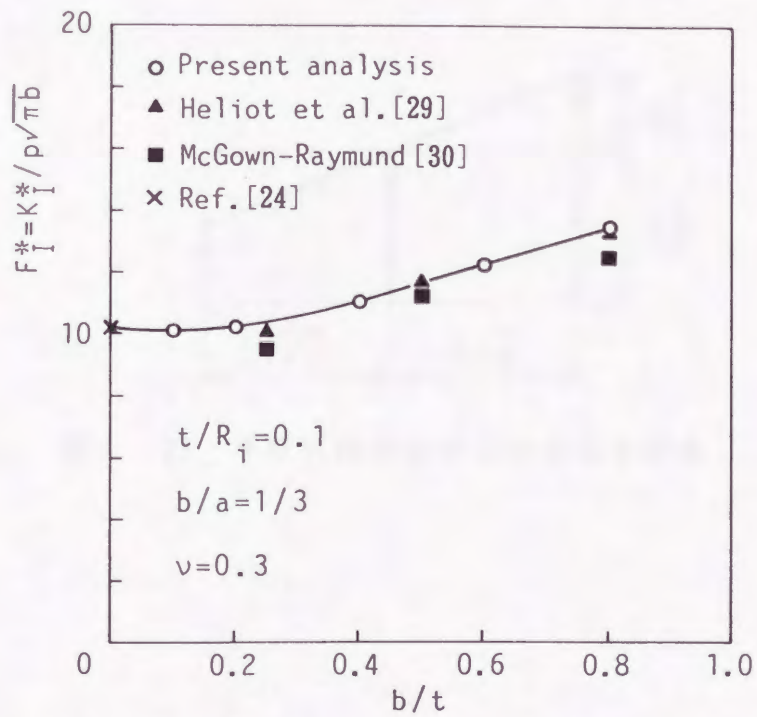


図 4・23 Heliotらの結果⁽²⁹⁾およびMcGown and Raymundの結果⁽³⁰⁾との比較

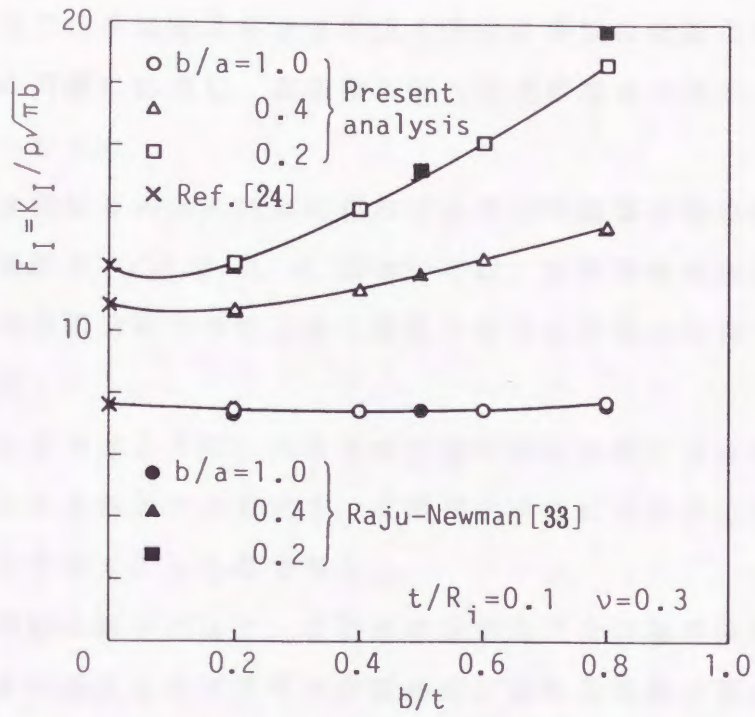


図 4・24 Raju and Newmanの結果⁽³³⁾との比較

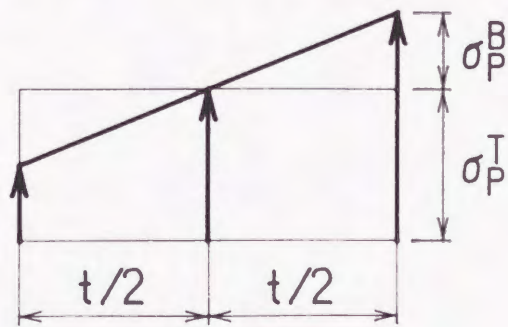


図 4・25 平板に作用させるべき遠方荷重

4・4 結び

仮想境界上に連続的に分布させるべき集中力を境界の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の問題に応用し、高精度の応力拡大係数を求めた。その結果以下のことがわかった。

(1) 内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の値は、円筒厚さ $t/R_i \leq 0.4$ においては、有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることを示した(誤差約5パーセント以内)。

(2) 実用に便利なように、内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を、有限厚さの板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比の形で与えた。

(3) この問題の解析により、有限個の集中力で合力境界条件を満足させる方法は、き裂面と自由境界面とが直線的に交わる問題の解析に対しても有効であることが示された。

第 5 章 引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する表面き裂の応力拡大係数

5・1 まえがき

円筒形容器や配管は、内圧の変化、内容物の重量変化あるいは温度変化などによって円筒の軸方向に引張り（圧縮）あるいは曲げの力が作用することがある。本論文ではこのような荷重による円筒の破壊問題を取扱うのに必要な円筒の外面に存在する円周方向表面き裂（図 5・1）の応力拡大係数を計算する。この応力拡大係数を求める試みはこれまであまり行われていない。

そこで第 5 章では、有限個の集中力による体積法を用いて、この問題に対する高精度の応力拡大係数を求めた。また、それらが平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で、どの程度近似できるかについても検討した。本問題において内半径 $R_i=0$ とおけば、丸棒に存在する半だ円表面き裂の問題となる。この問題の応力拡大係数は、すでに他の研究者によっていくつかの計算結果が求められており⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾、これらと比較することにより本解析結果の精度の確認も行った。

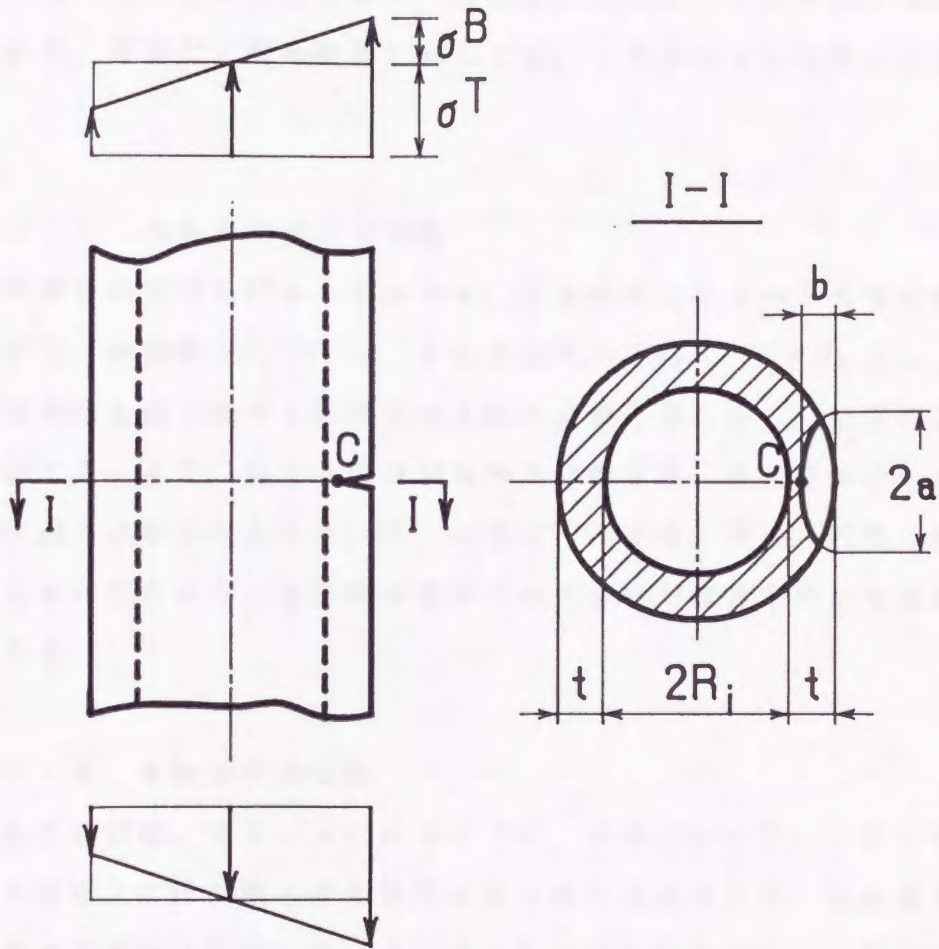


図 5・1 表面き裂を有する円筒の引張りおよび曲げ

5・2 解析理論

解析方法は体積力法である。これまでの体積力法においては、仮想境界上に集中力を連続的に分布させ境界条件を満足させた。本論文では、内外円筒面に関しては、連続的に分布させるべき集中力（体積力）を仮想境界の外側の点に作用する有限個の集中力で近似する方法を採用した。この方法によれば、境界条件として、分割した仮想境界の各区間の合力境界条件を容易に用いることが可能となり、高精度の解を短い計算時間で求めることができる。複雑な三次元問題に対しては、この解析方法は特に有効である。

5・2・1 内外円筒面の未知数

内外円筒面の分割を図5・2に示す。本来曲面であるべき境界を折れ面で近似する。分割数 N_θ 、 N_z は、それぞれ $N_\theta=2N_k$ 、 $N_z=N_k$ とし、円周方向の分割はき裂と接する区間ではき裂の分割と等しくし、残りの区間は等比分割する。また、軸方向の分割も等比分割する。各区間の中心から外部方向に適当に離れた点に r 、 θ 、 z 方向（つまり、半径、円周、軸方向）の集中力を作用させた。各区間の集中力の大きさが境界条件から定まる未知数である。

5・2・2 き裂面の未知数

き裂面の分割は、図5・3に示すように、半径方向に N_k 分割を行う。そしてき裂面上には引張りの標準型体積力対を分布させた。また図5・3中の点線で示される区間にも、き裂の区間と対称になるように同じ重みの体積力対を分布させた。これはき裂面が円筒面と交わる点付近の境界条件を良好にするためである。

ここでは応力拡大係数を精度よく求めるため、各区間に分布させるべき体積力対の密度 $\phi(\xi, \eta)$ を(重み) \times (基本密度関数)という形に仮定する。

$$\phi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (5.1)$$

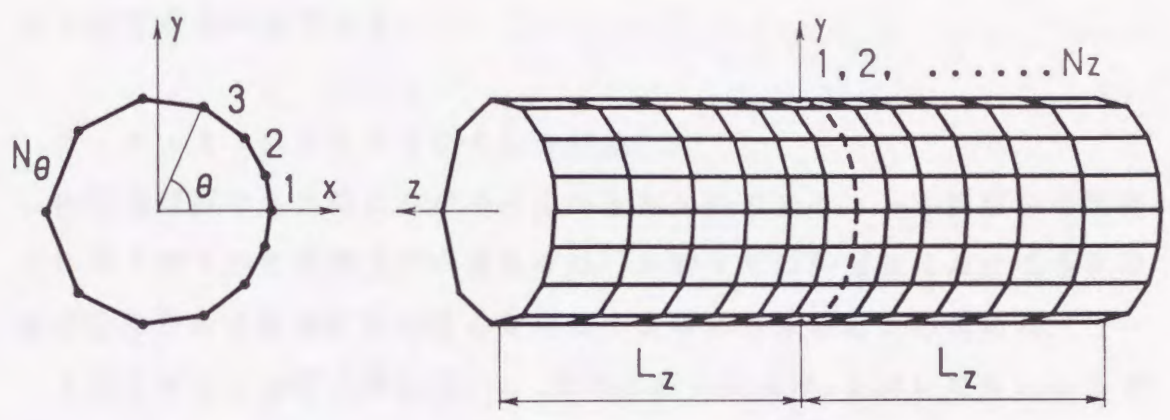


図 5・2 円筒面の分割

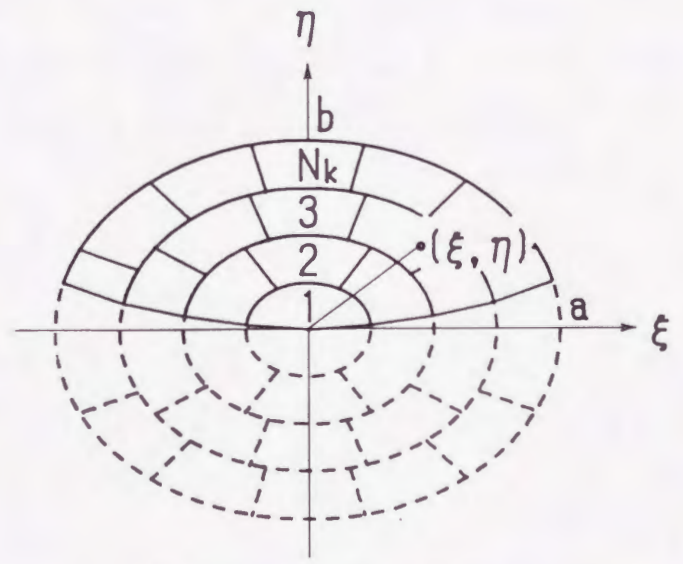


図 5・3 き裂面の分割

ここで $\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}$ の項は無限体に一個の円状き裂がある問題を体積力法で表現するときの、き裂面に分布させるべき体積力対のパターンであり、本解析の基本密度関数である。 $W(\xi, \eta)$ はその密度関数に掛けるべき重みで、本解析では、各区間ごとに一定とした。その値が境界条件から定まる未知数である。

5・2・3 境界条件と応力拡大係数

内外円筒面の各区間に作用させるべき集中力の大きさとき裂面の各区間に作用させるべき体積力対の重み W は、本論文では円筒面における各区間の合力条件とき裂面における各区間の midpoint の応力条件とから求めた。

き裂前縁の応力拡大係数 K_I は、その区間の重み W_c を用いて次式から求められる。

$$K_I = \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)^2} \sqrt{\pi b} W_c \quad (5.2)$$

5・3 計算結果および考察

円筒の外面に存在する半だ円表面き裂（図5・1）の最深点Cにおける応力拡大係数を求めた。以下の計算では、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

5・3・1 計算結果の精度の検討

本解析において、計算結果に含まれる誤差の主な原因は、次の二つである。一つは、本来無限長であるべき内外円筒面の荷重範囲 L_s を有限長さとしていることであり、もう一つは、連続的に満足されるべき境界条件を有限個の応力境界条件もしくは合力境界条件に置き換えていることである。図5・4は、形状パラメータ $t/R_i=0.1$ 、 $b/t=0.2$ 、 $b/a=1.0$ の場合の無次元化した応力拡大係数 F_I^T 、 F_I^B におよぼす b/L_s の関係を示している。この図より、円筒面の荷重範囲 L_s 有限としていることによる誤差は、 $L_s/b \geq 2$ と置くことによって 10^{-3} 以下となることがわかる。また、図5・5は、図5・4と同一パラメータにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^T 、 F_I^B と分割数 N_k との関係を示している。この図より、 N_k （総分割数272）において、すでにより外そう性を示していることがわかる。以上の結果から、応力拡大係数を計算するに当たっては、 $L_s/b \geq 10$ とし、 $N_k=8, 10$ のときの値によって厳密解を推定した。

5・3・2 丸棒の引張りにおける F_I^T

円筒の問題において内半径 $R_i=0$ とおけば、丸棒の問題となる。

表5・1は、丸棒の引張りにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^T の本解析結果と西谷らの結果³⁵⁾および白鳥らの結果³⁶⁾との比較である。それぞれとの差は、ほぼ2%以下である。

5・3・3 丸棒の曲げにおける F_I^B

表5・2は、丸棒の曲げにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^B の本解析結果と白鳥らの結果³⁶⁾との比較である。この場合もかなりよい一致を示している。

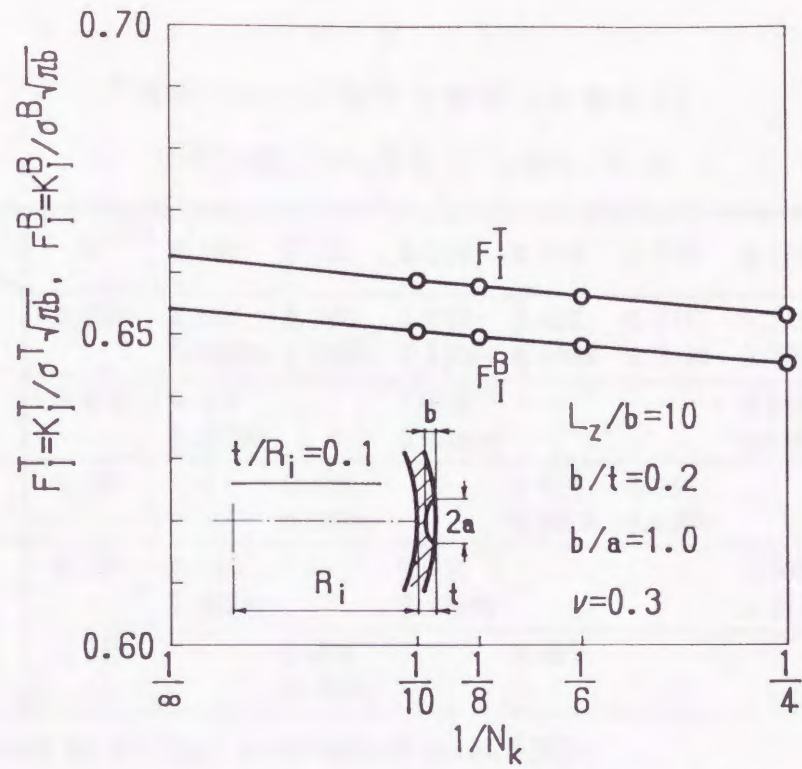


図 5・4 円筒面の荷重範囲 L_z と解の収束性の例

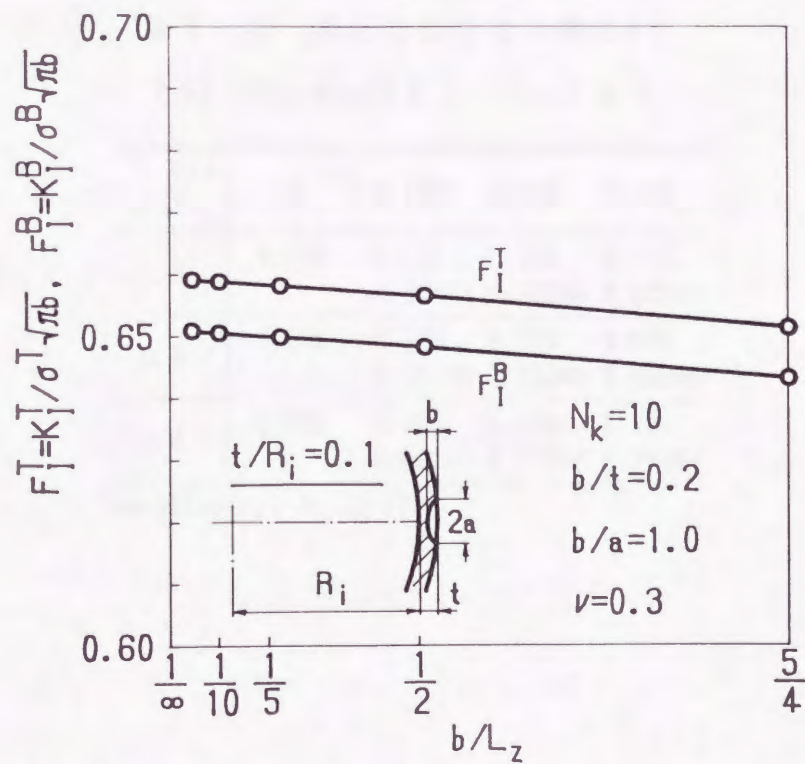


図 5・5 F_I^T , F_I^B と分割数 N_k の関係

表 5・1 引張りを受ける丸棒の F_I^T

$$(F_I^T = K_I^T / \sigma^T \sqrt{\pi b}, \nu = 0.3)$$

b/a \ b/t	0 ^[24]							
	0.100	0.125	0.200	0.250	0.375	0.400	0.500	
1.0	0.659	0.666 0.646**	0.668 0.665*	0.675 0.675**	0.682 0.683*	0.711 0.714*	0.719 0.725**	0.755 0.758*
0.6	0.832	0.839 0.823**	- 0.854**	0.852	-	-	0.925 0.940**	-
0.5	0.885	-	0.891 0.890*	-	0.914 0.920*	0.966 0.976*	-	1.046 1.064*
0.4	0.939	0.941 0.923**	-	0.950 0.950**	-	-	1.028 1.051**	-
0.25	1.023	-	1.002 0.996*	-	0.995	-	-	-

*:Nisitani et al.[35], **:Shiratori et al.[36]

表 5・2 曲げを受ける丸棒の F_I^B

$$(F_I^B = K_I^B / \sigma^B \sqrt{\pi b}, \nu = 0.3)$$

b/a \ b/t	0 ^[24]			
	0.100	0.200	0.400	
1.0	0.659	0.618 0.604**	0.579 0.582**	0.520 0.528**
0.6	0.832	0.783 0.771**	0.739 0.744**	0.683 0.699**
0.4	0.939	0.880 0.867**	0.826 0.830**	0.762 0.786**

** : Shiratori et al. [36]

5・3・4 円筒の引張りにおける F_I^I

表 5・3 および図 5・6～5・8 に、き裂の最深点における無次元化した応力拡大係数 F_I^I とき裂深さ b/t の関係を示す。

図 5・9～5・11 は、引張りを受ける円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と引張りを受ける平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数⁽²⁴⁾との比を示したものである。

これらの図より、実用上重要な円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数は、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ 、 $t/b \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることがわかる（誤差約 3% 以内）。

5・3・5 円筒の曲げにおける F_I^I

表 5・4 および図 5・12～5・14 に、き裂の最深点における無次元化した応力拡大係数 F_I^I とき裂深さ b/t の関係を示す。

図 5・15～5・17 は、曲げの場合について、円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比を示したものである。

これらの図より、引張りの場合と同様に、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ 、 $t/b \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることがわかる（誤差約 3% 以内）。

5・3・6 応力拡大係数の近似式

以上で求めた数値計算結果を基に、引張りおよび曲げを受ける円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を求めた。

引張り；

$$K_I^I = \alpha K_{I, PLATE} \quad (5.3)$$

$$\alpha = 1 + 0.3(\mu - 0.4)\lambda^{2.5}(t/R_i)/\mu^{2.6} \quad (5.4)$$

曲げ；

$$K_I^B = \beta K_{I \text{ PLATE}} \quad (5.5)$$

$$\beta = 1 + 0.35(\mu - 0.43)\lambda^{2.5}(t/R_i)/\mu^{2.4} \quad (5.6)$$

$$\lambda = b/t, \mu = b/a \quad (5.7)$$

ここで $K_{I \text{ PLATE}}$ は平板に存在する半だ円表面き裂に、図 5・18 に示されるような遠方荷重が作用するときの応力拡大係数で、石田⁽¹⁰⁾らによって次のように与えられている〔式 (4・9) 参照〕。

$$\frac{K_{I \text{ PLATE}}}{\sqrt{\pi b}} = \sigma_I^T F_I^T + \sigma_I^B F_I^B \quad (5.8)$$

式 (5・8) における σ_I^T 、 σ_I^B の値は引張りおよび曲げの場合それぞれ次のようになる。

引張り；

$$\sigma_I^T = \sigma^T \quad (5.9)$$

$$\sigma_I^B = 0 \quad (5.10)$$

曲げ；

$$\sigma_I^T = \sigma^B \frac{2 + t/R_i}{2(1 + t/R_i)} \quad (5.11)$$

$$\sigma_I^B = \sigma^B \frac{t/R_i}{2(1 + t/R_i)} \quad (5.12)$$

式 (5・3)、(5・5) における α 、 β は円筒の曲率の影響を補正する係数でそれぞれ 1 の場合が平板に対応している。

式 (5・3)、(5・5) の誤差は、 $0.25 \leq b/a \leq 1.0$ のとき $t/R_i \leq 0.3$ であれば 2% 未満、 $t/R_i \leq 0.5$ であれば 5% 未満である。

表 5・3 引張りを受ける円筒の F_I^T

$$(F_I^T = K_I^T / \sigma^T \sqrt{\pi b} , \nu = 0.3)$$

t/R_i	b/t		0 ^[24]	0.2	0.4	0.6
	b/a					
0.1	1.0		0.659	0.666	0.683	0.702
	0.5		0.885	0.902	0.964	1.041
	0.25		1.023	1.080	1.203	1.356
0.2	1.0		0.659	0.666	0.683	0.703
	0.5		0.885	0.902	0.959	1.030
	0.25		1.023	1.064	1.163	1.275
0.3	1.0		0.659	0.667	0.684	0.705
	0.5		0.885	0.901	0.953	1.021
	0.25		1.023	1.058	1.135	1.202
0.4	1.0		0.659	0.667	0.684	0.706
	0.5		0.885	0.900	0.950	1.015
	0.25		1.023	1.047	1.119	1.198
0.5	1.0		0.659	0.667	0.685	0.707
	0.5		0.885	0.899	0.946	1.011
	0.25		1.023	1.041	1.102	1.151

表 5・4 曲げを受ける円筒の F_I^B

$$(F_I^B = K_I^B / \sigma^B \sqrt{\pi b} , \nu = 0.3)$$

t/R_i	b/t		0 ^[24]	0.2	0.4	0.6
	b/a					
0.1	1.0		0.659	0.657	0.666	0.675
	0.5		0.885	0.892	0.942	1.006
	0.25		1.023	1.066	1.177	1.313
0.2	1.0		0.659	0.651	0.651	0.654
	0.5		0.885	0.882	0.918	0.966
	0.25		1.023	1.042	1.116	1.199
0.3	1.0		0.659	0.645	0.640	0.637
	0.5		0.885	0.874	0.897	0.934
	0.25		1.023	1.027	1.070	1.100
0.4	1.0		0.659	0.640	0.629	0.622
	0.5		0.885	0.867	0.881	0.906
	0.25		1.023	1.009	1.039	1.071
0.5	1.0		0.659	0.635	0.621	0.609
	0.5		0.885	0.861	0.865	0.884
	0.25		1.023	0.997	1.010	1.007

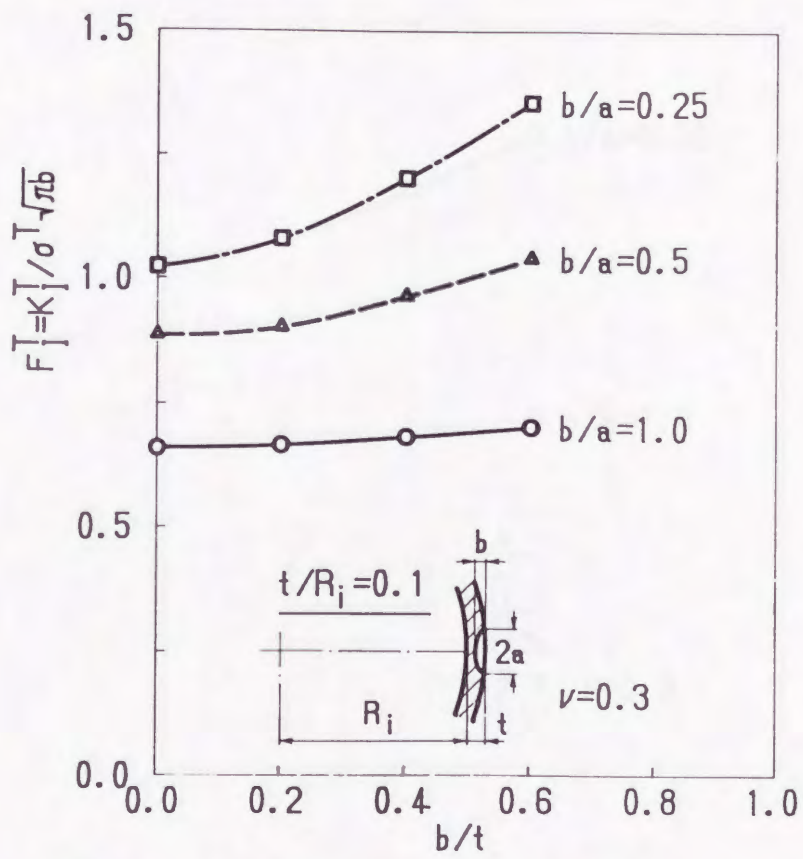


図 5・6 K_I と b/t の関係 ($t/R_i = 0.1$)

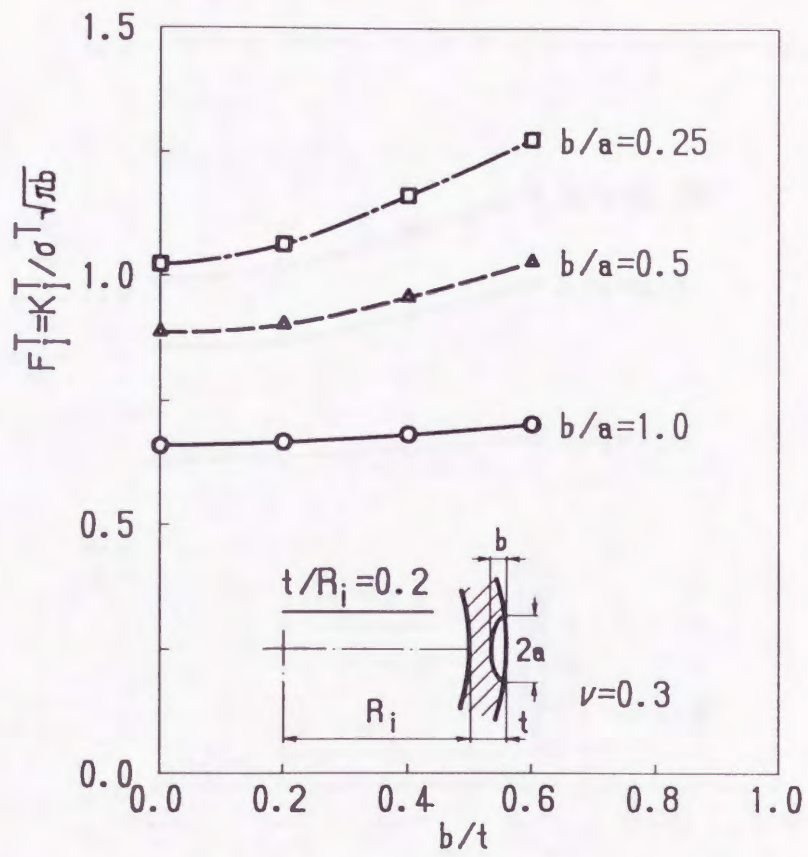


図 5・7 K_I と b/t の関係 ($t/R_i = 0.2$)

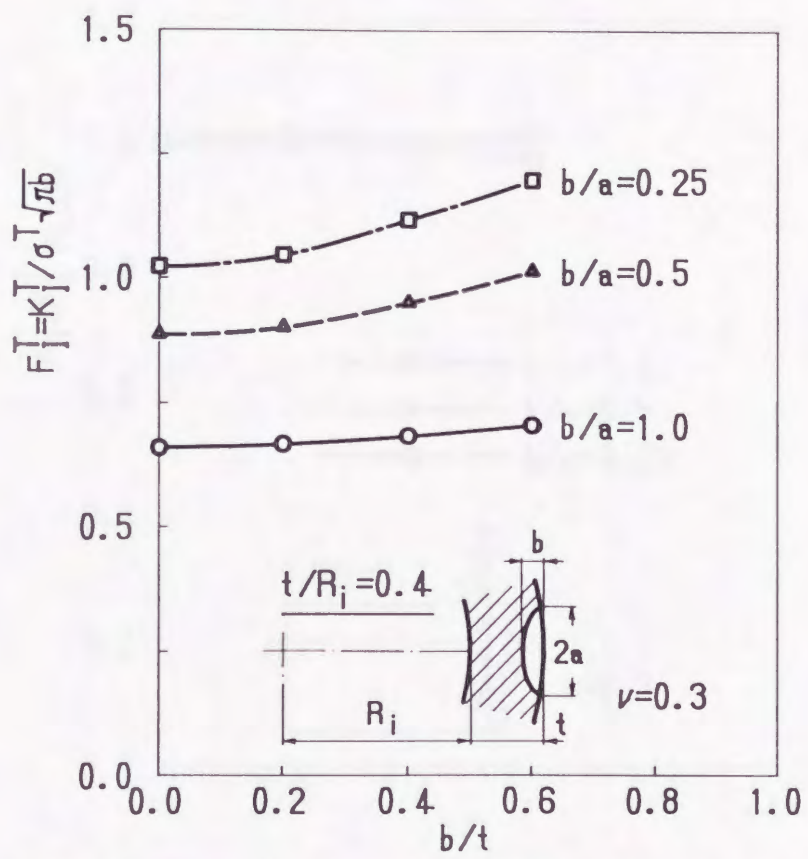


図 5・8 K_I と b/t の関係 ($t/R_i = 0.4$)

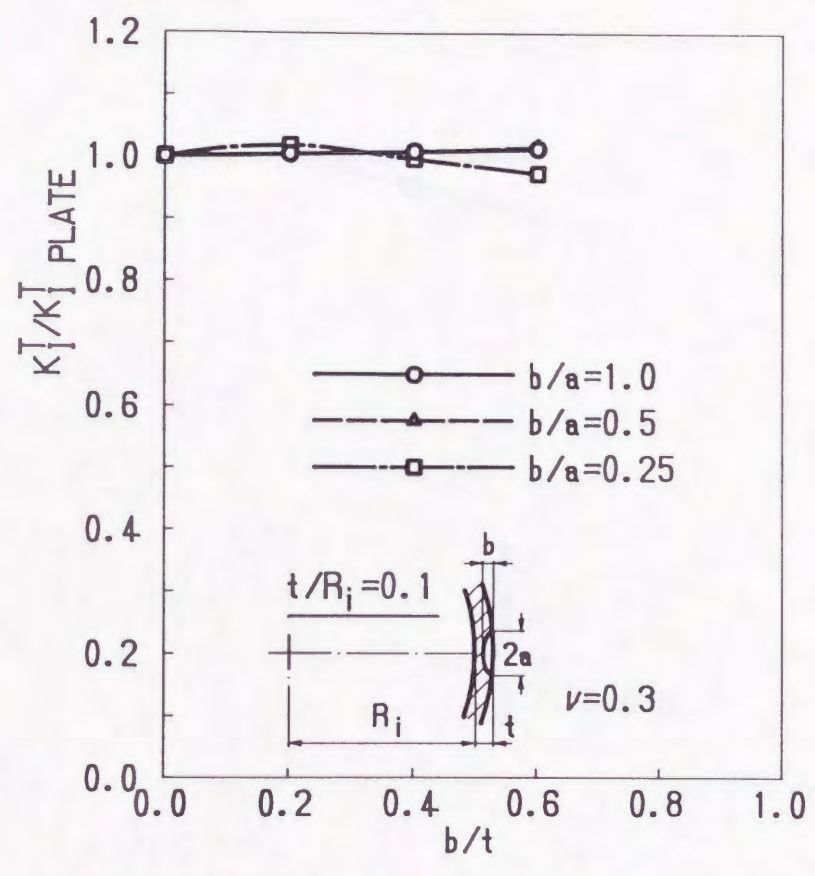


図 5・9 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.1$)

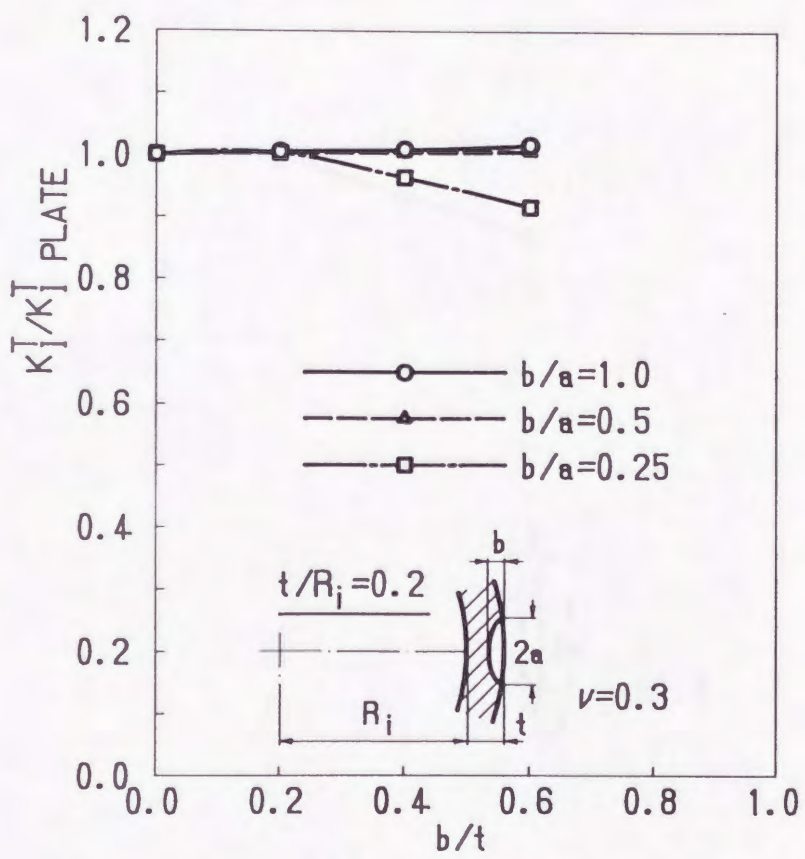


図 5・10 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.2$)

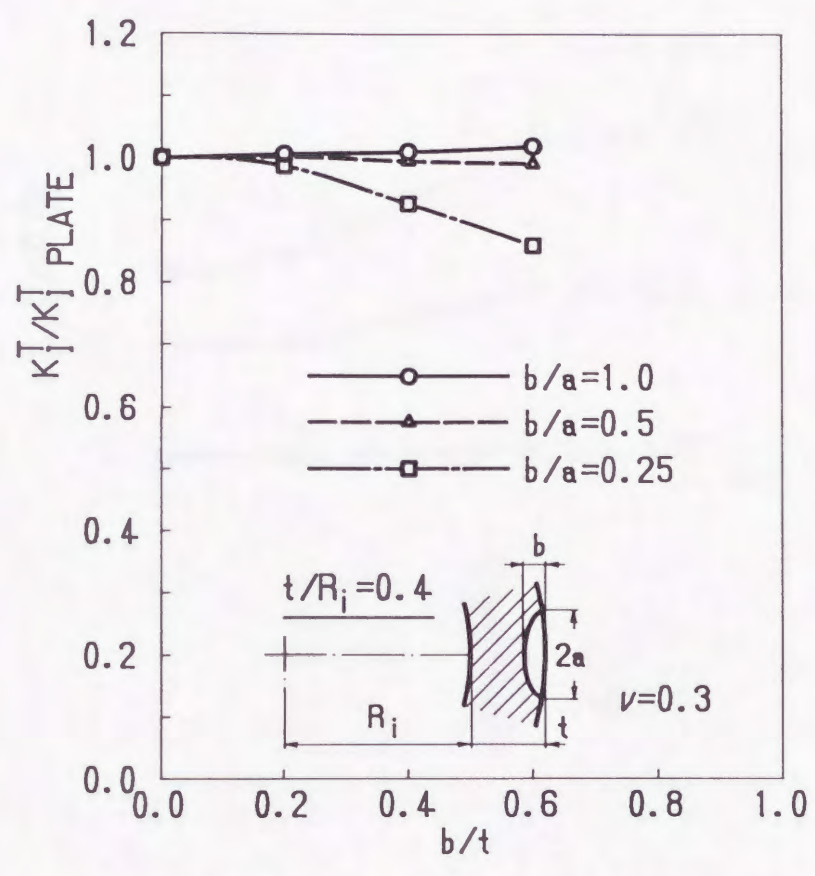


図 5・11 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.4$)

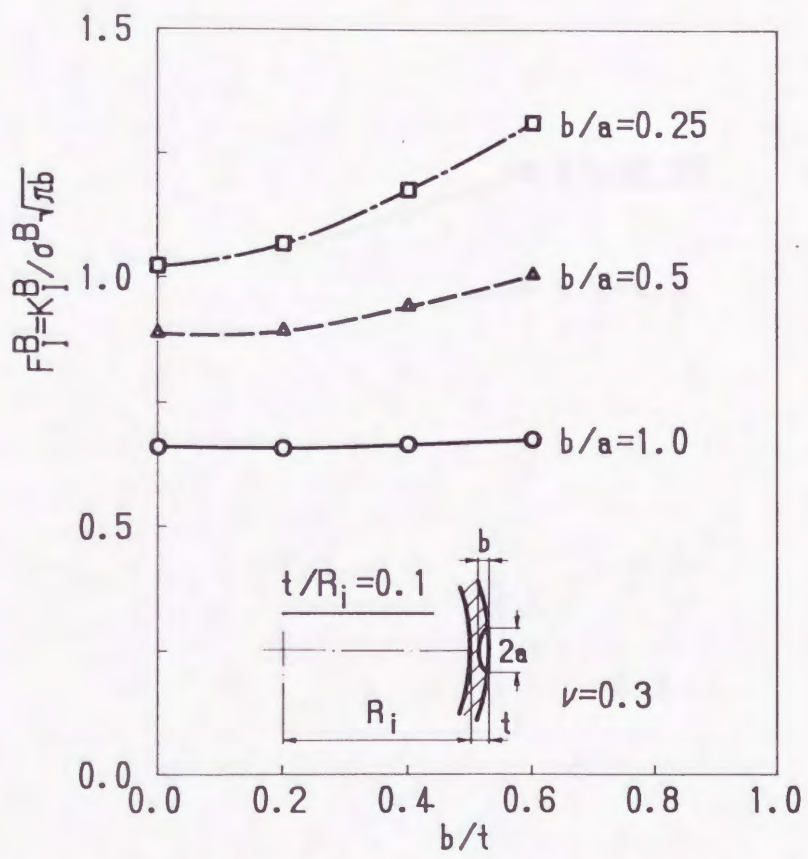


図 5・12 K_I^B と b/t の関係 ($t/R_i = 0.1$)

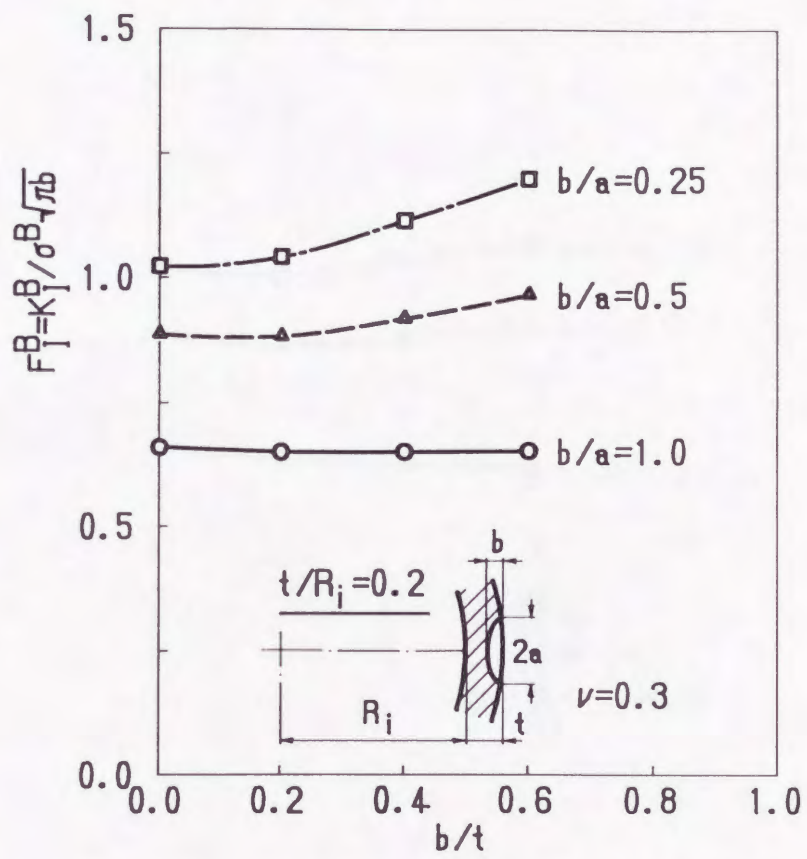


図 5・13 K_I^B と b/t の関係 ($t/R_i = 0.2$)

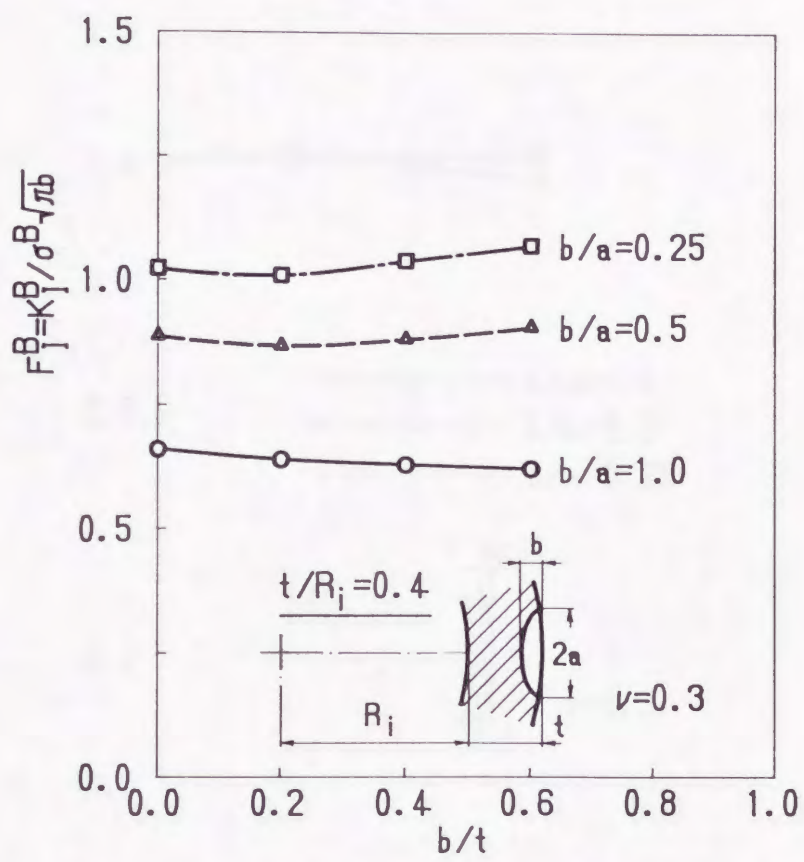


図 5・14 K_I^B と b/t の関係 ($t/R_i = 0.4$)

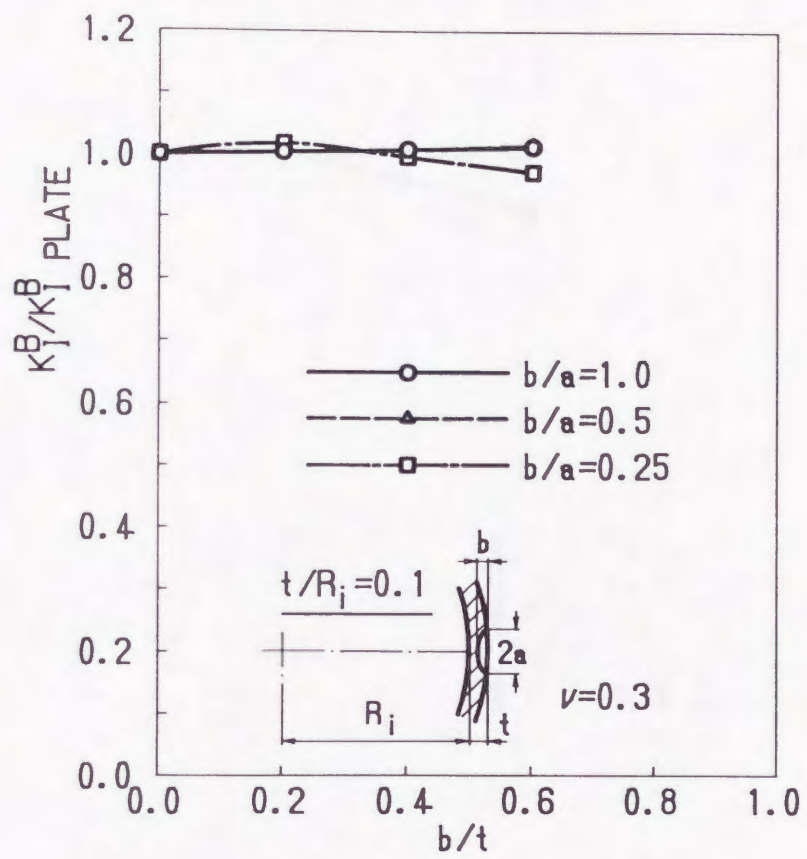


図 5・15 K_j^B の平板との比較 ($t/R_i=0.1$)

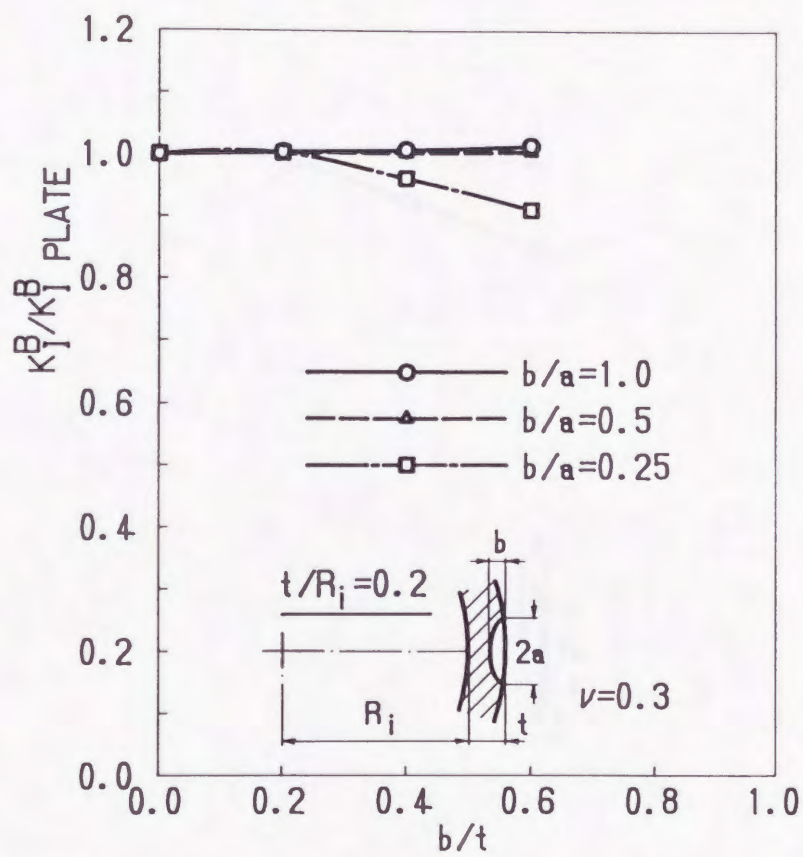


図 5・16 K_I^B の平板との比較 ($t/R_i=0.2$)

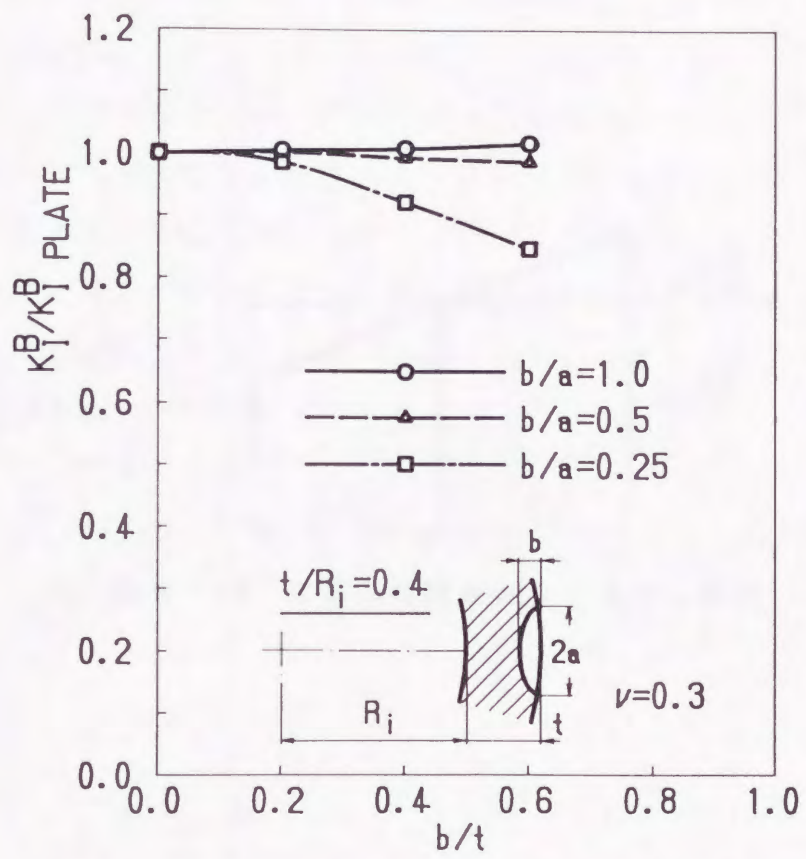


図 5・17 K_I^B の平板との比較 ($t/R_i=0.4$)

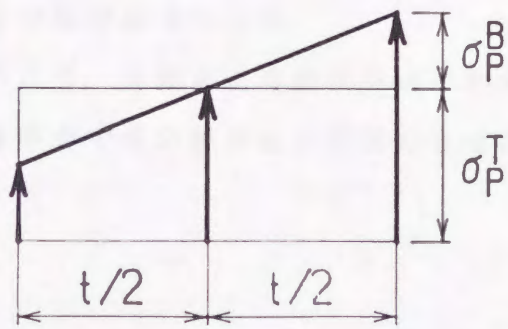


図 5・18 平板に作用させるべき遠方荷重

5・4 結び

仮想境界上に連続的に分布させるべき集中力を境界の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を半だ円表面き裂を有する円筒の引張りまたは曲げの問題に応用し、高精度の応力拡大係数を求めた。その結果以下のことがわかった。

(1) 引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の値は、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $b/t \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似される (誤差約 3% 以内)。

(2) 実用に便利なように、引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比の形で与えた。

(3) この問題の解析により、き裂面と自由境界面とが曲線的に交わる問題に対しても有限個の集中力で合力境界条件を満足させる方法が有効であることが示された。

第 6 章 引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するだ円き裂の応力拡大係数

6・1 まえがき

高強度鋼の疲労強度が介在物（欠陥）の影響を強く受けることはよく知られている。高強度鋼の疲労破壊過程は、介在物と母材の関係により変化し、一般に複雑であるが、ひとたび介在物を起点として微小き裂が進展すればだ円形き裂（フィッシュアイ）を形成することが多い。疲労き裂伝ば速度の予測においてその応力拡大係数は重要であるが、この問題に対してはこれまでに解析例はあまりなく、円形き裂が丸棒の中心部にある場合の結果³⁷⁾がある程度である。

そこで第 6 章では、有限個の集中力による体積力法を用いて、図 6・1 に示すような引張りまたは曲げを受ける丸棒内の任意の位置に存在するだ円形き裂の応力拡大係数を求めた。また、本結果が半無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数で、どの程度近似できるかについても検討した。さらに、実用に供するためだ円形き裂の中心位置が丸棒面と離れている場合と近い場合とに分けて近似式を示した。

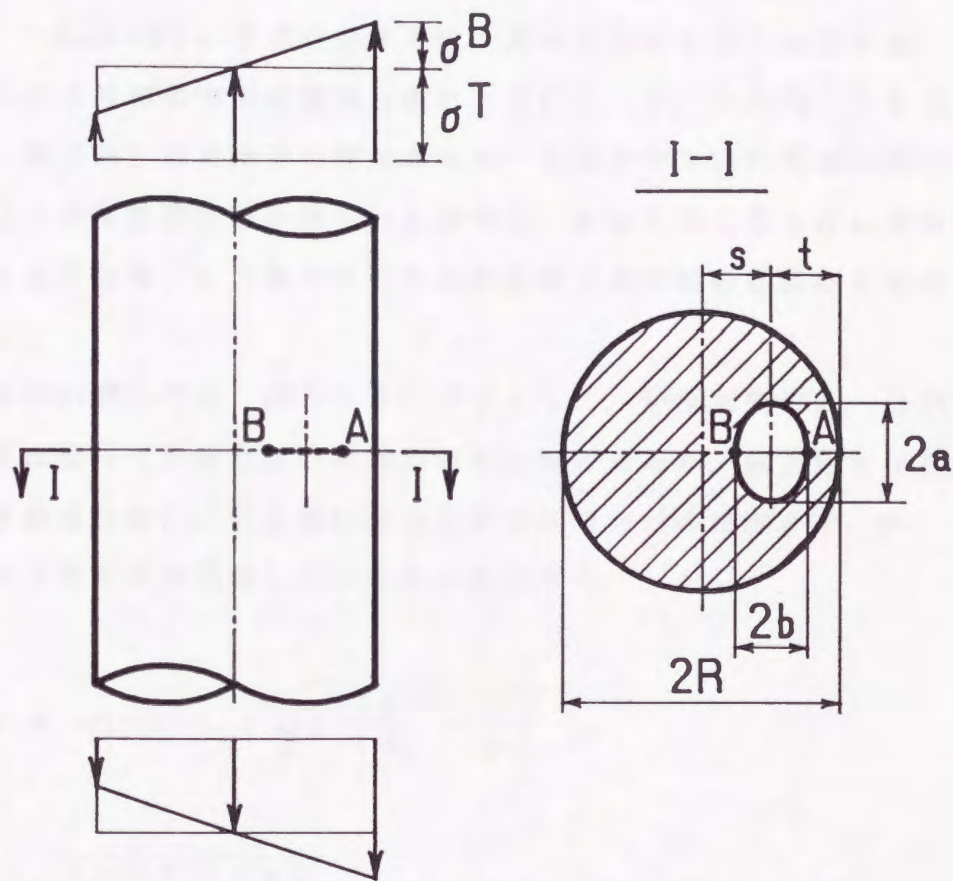


図 6・1 だ円形き裂を有する丸棒の引張りおよび曲げ

6・2 解析理論

解析手法は体積力法である。これまでの体積力法においては、仮想境界上に連続的に集中力を分布させ境界条件を満足させた。本解析では、丸棒面に関しては、連続的に分布させるべき集中力（体積力）を仮想境界の外側の点に作用する有限個の集中力で近似する方法を採用した。この方法では、各代表点の応力境界条件の代わりに各分割区間の合力境界条件を用いることが容易となり、少ない分割で高精度の結果が得られる。

図6・2に丸棒面の分割を示す。本来曲面であるべき境界を折れ面で近似し、 $-L \leq z \leq L$ の部分を θ 方向 z 方向それぞれ等比分割する。各区間の中心から外側の方向に適当に離れた点に r 、 θ 、 z 方向（つまり、半径、円周、軸方向）の集中力を作用させた。き裂面が丸棒の表面に近い場合も実用上十分な精度の解が得られるように、き裂先端に最も近い丸棒面の分割長さを θ 方向、 z 方向それぞれき裂先端と丸棒面の距離の8分の1とした。

き裂面に関しては、図6・3に示すように、半径方向に N_r 分割を行う。き裂面に沿って引張り型の体積力対を分布させるが、応力拡大係数を精度よく求めるために、各区間に分布させる体積力対の密度 $\phi(\xi, \eta)$ を（重み） \times （基本密度関数）という形に仮定する。

$$\phi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (6.1)$$

ここで $\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}$ の項は本解析の基本密度関数である。

$W(\xi, \eta)$ はその密度関数に掛けるべき重みで、本解析では各区間ごとに一定とした。

丸棒面の各区間の外側に作用させるべき集中力の大きさおよびき裂面に分布させるべき集中力対の重みは、丸棒面の各区間の合力境界条件およびき裂面の各区間の midpoint の応力境界条件が同時に満足されるように決定した。

き裂面のA、B点（図6・1）における応力拡大係数 K_{IA} 、 K_{IB} は、そ

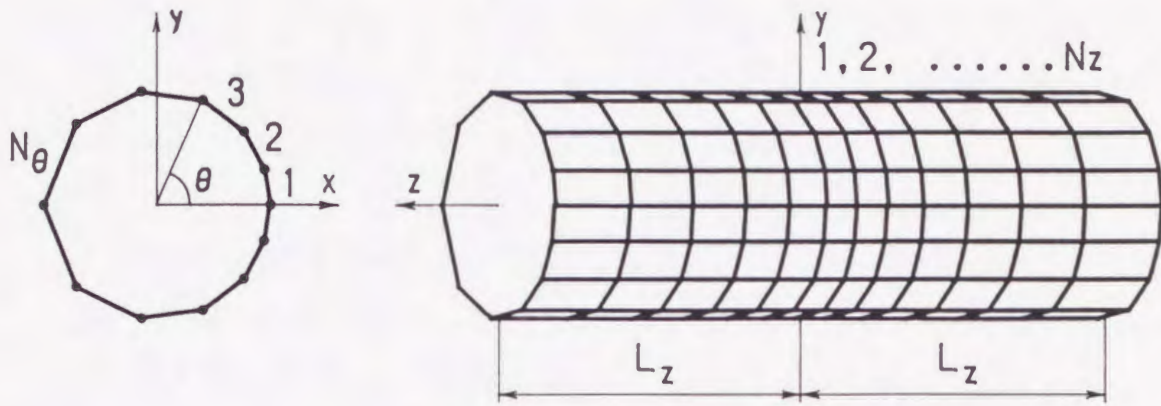


図 6・2 丸棒面の分割

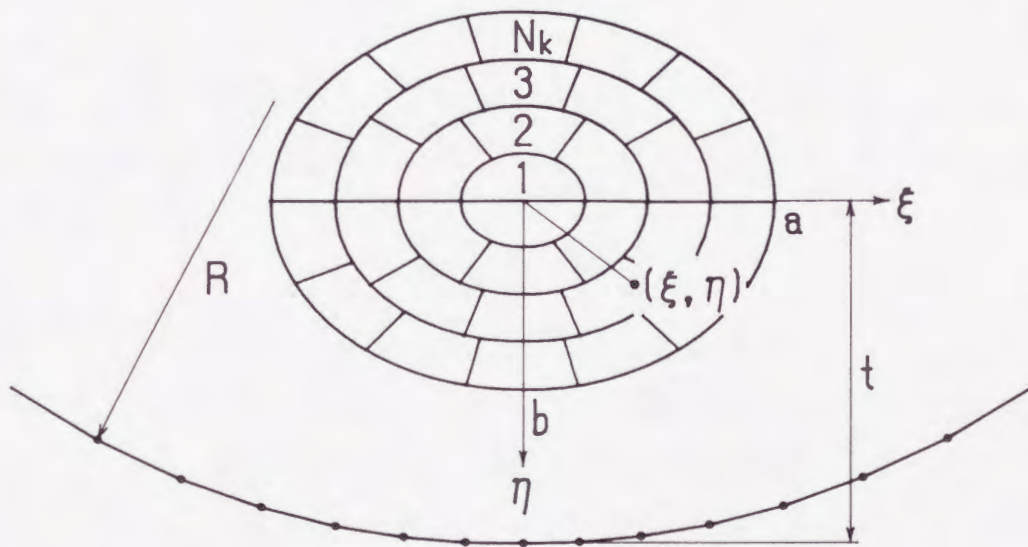


図 6・3 き裂面の分割

の区間の重み W_A, W_B を用いて求められる。

$$\begin{matrix} K_{IA} \\ K_{IB} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} K_{IA} \\ K_{IB} \end{matrix}} \right\} = \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)^2} \sqrt{\pi b} \begin{cases} W_A \\ W_B \end{cases} \quad (6.2)$$

6・3 計算結果および考察

ここでは引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するだ円形き裂（フィッシュアイ）の応力拡大係数を求めた。

以下において無次元化した応力拡大係数を $F_{T_A}^*$, $F_{T_B}^*$, $F_{\theta_A}^*$, $F_{\theta_B}^*$ で表すが、上添え字 T は引張りの場合で B は曲げの場合である。また、下添え字 A, B はそれぞれ A, B 点における応力拡大係数であることを表している。以下の計算では、 $L_s/R=3$, ポアソン比 $\nu=0.3$, $N_s=2N_k$, $N_s=2N_k$ とし、 $N_k=8$ のときの値によって解を求めた。

6・3・1 計算結果の精度の検討

図 6・4 は、形状パラメータ $a=b=r$, $r/R=0.25$, $s/R=0.5$ の場合の無次元化した応力拡大係数 $F_{T_A}^*$, $F_{T_B}^*$ と丸棒面の荷重範囲 L_s との関係を示したものである。この図より $R/L_s \leq 0.5$ とすれば計算結果は L_s によってほとんど変化せず、差は 10^{-3} 以下である。従って、 $R/L_s=3$ として計算した結果は無限長丸棒における計算結果とみなすことができる。

表 6・1 は、円形き裂が丸棒の中心にある場合の $F_{T_A}^*$ の本解析結果と Benthem and Koiter の結果⁽³⁷⁾ との比較である。 $r/R \leq 0.25$ においてよい一致を示している。

6・3・2 丸棒の引張りにおける $F_{T_A}^*$, $F_{T_B}^*$

表 2 および図 6・5, 6・6 に、丸棒の引張りにおける円形き裂 ($a=b=r$) の $F_{T_A}^*$, $F_{T_B}^*$ と s/R との関係を示す。丸棒面境界の影響は、 $r/R \leq 0.1$, $s/R \leq 0.8$ においてほとんどないことがわかる。だ円形き裂の位置が $s/R < 0.8$ である場合、だ円形き裂の形状は一般に円形に極めて近い。そこで本論文では、 $s/R < 0.8$ のき裂に対しては円形の場合のみ計算を行った。また、 $s/R < 0.8$ のだ円形き裂がだ円形であったとしても、その形状が極端に扁平でなければ円形き裂の場合と同様に、 $b/R < 0.1$ であれば丸棒面境界の影響はほとんどないと考えられ、無限体中の解とかなり一致すると考えられる。

表 6・1 Benthem and Koiterの結果³⁷⁾との比較

$$(F_A^T = K_{IA}^T / \frac{2}{\pi} \sigma^T \sqrt{\pi r}, a=b=r, \nu=0.3)$$

r/R	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Present analysis	1.000	1.001	1.001	1.003	1.004
Benthem-Koiter ^[37]	1.000	1.001	1.002	1.005	1.009

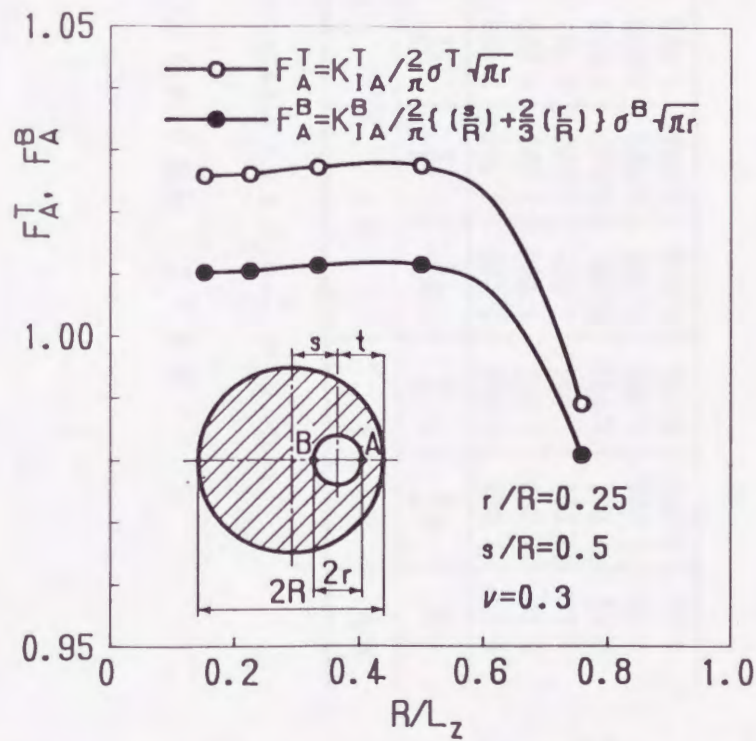


図 6・4 丸棒面の荷重範囲 L_z と解の収束性の例

表 6・2 円形き裂の F_A^T , F_B^T と s/R の関係

$$(F_A^T = K_I^T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^T \sqrt{\pi r}, F_B^T = K_{II}^T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^T \sqrt{\pi r}, \nu = 0.3)$$

s/R		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		
r/R	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	1.001
0.10	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.003	1.002	1.021	1.009
0.15	1.001	1.001	1.001	1.001	1.004	1.003	1.004	1.011	1.006	1.006	1.105	1.025
0.20	1.003	1.003	1.005	1.010	1.010	1.006	1.010	1.029	1.013	1.013	-	-
0.25	1.004	1.004	1.010	1.020	1.020	1.011	1.020	1.066	1.024	1.024	-	-

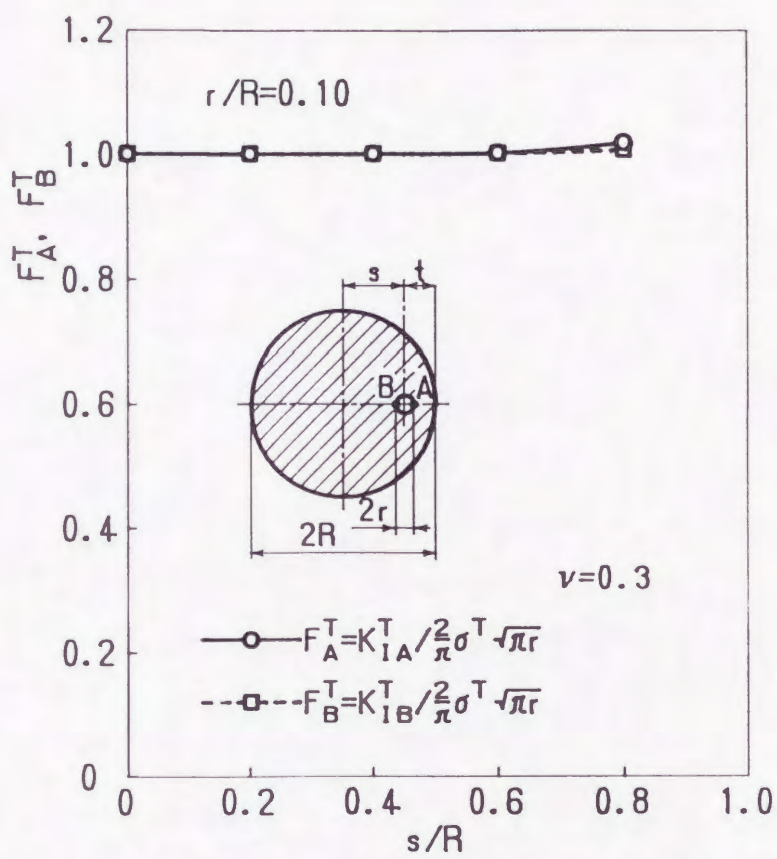


図 6・5 F_A^T , F_B^T と s/R の関係 ($r/R=0.1$)

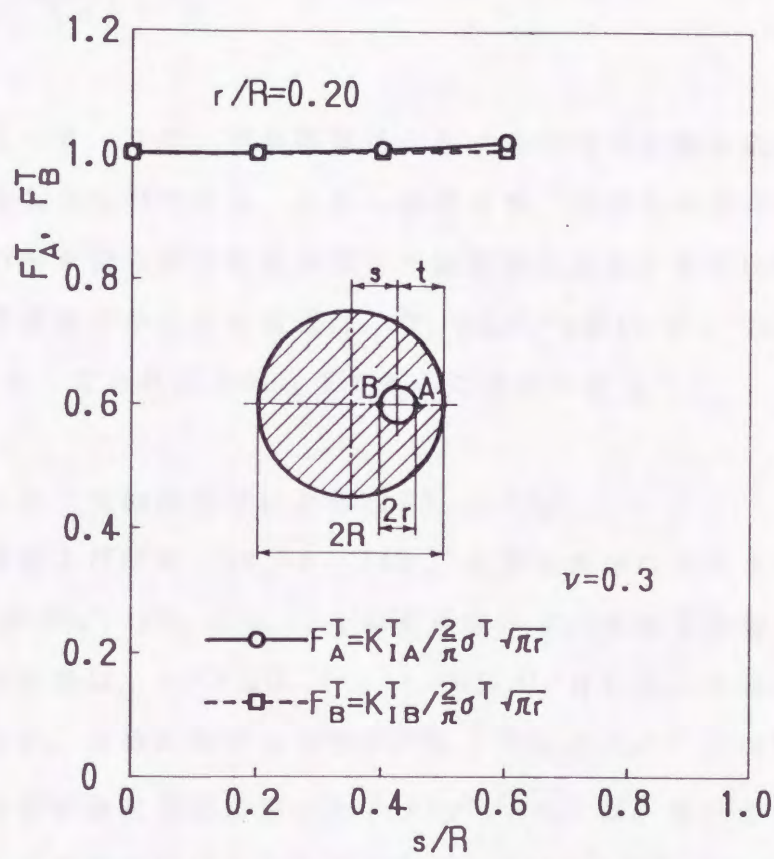


図 6・6 F_{IA}^T , F_{IB}^T と s/R の関係 ($r/R=0.2$)

表 6・3 に、丸棒の引張りにおける F_{1A}^I , F_{1B}^I と b/t との関係を示す。応力拡大係数の無次元化に用いた $\sigma^T/E(k)\sqrt{\pi b}$ は、引張りを受ける無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数⁽³⁹⁾で、 $E(k)$ は第 2 種完全だ円積分である。

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \quad (6.3)$$

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (6.4)$$

図 6・7 ~ 6・9 は、半無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数⁽³⁹⁾との比を示したものである。これらの図より、引張りの場合は、丸棒に存在するだ円形き裂の応力拡大係数を半無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数で近似するときの誤差は、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $t/R \leq 0.2$, $b/t \leq 0.8$ であれば 6% 以下であることがわかる。

6・3・3 丸棒の曲げにおける F_{1A}^B , F_{1B}^B

表 6・4 および図 6・10, 6・11 に、丸棒の曲げにおける円形き裂 ($a=b=r$) の F_{1A}^B , F_{1B}^B と s/R との関係を示す。引張りの場合と同様に丸棒面境界の影響は、 $r/R \leq 0.1$, $s/R \leq 0.8$ においてほとんどない。

表 6・5 に、丸棒の曲げにおける F_{1A}^B , F_{1B}^B と b/t との関係を示す。応力拡大係数の無次元化に用いた $f(k)\sigma^B\sqrt{\pi b}$ は、曲げを受ける無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数で、 $f(k)$ は次のように表される⁽⁴⁰⁾。

$$f(k) = \frac{k^2}{(k^2+1)E(k) - (1-k^2)K(k)} \quad (6.5)$$

ここで、 $K(k)$ は第 1 種完全だ円積分である。

表 6・3 F_A^T , F_B^T と b/t の関係

$$(F_A^T = K_{IA}^T / \frac{1}{E(k)} \sigma^T \sqrt{\pi b}, F_B^T = K_{IB}^T / \frac{1}{E(k)} \sigma^T \sqrt{\pi b}, \nu = 0.3)$$

b/t		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
b/a	t/R	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T	F_A^T	F_B^T
1.0	0.0[39]	1.000	1.000	1.000	1.000	1.007	1.003	1.033	1.010	1.118	1.020
	0.1	1.000	1.000	1.001	1.001	1.008	1.003	1.036	1.011	1.128	1.023
	0.2	1.000	1.000	1.001	1.001	1.009	1.003	1.041	1.014	1.145	1.030
0.75	0.0[39]	1.000	1.000	1.000	1.000	1.010	1.005	1.045	1.015	1.156	1.031
	0.1	1.000	1.000	1.001	1.001	1.012	1.005	1.050	1.017	1.172	1.037
	0.2	1.000	1.000	1.002	1.001	1.014	1.005	1.058	1.022	1.197	1.048
0.5	0.0[39]	1.000	1.000	1.002	1.001	1.019	1.009	1.066	1.024	1.211	1.050
	0.1	1.000	1.000	1.002	1.002	1.019	1.010	1.075	1.029	1.238	1.063
	0.2	1.000	1.000	1.002	1.002	1.022	1.012	1.089	1.037	1.286	1.085

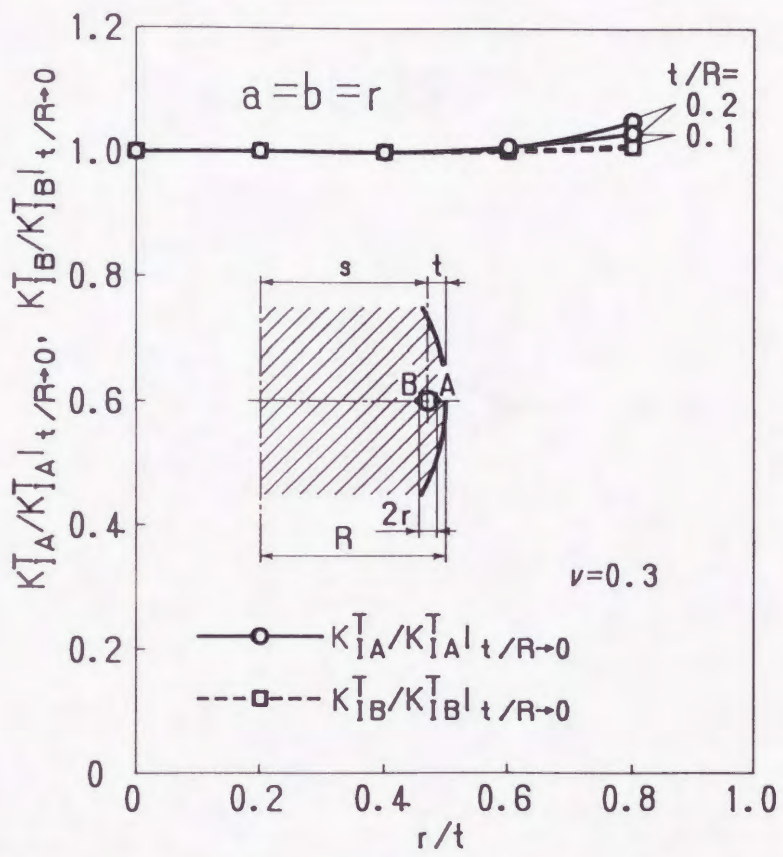


図 6・7 K_{IA}^T, K_{IB}^T の半無限体との比較 ($a=b=r$)

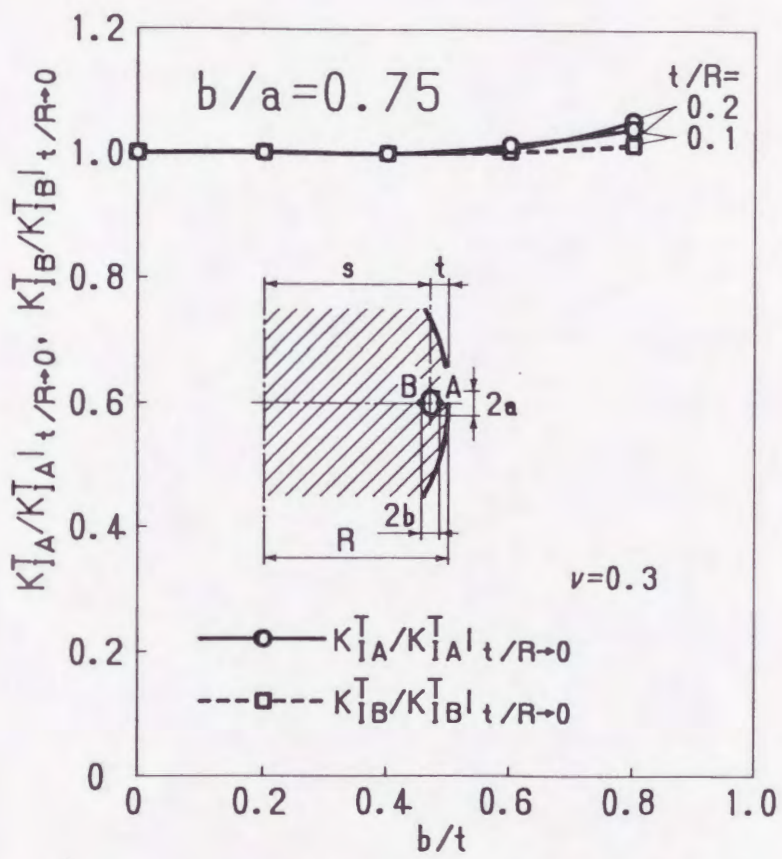


図 6・8 K_A^T, K_B^T の半無限体との比較 ($b/a=0.75$)

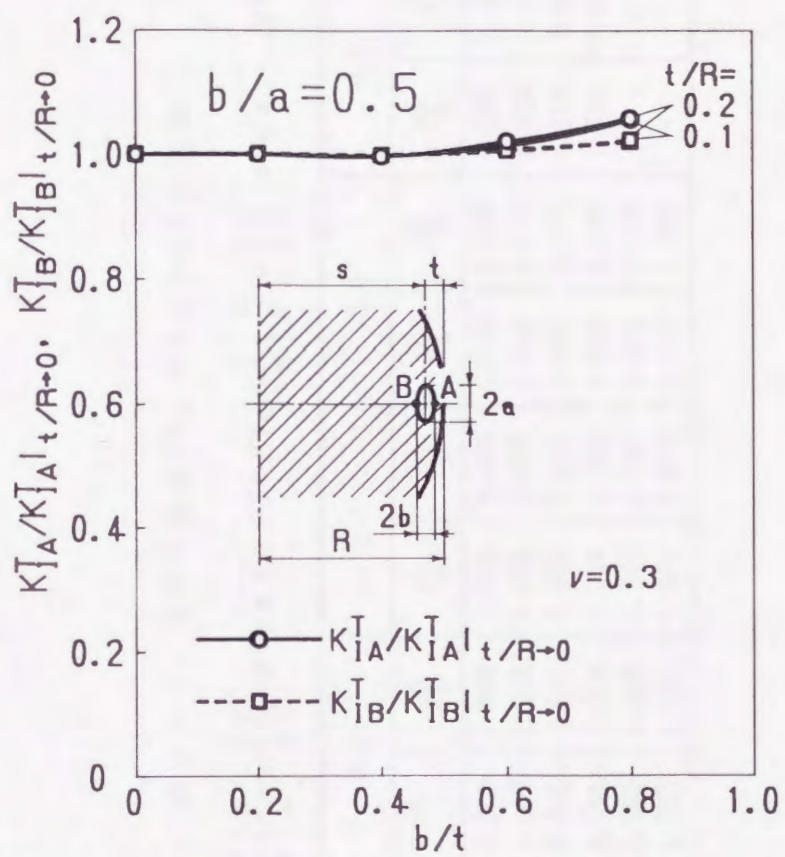


図 6・9 K_{IA}^T , K_{IB}^T の半無限体との比較 ($b/a=0.5$)

表 6・4 円形き裂の F_A^B , F_B^B と s/R の関係

$$(F_A^B = K_{I_A}^B / \frac{2}{\pi} \left(\frac{s}{R} + \frac{2r}{3R} \right) \sigma^B \sqrt{\pi r}, F_B^B = K_{I_B}^B / \frac{2}{\pi} \left(\frac{s}{R} - \frac{2r}{3R} \right) \sigma^B \sqrt{\pi r}, \nu = 0.3)$$

s/R	0.2		0.4		0.6		0.8	
r/R	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.002	1.002
0.10	1.000	1.001	1.002	1.002	1.002	1.002	1.019	1.009
0.15	1.001	1.004	1.004	1.005	1.008	1.006	1.059	1.014
0.20	1.003	1.010	1.008	1.009	1.011	1.010	-	-
0.25	1.003	1.021	1.011	1.011	1.081	1.066	-	-

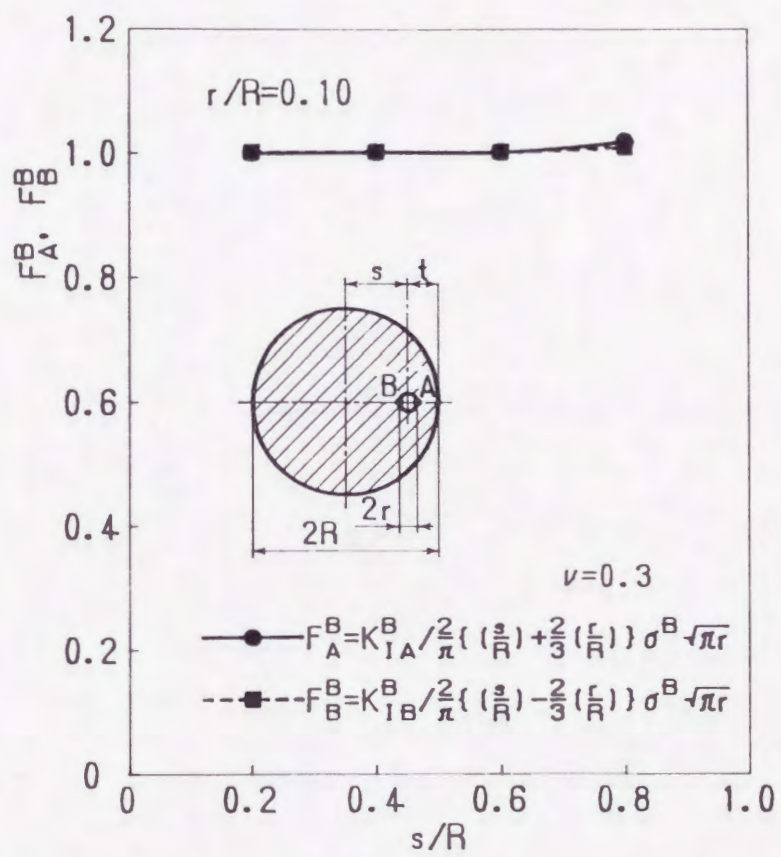


図 6・10 F_A^B , F_B^B と s/R の関係 ($r/R=0.1$)

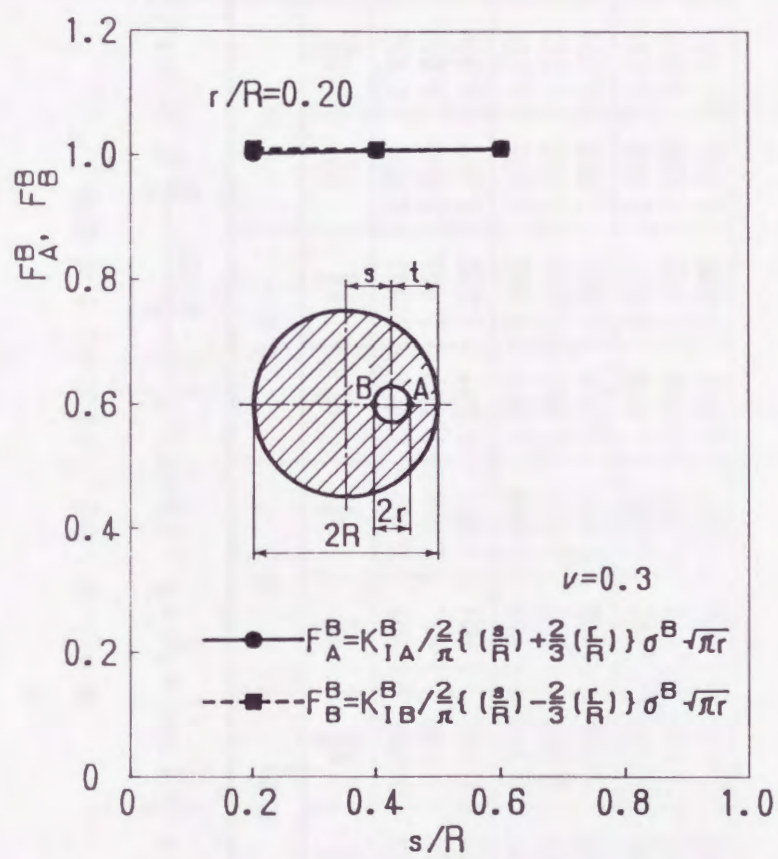


図 6・11 F_A^B, F_B^B と s/R の関係 ($r/R=0.2$)

表 6・5 F_A^B, F_B^B と b/t の関係

$$(F_A^B = K_{IA}^B / \left(\frac{s}{R \cdot E(k)} + \frac{b}{R} f(k) \right) \sigma^B \sqrt{\pi b}, F_B^B = K_{IB}^B / \left(\frac{s}{R \cdot E(k)} - \frac{b}{R} f(k) \right) \sigma^B \sqrt{\pi b}, \nu = 0.3)$$

b/t		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
b/a	t/R	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B	F_A^B	F_B^B
1.0	0.0[39]	1.000	1.000	1.000	1.000	1.007	1.003	1.033	1.010	1.118	1.020
	0.1	1.000	1.000	1.001	1.000	1.007	1.004	1.043	1.013	1.150	1.031
	0.2	1.000	1.000	1.001	1.001	1.007	1.002	1.037	1.014	1.173	1.043
0.75	0.0[39]	1.000	1.000	1.000	1.000	1.010	1.005	1.045	1.015	1.156	1.031
	0.1	1.000	1.000	1.001	1.001	1.010	1.005	1.059	1.020	1.199	1.049
	0.2	1.000	1.000	1.002	1.001	1.010	1.005	1.052	1.021	1.215	1.058
0.5	0.0[39]	1.000	1.000	1.002	1.001	1.019	1.009	1.066	1.024	1.211	1.050
	0.1	1.000	1.000	1.002	1.002	1.016	1.008	1.086	1.033	1.274	1.080
	0.2	1.000	1.000	1.003	1.002	1.016	1.009	1.076	1.036	1.273	1.088

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}} \quad (6.6)$$

図 6・12～6・15は、半無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数との比を示したものである。比較に用いた半無限体の応力拡大係数は、き裂が無い場合にき裂位置に丸棒と同じ応力が作用するときのものである。これらの図より、丸棒に存在するだ円形き裂の応力拡大係数を半無限体に存在するだ円形き裂の応力拡大係数で近似するときの誤差は、引張りの場合と同程度（6%以下）であることがわかる。

丸棒の曲率の影響は、引張りの場合も曲げの場合も、き裂形状が $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ の範囲内ではあまり変わらないことがわかる。

6・3・4 応力拡大係数の近似式

丸棒面境界の応力拡大係数への影響の程度は、フィッシュアイの位置によって異なる。そこで、(1) フィッシュアイの中心位置が丸棒面境界と離れている場合 ($s/R \leq 0.8$) と (2) フィッシュアイの中心位置が丸棒面境界と近い場合 ($s/R \geq 0.8$ ($t/R \leq 0.8$)) とに分けて近似式を示す。

以下において円形き裂の場合は a 、 b を r と置き換えて使用する。

(1) フィッシュアイの中心位置が丸棒面境界と離れている場合 ($s/R \leq 0.8$)

この場合、き裂が円形で $r/R \leq 0.1$ であれば、丸棒に存在する円形き裂の応力拡大係数は無限体中に存在する円形き裂の応力拡大係数でよく近似される。き裂がだ円形の場合も、き裂がそれほど偏平でなければ次式によってよい近似値が得られる。

引張り；

$$K_{I_A} = K_{I_B} = \frac{\sigma^r}{E(k)} \sqrt{\pi b} \quad (6.7)$$

($a=b=r$, $s/R \leq 0.8$, $r/R \leq 0.1$ において誤差 2% 未満)

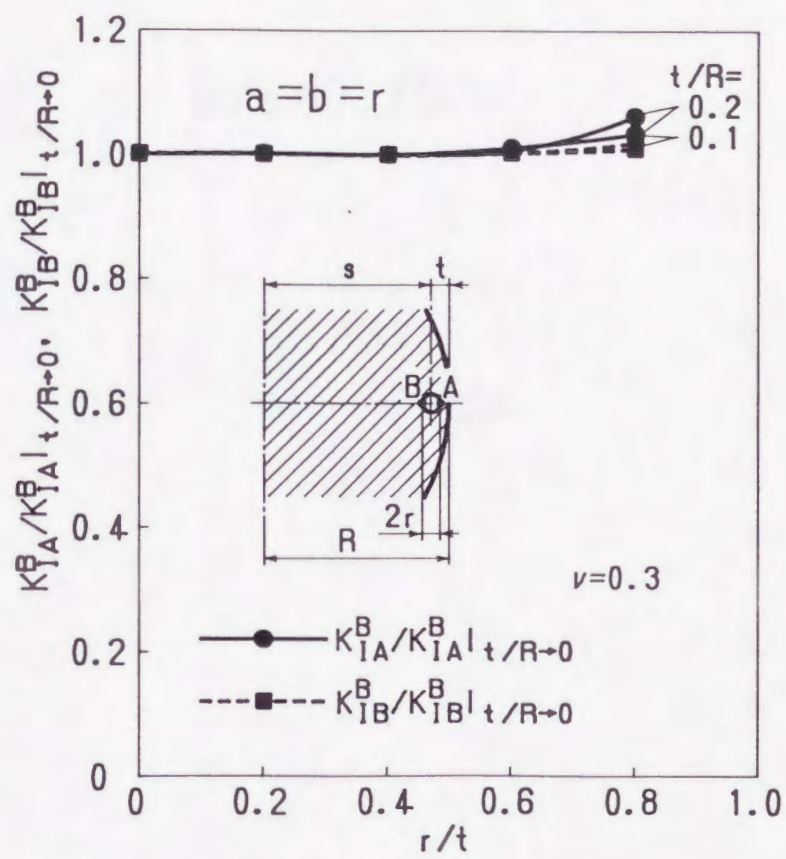


図 6・12 K_{IA}^B, K_{IB}^B の半無限体との比較 ($a=b=r$)

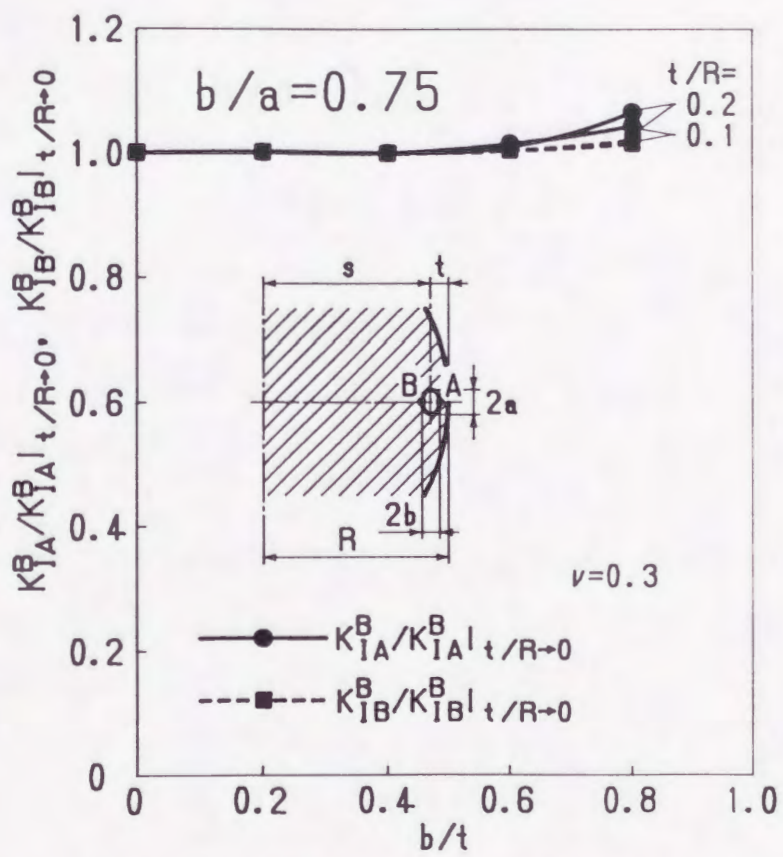


図 6・13 K_{IA}^B, K_{IB}^B の半無限体との比較 ($b/a=0.75$)

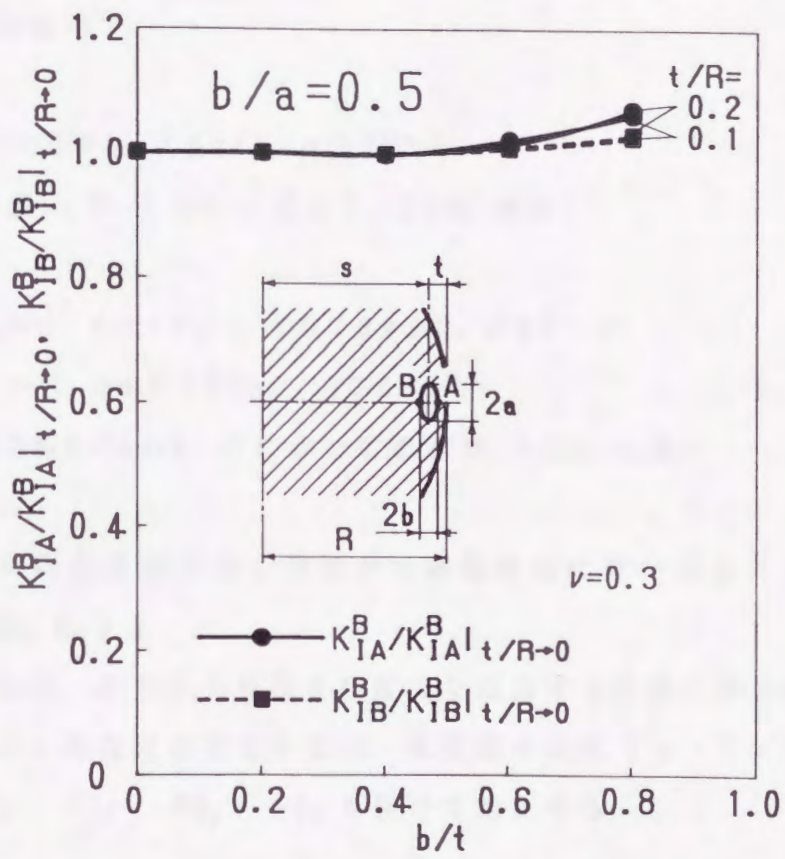


図 6・14 K_A^B , K_B^B の半無限体との比較 ($b/a=0.5$)

曲げ；

$$K_{I_A}^B = \left\{ \frac{1}{E(k)} \left(\frac{s}{R} \right) + f(k) \left(\frac{b}{R} \right) \right\} \sigma^B \sqrt{\pi b} \quad (6.8)$$

$$K_{I_B}^B = \left\{ \frac{1}{E(k)} \left(\frac{s}{R} \right) - f(k) \left(\frac{b}{R} \right) \right\} \sigma^B \sqrt{\pi b} \quad (6.9)$$

($a=b=r$, $s/R \leq 0.8$, $r/R \leq 0.1$ において誤差 2% 未満)

式 (6.7) ~ (6.9) の値が簡単に得られるように $E(k)$, $f(k)$ の近似式を次に示す。

$$E(k) = \{1 + 1.464(b/a)^{1.65}\}^{0.5} \quad (6.10)$$

($b/a \leq 1.0$ において誤差 0.13% 未満)

$$f(k) = 0.4246 - 0.0073k + 0.0977k^2 - 0.0906k^3 + 0.0748k^4 \quad (6.11)$$

($0.25 \leq b/a \leq 1.0$ において誤差 0.05% 未満)

(2) だ円形き裂の中心位置が丸棒面境界に近い場合 ($s/R \leq 0.8$ ($t/R \leq 0.2$))

この場合は、応力拡大係数を精度良く近似するためには丸棒面境界の影響を考慮に入れなければならない。無限体中の式 (6.7) ~ (6.9) に係数 $F_{I_A}^B$, $F_{I_B}^B$, $F_{II_A}^B$, $F_{II_B}^B$ を掛けて補正する。

引張り；

$$K_{II_A}^B = F_{II_A}^B \frac{\sigma^T}{E(k)} \sqrt{\pi b} \quad (6.12)$$

$$K_{II_B}^B = F_{II_B}^B \frac{\sigma^T}{E(k)} \sqrt{\pi b} \quad (6.13)$$

($0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $t/R \leq 0.2$, $b/t \leq 0.8$ において誤差 2% 未満)

曲げ；

$$K_{I_A}^B = F_{I_A}^B \left\{ \frac{1}{E(k)} \left(\frac{s}{R} \right) + f(k) \left(\frac{b}{R} \right) \right\} \sigma^B \sqrt{\pi b} \quad (6 \cdot 14)$$

$$K_{I_B}^B = F_{I_B}^B \left\{ \frac{1}{E(k)} \left(\frac{s}{R} \right) - f(k) \left(\frac{b}{R} \right) \right\} \sigma^B \sqrt{\pi b} \quad (6 \cdot 15)$$

($0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $t/R \leq 0.2$, $b/t \leq 0.8$ において誤差 2% 未満)

ここで、

$$F_{I_A}^B, F_{I_B}^B = 1 + 0.057(1 + \mu(t/R)^{0.3}) \\ \times \lambda^2 \tan\{(\pi/2)\lambda\} / \mu \quad (6 \cdot 16)$$

$$F_{I_B}^B, F_{I_B}^B = 1 + 0.015(1 + \mu(t/R)^{0.3}) \\ \times \lambda^2 \tan\{(\pi/2)\lambda\} / \mu \quad (6 \cdot 17)$$

6・3・5 だ円形き裂の応力拡大係数を求める具体的方法

以上の近似式を用いて応力拡大係数を求めるフローチャートを図 6・15 に示す。図 6・15 の手順により、引張りまたは曲げを受ける丸棒中に存在する任意のだ円形き裂の応力拡大係数を実用上十分な精度で求めることができる。

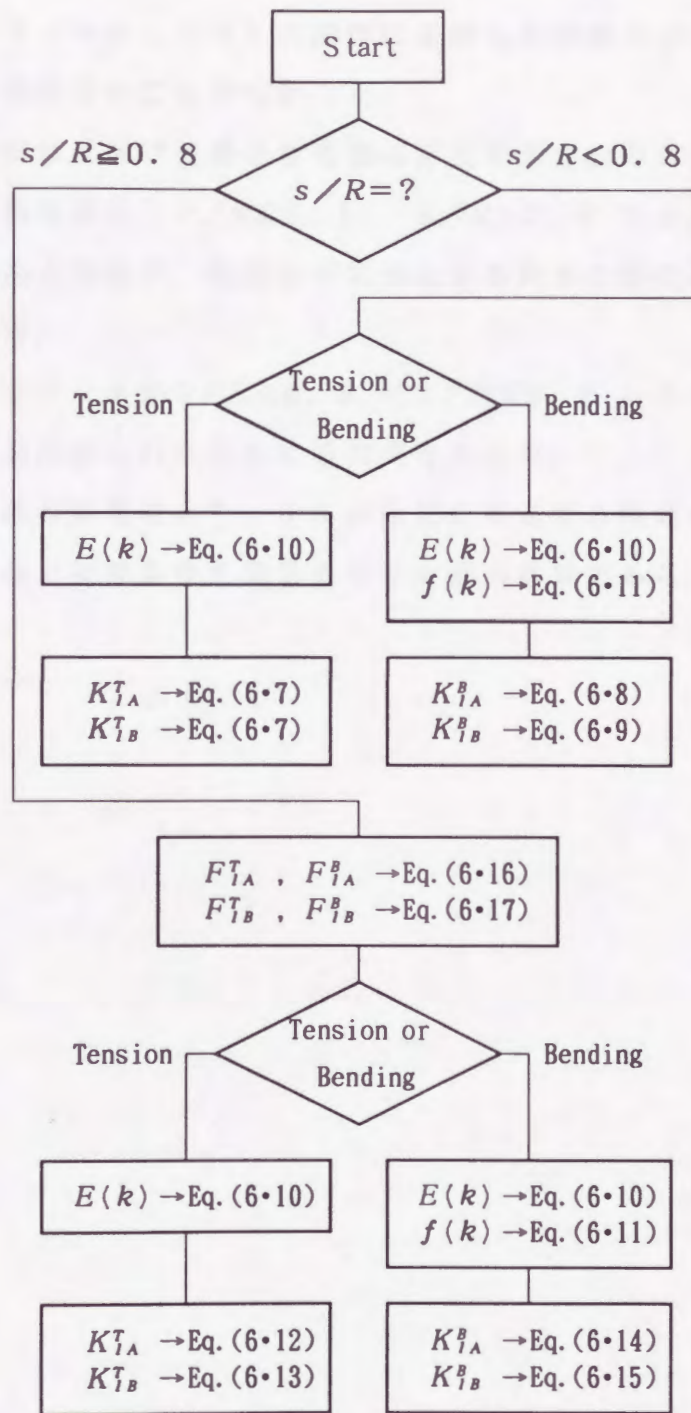


図 6・15 応力拡大係数を求めるフローチャート

6・4 結び

仮想境界に連続的に分布させるべき集中力を境界の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在する円形き裂（フィッシュアイ）の問題に応用し高精度の応力拡大係数を求めた。この結果以下のことがわかった。

(1) 引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するき裂の応力拡大係数は、き裂形状が円形の場合、 $r/R \leq 0.1$ 、 $s/R \leq 0.8$ であれば丸棒面境界の影響をほとんど受けず、無限体中に存在する円形き裂の応力拡大係数でよく近似される。

(2) 形状パラメータが $s/R \geq 0.8$ ($t/R \leq 0.2$)の場合も応力拡大係数の値が容易に得られるように近似式を与えた。

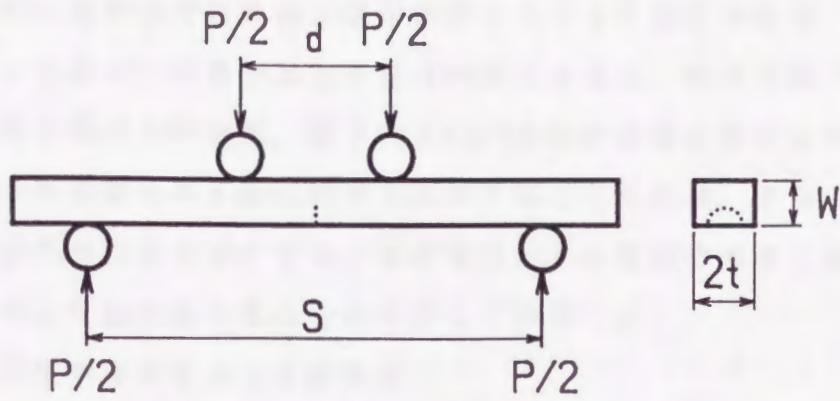
(3) この問題の解析により、き裂が内部に存在する問題に対しても有限個の集中力で合力境界条件を満足させる方法が有効であることが示された。

第7章 三点曲げまたは四点曲げを受ける曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数

7・1 まえがき

セラミックスは脆性材料であるため、強度を評価するパラメータとして破壊靱性値が重要である。比較的簡便な破壊靱性値の評価法として、Mendirattaらは、IIF法⁽⁴⁾を提案している。これは、曲げ試験片の中央部にヌープまたはビッカース圧子を押し付け、半だ円形の表面き裂を生成させ、曲げ荷重と表面き裂の大きさから破壊靱性値を求めるものである。この方法では、半だ円表面き裂を有する曲げ試験片の応力拡大係数が必要である。曲げ荷重の実際的な負荷方法は、三点曲げまたは四点曲げであるため、三点曲げまたは四点曲げの場合の応力拡大係数が必要となる。しかし、半だ円表面き裂を有する曲げ試験片の三点曲げまたは四点曲げの応力拡大係数の解析例はないようである。

そこで第7章では、有限個の集中力による体積力法を用いて、JISファインセラミックス曲げ試験方法(JIS R1601)の試験片(図7・1)の中央部に、図7・2に示すような半だ円表面き裂が存在するときの三点曲げまたは四点曲げの応力拡大係数を求めた。さらに、三点曲げまたは四点曲げの応力拡大係数が純粋曲げを受ける無限板の応力拡大係数でどの程度近似されるかを調べ、応力拡大係数の近似式を与えた。



$S=30\text{mm}$
 $d=0, 10\text{mm}$
 $W= 3\text{mm}$
 $t= 2\text{mm}$

図 7・1 J I S ファインセラミックス曲げ試験片

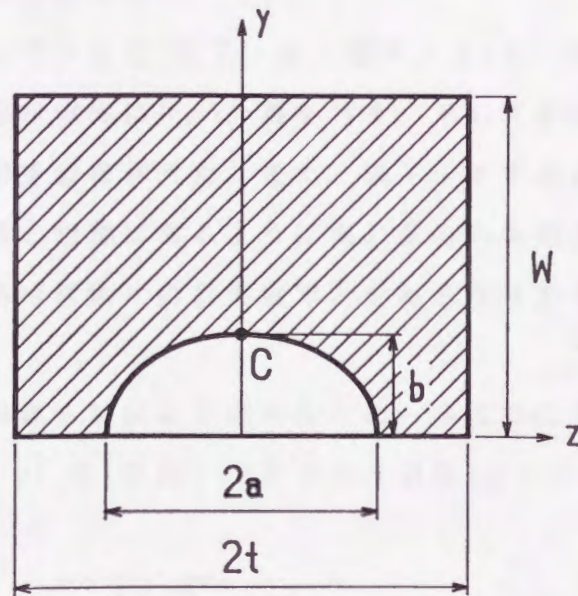


図 7・2 試験片中央部に存在する半だ円表面き裂

7・2 解析理論

解析方法は体積力法である。解析する問題は図7・1の試験片の中央部に図7・2に示す半だ円表面き裂が存在するときのものである。特に図7・1において $d \rightarrow 0$ の場合は三点曲げの問題となる。問題を図7・3(a)の周期荷重を受ける無限板、図7・3(b)の純粹曲げを受ける無限板、図7・3(c)のき裂となる面に体積力対が作用した無限体、さらに図7・3(d)の試験片の自由表面となるべき面を分割し各区間の外側に有限個の集中力が作用した無限体の重ね合わせとして解析した。

(1) 周期集中荷重を受ける無限板

図7・3(a)のように有限厚さの無限板に周期的に荷重を作用させる。このとき無限板に生ずる応力は、二次元問題として取扱うことができ、周期的に作用する集中力をフーリエ級数に分解し、無限板に余弦波状の応力が作用するときの解を用いることによって求められる⁽²⁾。

(2) 純粹曲げを受ける無限板

無限板に作用する周期荷重によって端面に生じる曲げモーメントを M_0 (M_0 は数値計算によって求めた)とするとき、図7・3(b)のように $-M_0$ を加える。

(3) き裂面に作用する集中力対

無限体中のき裂となるべき面[図7・2, 図7・3(c)]の分割は、図7・4に示すように、半径方向に N_k 分割を行う。そしてき裂面にそって引張りの標準型集中力対を分布させた。また、図7・4中の点線で示される区間にも、き裂の区間と対称になるように同じ重みの体積力対を分布させた。これはき裂面が曲げ試験片の自由境界と交わる点付近の境界条件を良好にするためである。

ここでは応力拡大係数を精度よく求めるため、各区間に分布させるべき体積力対の密度 $\phi(\xi, \eta)$ を(重み) \times (基本密度関数)という形に仮定する。

$$\phi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \quad (7.1)$$

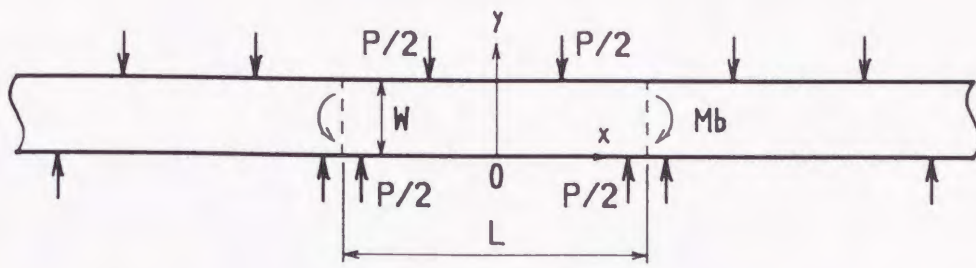
ここで、 $\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}$ の項は無限体に一個の円状き裂がある問題を体積力法で表現するときの、き裂面に分布させるべき体積力対のパターンであり、本解析の基本密度関数である。 $W(\xi, \eta)$ はその密度関数に掛けるべき重みで、本解析では、各区分ごとに一定とした。その値が境界条件から定まる未知数である。

(4) 試験片の外側に作用する有限個の集中力

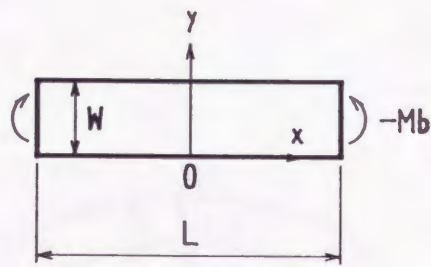
図7・3(d)に示すように、無限体中に想定した、試験片の自由表面となるべき仮想境界を長方形要素に分割し、各区分の外側に集中力を作用させる。

(1)~(4)を重ね合わせて解を求める訳であるが、き裂面の体積力対の重み $W(\xi, \eta)$ および試験片の外側に作用させるべき集中力の大きさは、き裂面の各分割区間の midpoint の応力境界条件および試験片の表面の各分割区間の合力境界条件が同時に満足されるように決定した。そのときき裂前縁C点の応力拡大係数 K_I^* は、その区間の重み W_c を用いて次式から求められる。

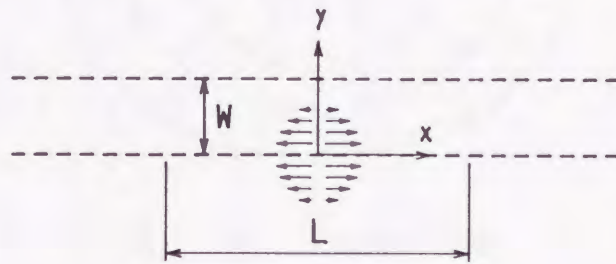
$$K_I^* = \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)^2} \sqrt{\pi b} W_c \quad (7.2)$$



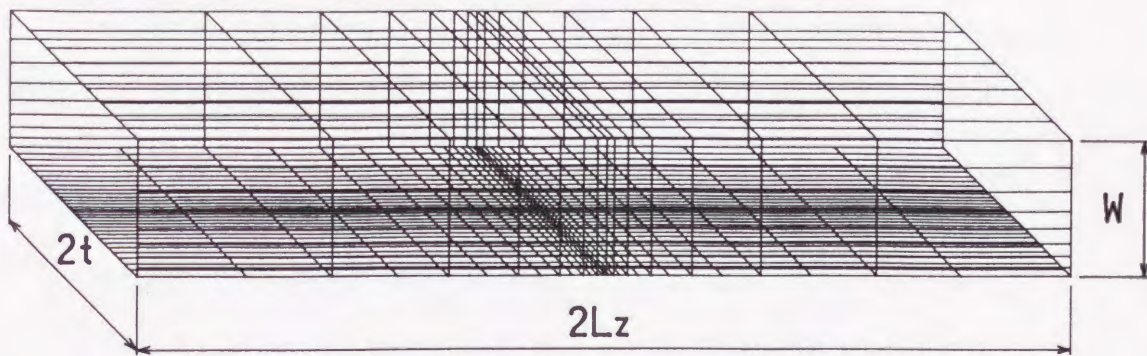
(a)



(b)



(c)



(d)

図 7・3 解の重ね合わせ

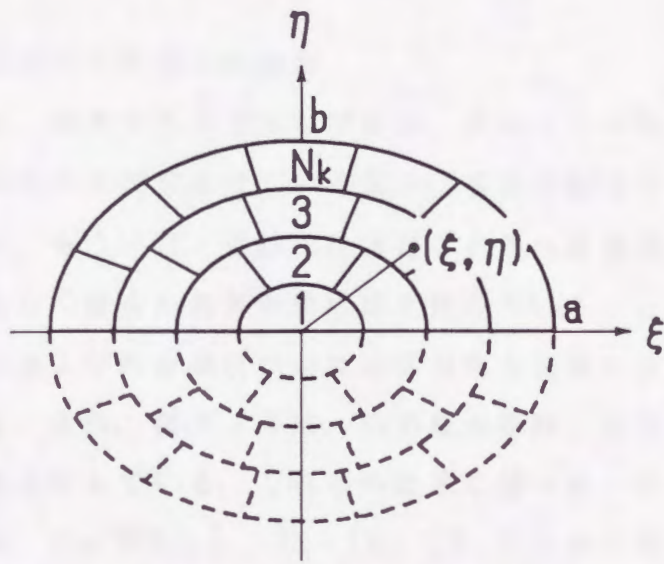


図 7・4 き裂面の分割

7・3 計算結果および考察

計算結果において応力拡大係数を無次元化する際に用いた σ^b は、次式で定義される。

$$\sigma^b = 3M/W^2 t \quad (7.3)$$

ここで、 M は試験片に作用させる曲げモーメントで、純粹曲げでは遠方で作用させる曲げモーメント、三点曲げでは $M = PS/4$ となり、四点曲げでは $M = P(S-d)/4$ となる。

7・3・1 計算結果の精度の検討

本解析において、誤差の生じる主な原因は、次の二つである。一つは、試験片表面の境界条件を満足させている長さ（境界分割長さ） L_z が有限であることであり、もう一つは、連続的に満足されるべき境界条件を有限個の応力境界条件もしくは合力境界条件に置き換えていることである。図7・5は、三点曲げおよび四点曲げにおける応力拡大係数に及ぼす W/L_z の影響を示している。また、図7・6は、応力拡大係数とき裂の半径方向分割数 N_k との関係を示している。これらの結果に基づき、応力拡大係数の計算に当たっては、 $L_z/W > 3$ し、 $N_k = 10, 12$ のときの値を用い外そうによって厳密解を推定した。

7・3・2 無限板に存在する表面き裂の F^b

曲げ試験片（角柱）の問題において $t \rightarrow \infty$ とすれば、無限板の問題となる。表7・1は、純粹曲げを受ける無限板に存在する表面き裂の場合について、本解析結果と石田らの結果⁽²⁴⁾、白鳥らの結果⁽⁴³⁾およびNewmanらの結果⁽⁴⁴⁾とを比較したものである。 $b/W \leq 0.4$ ではそれぞれと比較的よく一致している（本解析の曲げ試験片の結果は全て $b/W \leq 0.4$ である）。

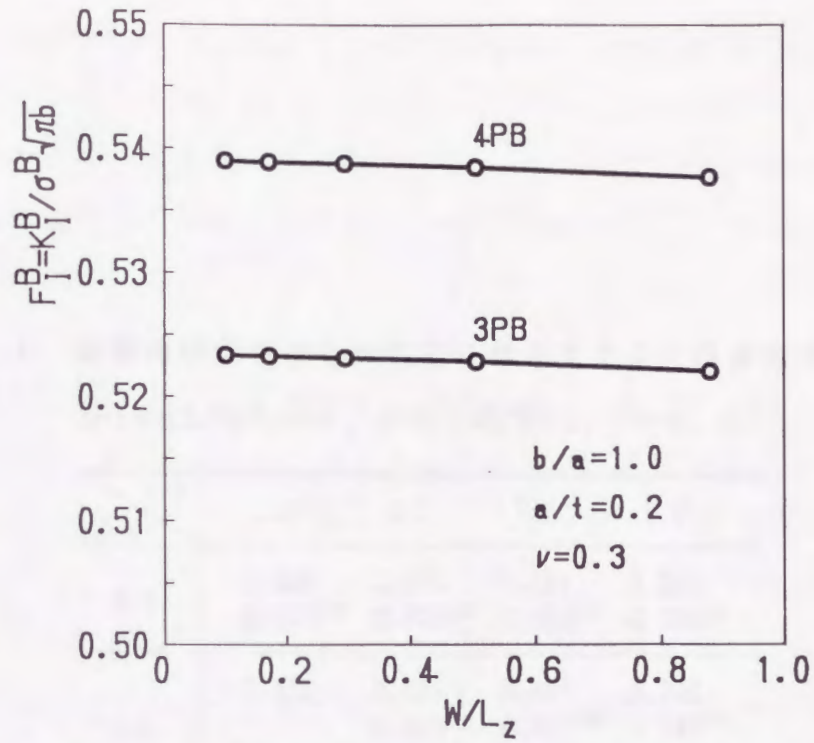


図 7・5 試験片の分割範囲 L_z と解の収束性の例

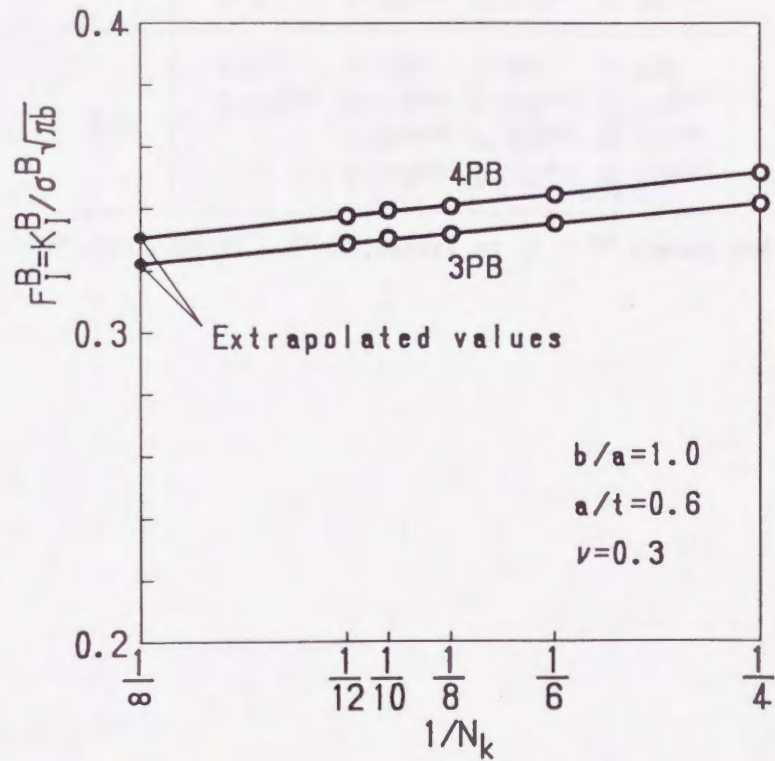


図 7・6 F_I^B と分割数 N_k の関係

表 7・1 純粋曲げを受ける無限板に存在する半だ円表面き裂の F_I^B

$(F_I^B = K_I^B / \sigma^B \sqrt{\pi b}, \sigma^B = 3M/W^2 t, \nu = 0.3)$

b/W b/a	0.0	0.2	0.4	0.6
0.5	0.890	0.675	0.491	0.299
	0.885 ⁽²⁴⁾	0.670 ⁽²⁴⁾	0.482 ⁽²⁴⁾	0.286 ⁽²⁴⁾
0.6	0.835	0.625	0.437	0.240
		0.632 ⁽⁴³⁾	0.441 ⁽⁴³⁾	0.241 ⁽⁴³⁾
		0.627 ⁽⁴⁴⁾	0.442 ⁽⁴⁴⁾	0.237 ⁽⁴⁴⁾
0.75	0.761	0.560	0.374	0.182
	0.761 ⁽²⁴⁾	0.562 ⁽²⁴⁾	0.377 ⁽²⁴⁾	0.187 ⁽²⁴⁾
1.0	0.657	0.477	0.294	0.113
	0.659 ⁽²⁴⁾	0.478 ⁽²⁴⁾	0.303 ⁽²⁴⁾	0.124 ⁽²⁴⁾
		0.477 ⁽⁴³⁾	0.306 ⁽⁴³⁾	0.120 ⁽⁴³⁾
		0.472 ⁽⁴⁴⁾	0.307 ⁽⁴⁴⁾	0.132 ⁽⁴⁴⁾

⁽²⁴⁾:Isida et al., ⁽⁴³⁾:Shiratori et al., ⁽⁴⁴⁾:Newman and Raju

7・3・3 J I S ファインセラミックス曲げ試験片に存在する表面き裂の F_I^0

表 7・2 および図 7・7 に、き裂の最深点 C における無次元化した応力拡大係数を示す。また、表 7・2 には、Newmanらの結果⁽⁴⁵⁾も示している。四点曲げの応力拡大係数と純粋曲げの応力拡大係数との差は見られないが三点曲げの応力拡大係数は純粋曲げの応力拡大係数より 2～3%低いことがわかる。

7・3・4 無限板に存在する表面き裂の応力拡大係数との比較

図 7・8 は、純粋曲げの場合の曲げ試験片の応力拡大係数と無限板の応力拡大係数との比を示したものである。この図より、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ のとき $b/W \leq 0.2$ であれば、曲げ試験片の応力拡大係数は無限板の応力拡大係数でよく近似されることがわかる（誤差 4%未満）。四点曲げの応力拡大係数と純粋曲げの応力拡大係数との差はみられないので、四点曲げを受ける曲げ試験片の応力拡大係数も純粋曲げを受ける無限板の応力拡大係数と同様に近似される。

7・3・5 応力拡大係数の近似式

以上で求めた結果を基に、三点曲げまたは四点曲げを受ける J I S ファインセラミックス曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の最深点 C の応力拡大係数の近似式を求めた。

三点曲げ；

$$K_I^0 = \alpha K_{I \text{ PLATE}} \quad (7.4)$$

$$\alpha = 0.982 + 1.1 \lambda^3 / \mu \quad (7.5)$$

四点曲げ；

$$K_I^0 = \beta K_{I \text{ PLATE}} \quad (7.6)$$

$$\beta = 1 + 0.5 \lambda^2 / \mu \quad (7.7)$$

表 7・2 J I S ファインセラミックス曲げ試験片 (図 7・1) の F_1^*

($F_1^* = K_1^* / \sigma^B \sqrt{\pi b}$, $\sigma^B = 3P(S-d) / 4W^2 t$, $\nu = 0.3$)

a/t					
b/a		0.0	0.2	0.4	0.6
0.5	Pure Bending	0.890	0.814	0.750	0.701
		0.896 ⁽⁴⁵⁾	0.824 ⁽⁴⁵⁾	0.763 ⁽⁴⁵⁾	0.720 ⁽⁴⁵⁾
	3 Point Bending	0.874	0.794	0.729	0.679
	4 Point Bending	0.890	0.814	0.750	0.701
0.75	Pure Bending	0.761	0.661	0.575	0.497
		0.769 ⁽⁴⁵⁾	0.672 ⁽⁴⁵⁾	0.587 ⁽⁴⁵⁾	0.517 ⁽⁴⁵⁾
	3 Point Bending	0.748	0.644	0.557	0.482
	4 Point Bending	0.761	0.661	0.575	0.497
1.0	Pure Bending	0.657	0.539	0.430	0.329
		0.663 ⁽⁴⁵⁾	0.547 ⁽⁴⁵⁾	0.442 ⁽⁴⁵⁾	0.344 ⁽⁴⁵⁾
	3 Point Bending	0.645	0.523	0.414	0.321
	4 Point Bending	0.657	0.539	0.430	0.329

⁽⁴⁵⁾:Newman and Raju

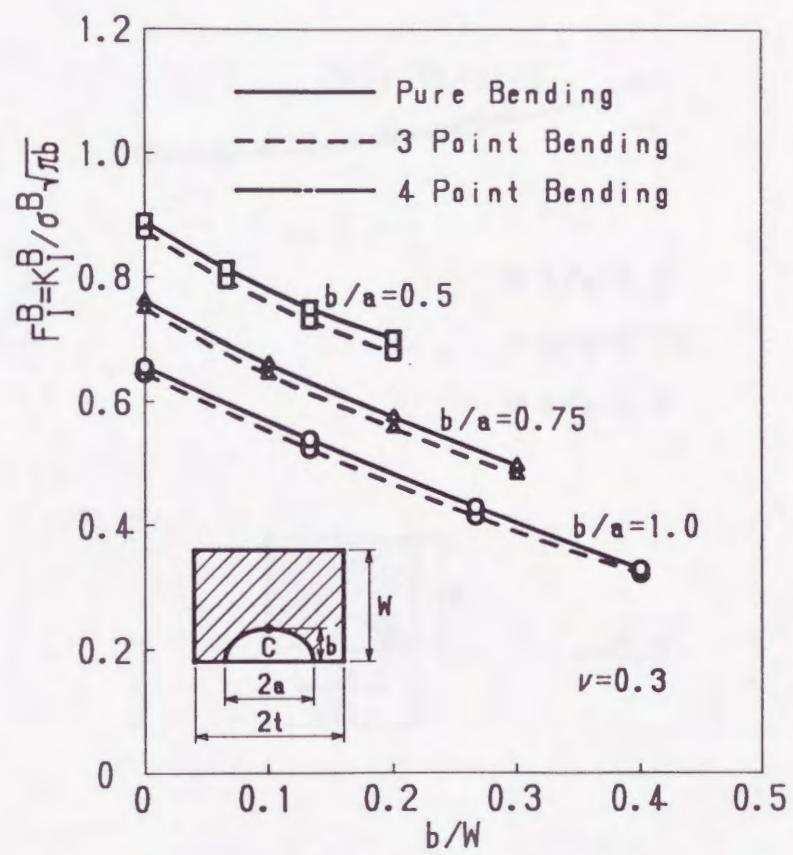


図 7・7 J I S ファインセラミックス曲げ試験片の F_I^B

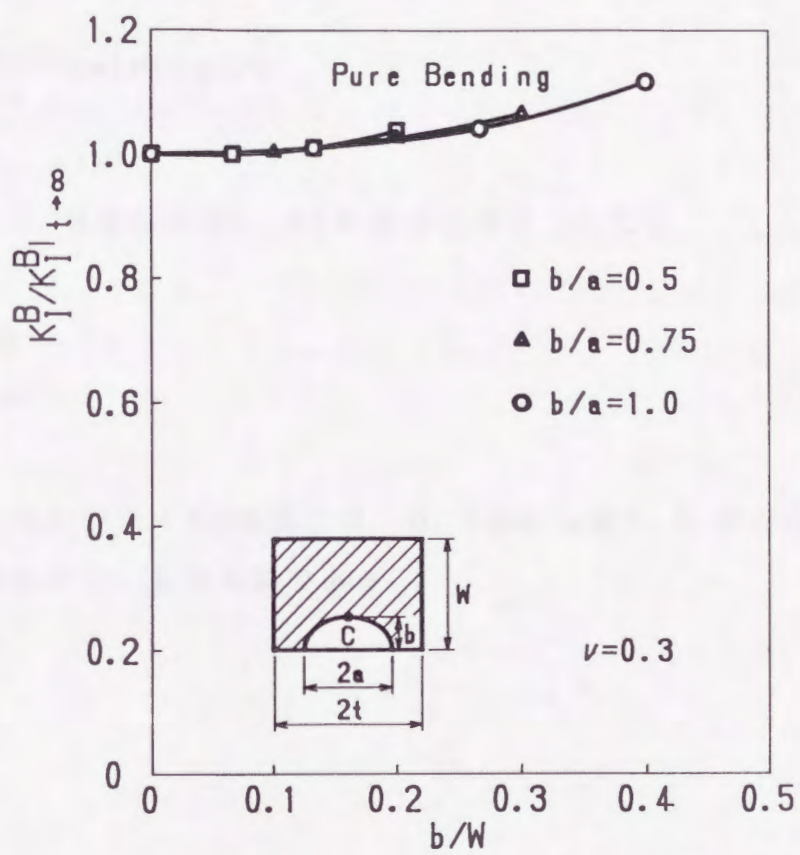


図 7・8 無限板の応力拡大係数との比較

式(7・5), (7・7)において

$$\lambda = b/W, \mu = b/a \quad (7.8)$$

また式(7・4), (7・6)の $K_{I \text{ PLATE}}$ は, 純粹曲げを受ける無限板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で, 石田らによって次のように与えられている⁽²⁴⁾ (式(4・9)参照).

$$\frac{K_{I \text{ PLATE}}}{\sqrt{\pi b}} = \sigma_T^b F_T^b + \sigma^b F^b \quad (7.9)$$

式(7・9)における σ_T^b , σ^b の値は次のようになる.

$$\sigma_T^b = 0 \quad (7.10)$$

$$\sigma^b = \sigma^b \quad (7.11)$$

式(7・4), (7・6)の誤差は, $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ のとき, $a/t \leq 0.6$ であれば 1.5% 未満である.

7・4 結び

仮想境界上に連続的に分布させるべき集中力を境界の外側に作用する有限個の集中力で代表させる方法を半だ円表面き裂を有する曲げ試験片（JISファインセラミックス曲げ試験片）の三点曲げおよび四点曲げの問題に応用し高精度の応力拡大係数を求めた。その結果以下のことがわかった。

（1）四点曲げの応力拡大係数と純粋曲げの応力拡大係数との差は実質上見られないが、三点曲げの応力拡大係数は純粋曲げの応力拡大係数より2～3%小さい値となる。

（2）実用に共するように半だ円表面き裂を有するJISファインセラミックス曲げ試験片の三点曲げおよび四点曲げの応力拡大係数の近似式を示した。

（3）第6章までで解析した問題は自由境界面がいずれも曲面であったが、この問題の解析により、自由境界面が平面である問題に対しても有限個の集中力で合力境界条件を満足させる方法が有効であることが示された。

第 8 章 結 論

本論文は、数値計算による応力解析法の中で最も高精度な解析法である体積力法の汎用化を目的として、これまで境界上に連続的に分布させていた集中力を有限個の集中力で代表させる方法を提案し、計算量を大幅に減少させることによって高精度の解を短い計算時間で求めることを可能にした。この方法を用いることによって、これまでは計算時間の短縮のために問題ごとに専用のプログラムを必要としていた複雑な三次元問題も、汎用化されたプログラムによって実行可能な計算時間で解を求めることが可能となる。

まず、この連続的に作用させていた集中力を有限個の集中力で代表させる方法について検討した結果、以下の結果が得られた。

(1) この方法は、計算が簡単な通常の応力法、即ち分割された区間の中点の応力値を境界条件とする方法と計算量がほぼ等しく、計算精度は、境界上に集中力を連続的に分布させ各区間の合力境界条件を満足させる方法に匹敵する。

(2) 集中力の位置に関して、切欠き問題では、分割区間の長さ c と集中力と境界との距離 h との比 c/h は $0.5 \sim 0.7$ が最適である。また、切欠き問題では、切欠き底での分割区間の長さは、切欠き半径の 4 分の 1 以下であることが必要である。き裂問題では、 c/h の値は 1.5 程度が最適である。

さらに、この方法をいくつかの実用上重要な問題の解法に応用し、以下の結果が得られた。

(3) 内圧を受ける円筒の内面に存在する半だ円表面き裂の解析を行い、高精度の応力拡大係数の値を得た。また、この応力拡大係数の値を半無限体に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数および平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で近似したときの誤差を調べ、円筒の厚さ t と内半径 R_i との比が $t/R_i \leq 0.4$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることを示した。さらに、実用に便利なように応力拡大係数の近似式を提案した。この問題の解析により、き裂面と

自由境界面とが直線的に交わる問題に対しても有限個の集中力による方法が有効であることが示された。

(4) 引張りまたは曲げを受ける円筒の外面に存在する半だ円表面き裂の解析を行い、高精度の応力拡大係数の値を得た。また、この応力拡大係数の値を平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で近似したときの誤差を調べ、円筒の厚さ t と内半径 R_i との比が $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、き裂深さ b とき裂長さ a との比が $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ で、き裂深さ b と円筒の厚さ t との比が $b/t \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることを示した。さらに、実用に便利のように応力拡大係数の近似式を提案した。この問題の解析により、き裂面と自由境界面とが曲線的に交わる問題に対しても有限個の集中力による方法が有効であることが示された。

(5) 引張りまたは曲げを受ける丸棒に存在するだ円き裂の解析を行い、高精度の応力拡大係数の値を得た。また、き裂形状が円形の場合に対し、この応力拡大係数の値を無限体に存在する円形き裂の応力拡大係数で近似したときの誤差を調べ、円形き裂の半径 r と丸棒の半径 R との比が $r/R \leq 0.1$ のとき、円形き裂の中心と丸棒の中心との距離 s との比が $s/R \leq 0.8$ であれば、丸棒面境界の影響をほとんど受けず、無限体に存在する円形き裂の応力拡大係数でよく近似される。半無限体に存在するだ円き裂の応力拡大係数で近似したときの誤差も示した。さらに、実用に便利のように応力拡大係数の近似式を提案した。この問題の解析により、き裂が内部に存在する問題に対しても有限個の集中力による方法が有効であることが示された。

(6) 三点曲げまたは四点曲げを受ける曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の解析を行い、高精度の応力拡大係数の値を得た。また、実用に便利のように、応力拡大係数の近似式を提案した。さらに、三点曲げを受ける曲げ試験片に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数は、き裂を含む断面における応力分布が直線分布であると仮定して求められる応力拡大係数よりほぼ3%低い値となることがわかった。この問題の解析により、自由境界面が平面である問題に対しても有限個の集中力による方法が有効であ

ることが示された。

(7) 以上の実用上重要な問題の解析を通して、本論文で提案した有限個の集中力で境界条件を満足させる方法の有効性が示された。

謝 辞

本論文は、九州大学工学部 西谷弘信教授の懇切なご指導のもとにまとめ上げられたもので、終始変わらぬご鞭撻を賜り、格別のご配慮にあずかった。論文の完成はひとえに西谷教授のご指導のおかげであり、ここに謹んで感謝の意を表する。

また、本論文をまとめるにあたり、格別のご支援と多大のお世話を頂いた九州工業大学 陳玳珩助教授に厚く感謝の意を表する。

さらに、修士論文以来、九州大学工学部材料強弱学教室の関係各位には研究面ばかりでなく諸々に関しお世話になり、深く感謝の意を表す。

最後に、本研究を行うに当たって、終始温かいご理解ある研究環境をお与え頂いた久留米工業高等専門学校 今井良一教授に謹んで感謝の意を表する。

[付録 1] 無限体に作用する集中力による応力場

無限体中の一点 (x_0, y_0, z_0) に P, Q, R なる集中力 (それぞれ x, y, z 方向とする) が作用する場合の任意の点 (x, y, z) に生じる応力の成分 $\sigma_x^P, \sigma_y^P, \sigma_z^P$ などは Kelvin⁽¹⁹⁾ によって次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^P &= -B(x-x_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} P \\ \sigma_y^P &= B(x-x_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} P \\ \sigma_z^P &= B(x-x_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5} \right\} P \end{aligned} \right\} \quad (A1 \cdot 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}^P &= -3B \frac{(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)}{r^5} P \\ \tau_{zx}^P &= -B(z-z_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} P \\ \tau_{xy}^P &= -B(y-y_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} P \end{aligned} \right\} \quad (A1 \cdot 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^Q &= B(y-y_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} Q \\ \sigma_y^Q &= -B(y-y_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} Q \\ \sigma_z^Q &= B(y-y_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5} \right\} Q \end{aligned} \right\} \quad (A1 \cdot 3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}^Q &= -B(z-z_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} Q \\ \tau_{zx}^Q &= -3B \frac{(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)}{r^5} Q \\ \tau_{xy}^Q &= -B(x-x_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} Q \end{aligned} \right\} \quad (A1 \cdot 4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^R &= B(z-z_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} R \\ \sigma_y^R &= B(z-z_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} R \\ \sigma_z^R &= -B(z-z_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5} \right\} R \end{aligned} \right\} \quad (A1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}^R &= -B(y-y_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5} \right\} R \\ \tau_{zx}^R &= -B(x-x_0) \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5} \right\} R \\ \tau_{xy}^R &= -3B \frac{(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)}{r^5} R \end{aligned} \right\} \quad (A1.6)$$

上記の式において

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (A1.7)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (A1.8)$$

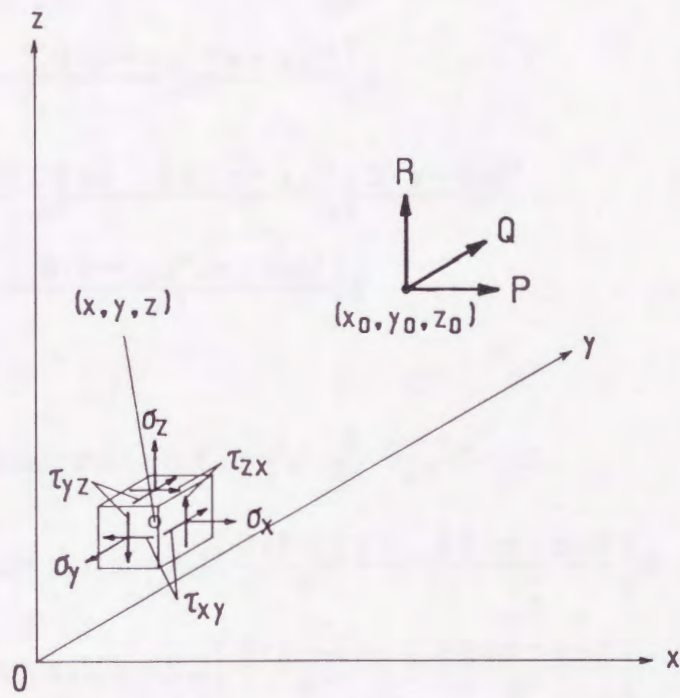


図 A 1 ・ 1 集中力による応力

[付録 2] 無限体に作用する集中力対による応力場

無限体中の一点 (x_0, y_0, z_0) に S, T, U なる集中力対 (それぞれ x, y, z 方向とする) が作用する場合の任意の点 (x, y, z) に生じる応力の成分 $\sigma_{ij}^S, \sigma_{ij}^T, \sigma_{ij}^U$ などは無限体に作用する集中力の解⁽¹⁹⁾

[付録 1] を微分することによって次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^S &= B \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{6(1+\nu)(x-x_0)^2}{r^5} - \frac{15(x-x_0)^4}{r^7} \right\} S \\ \sigma_y^S &= B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(x-x_0)^2 + 3(z-z_0)^2}{r^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^7} \right\} S \\ \sigma_z^S &= B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(x-x_0)^2 + 3(y-y_0)^2}{r^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15(z-z_0)^2(x-x_0)^2}{r^7} \right\} S \end{aligned} \right\} \quad (A2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}^S &= 3B(y-y_0)(z-z_0) \left\{ \frac{1}{r^5} - \frac{5(x-x_0)^2}{r^7} \right\} S \\ \tau_{zx}^S &= B(z-z_0)(x-x_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(x-x_0)^2}{r^7} \right\} S \\ \tau_{xy}^S &= B(x-x_0)(y-y_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(x-x_0)^2}{r^7} \right\} S \end{aligned} \right\} \quad (A2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^T &= B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(y-y_0)^2 + 3(z-z_0)^2}{r^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^7} \right\} T \\ \sigma_y^T &= B \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{6(1+\nu)(y-y_0)^2}{r^5} - \frac{15(y-y_0)^4}{r^7} \right\} T \end{aligned} \right\} \quad (A2.3)$$

$$\sigma_z^T = B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(y-y_0)^2 + 3(x-x_0)^2}{r^5} - \frac{15(y-y_0)^2(z-z_0)^2}{r^7} \right\} T$$

$$\tau_{yz}^T = B(y-y_0)(z-z_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(y-y_0)^2}{r^7} \right\} T$$

$$\tau_{zx}^T = 3B(z-z_0)(x-x_0) \left\{ \frac{1}{r^5} - \frac{5(y-y_0)^2}{r^7} \right\} T$$

$$\tau_{xy}^T = B(x-x_0)(y-y_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(y-y_0)^2}{r^7} \right\} T$$

(A2.4)

$$\sigma_x^U = B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(z-z_0)^2 + 3(y-y_0)^2}{r^5} - \frac{15(z-z_0)^2(x-x_0)^2}{r^7} \right\} U$$

$$\sigma_y^U = B \left\{ \frac{2(1+\nu)}{r^3} - \frac{6\nu(z-z_0)^2 + 3(x-x_0)^2}{r^5} - \frac{15(y-y_0)^2(z-z_0)^2}{r^7} \right\} U$$

$$\sigma_z^U = B \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{6(1+\nu)(z-z_0)^2}{r^5} - \frac{15(z-z_0)^4}{r^7} \right\} U$$

(A2.5)

$$\tau_{yz}^U = B(y-y_0)(z-z_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(z-z_0)^2}{r^7} \right\} U$$

$$\tau_{zx}^U = B(z-z_0)(x-x_0) \left\{ \frac{3(1+2\nu)}{r^5} - \frac{15(z-z_0)^2}{r^7} \right\} U$$

$$\tau_{xy}^U = 3B(x-x_0)(y-y_0) \left\{ \frac{1}{r^5} - \frac{5(z-z_0)^2}{r^7} \right\} U$$

(A2.6)

上記の式において

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}$$

(A2.7)

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

(A2.8)

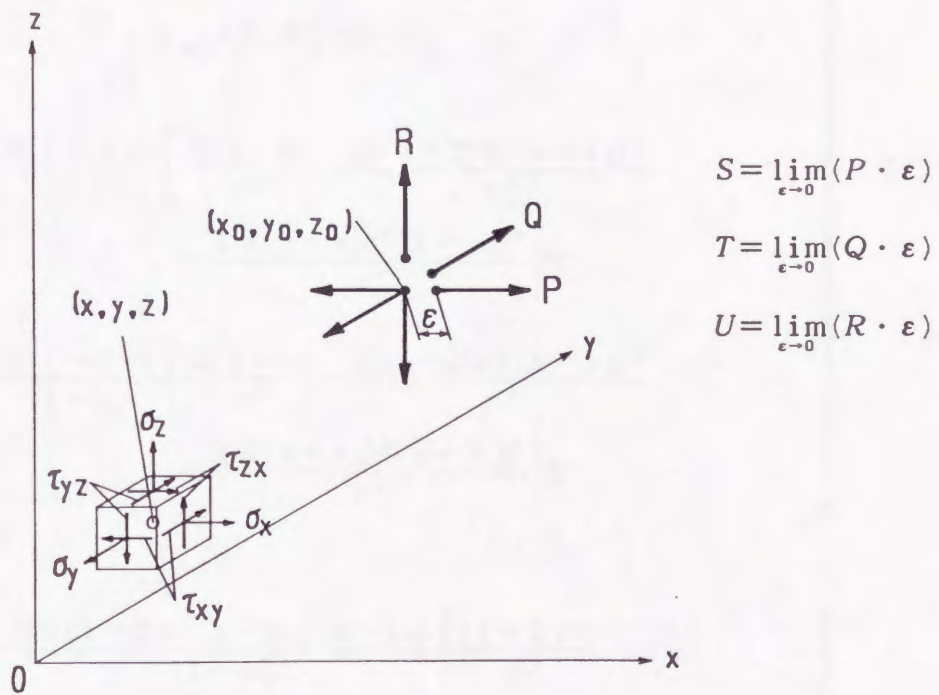


図 A 2 ・ 1 集中力対による応力

[付録3] 無限体に作用する引張りの標準型集中力対による応力場

無限体中の一点 (x_0, y_0, z_0) に X, Y, Z なる引張りの標準型集中力対 (それぞれ x, y, z 方向とする) が作用する場合の任意の点 (x, y, z) に生じる応力の成分 $\sigma_x^x, \sigma_y^y, \sigma_z^z$ などは無限体に作用する集中力対の応力の値 [付録2] を組み合わせることによって次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^x &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{6(x-x_0)^2}{r^5} - \frac{15(x-x_0)^4}{r^7} \right\} X \\ \sigma_y^y &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(z-z_0)^2}{r^5} - \frac{15(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^7} \right\} X \\ \sigma_z^z &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(y-y_0)^2}{r^5} - \frac{15(z-z_0)^2(x-x_0)^2}{r^7} \right\} X \end{aligned} \right\} \quad (A3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}^x &= \frac{3B(1-2\nu)(y-y_0)(z-z_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^5} - \frac{5(x-x_0)^2}{r^7} \right\} X \\ \tau_{zx}^y &= \frac{3B(1-2\nu)(z-z_0)(x-x_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} - \frac{5(x-x_0)^2}{r^7} \right\} X \\ \tau_{xy}^z &= \frac{3B(1-2\nu)(x-x_0)(y-y_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} - \frac{5(x-x_0)^2}{r^7} \right\} X \end{aligned} \right\} \quad (A3.2)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^y &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(z-z_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y \\
 \sigma_y^y &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{6(y-y_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(y-y_0)^4}{r^7} \right\} Y \\
 \sigma_z^y &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(x-x_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(y-y_0)^2(z-z_0)^2}{r^7} \right\} Y
 \end{aligned}
 \tag{A3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^y &= \frac{3B(1-2\nu)(y-y_0)(z-z_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y \\
 \tau_{xz}^y &= \frac{3B(1-2\nu)(z-z_0)(x-x_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y \\
 \tau_{xy}^y &= \frac{3B(1-2\nu)(x-x_0)(y-y_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y
 \end{aligned}
 \tag{A3.4}$$

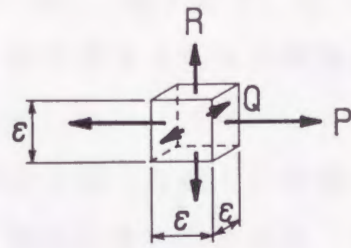
$$\begin{aligned}
 \sigma_x^z &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(y-y_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(z-z_0)^2(x-x_0)^2}{r^7} \right\} Z \\
 \sigma_y^z &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(x-x_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(y-y_0)^2(z-z_0)^2}{r^7} \right\} Z
 \end{aligned}
 \tag{A3.5}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^z &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{6(z-z_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15(z-z_0)^4}{r^7} \right\} Z \\
 \tau_{yz}^z &= \frac{3B(1-2\nu)(y-y_0)(z-z_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(z-z_0)^2}{r^7} \right\} Z \\
 \tau_{xz}^z &= \frac{3B(1-2\nu)(z-z_0)(x-x_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(z-z_0)^2}{r^7} \right\} Z \\
 \tau_{xy}^z &= \frac{3B(1-2\nu)(x-x_0)(y-y_0)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(z-z_0)^2}{r^7} \right\} Z
 \end{aligned} \tag{A3.6}$$

上記の式において

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \tag{A3.7}$$

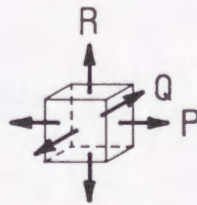
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{A3.8}$$



$$Q = R = \frac{\nu}{1 - \nu} P$$

$$X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (P \cdot \epsilon)$$

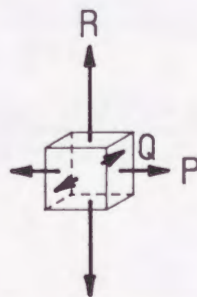
x 方向の集中力対 X



$$R = P = \frac{\nu}{1 - \nu} Q$$

$$Y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (Q \cdot \epsilon)$$

y 方向の集中力対 Y



$$P = Q = \frac{\nu}{1 - \nu} R$$

$$Z = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R \cdot \epsilon)$$

z 方向の集中力対 Z

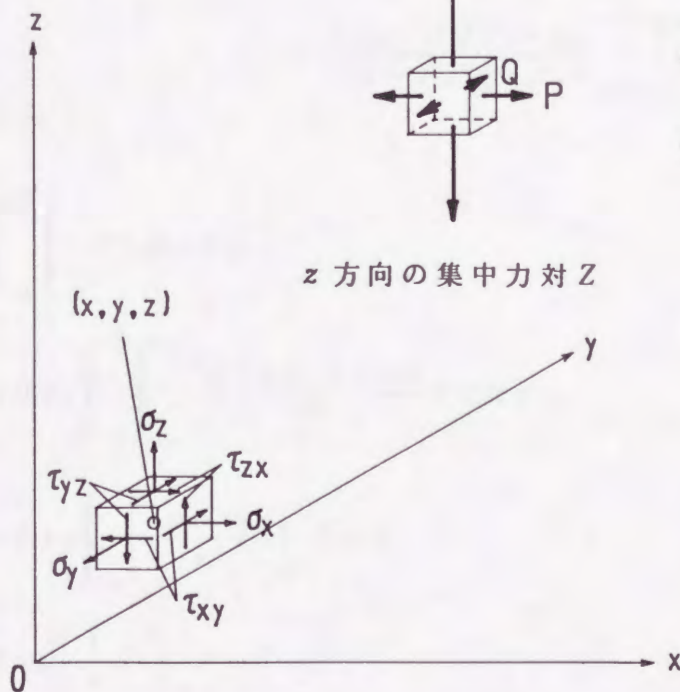


図 A 3 ・ 1 引張りの標準型集中力対による応力

[付録4] 無限体に作用する集中力による矩形区間に作用する合力

無限体中の一点 (x_0, y_0, z_0) に P, Q, R なる集中力 (それぞれ x, y, z 方向とする) が作用する場合の矩形区間 $(a, b, 0), (a, -b, 0), (-a, -b, 0), (-a, b, 0)$ に生じる合力の成分 F_x^P, F_y^Q, F_z^R などは応力の値 [付録1] を積分することによって次のように求められる。また、積分に用いた公式を [付録6] に示す。

$$\begin{aligned}
 F_x^P &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{xx}^P dx dy && (A4.1) \\
 &= B z_0 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5} \right\} P dx dy \\
 &= B z_0 \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} + \frac{(x-x_0)^3}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r^3} \right]_{-a}^a P dy \\
 &= B \left[\left[2(1-\nu) \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{z_0(x-x_0)(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_y^Q &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{yz}^Q dx dy && (A4.2) \\
 &= 3 B z_0 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^5} P dx dy \\
 &= -B z_0 \int_{-b}^b \left[\frac{(y-y_0)}{r^3} \right]_{-a}^a P dy \\
 &= B z_0 \left[\left[\frac{1}{r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_x^P &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x^P dx dy & (A4.3) \\
 &= B \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{r^3} - \frac{3z_0^2(x-x_0)}{r^5} \right\} P dx dy \\
 &= -B \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)}{r} - \frac{z_0^2}{r^3} \right]_{-a}^a P dy \\
 &= -B \left[\left[(1-2\nu) \log\{r+(y-y_0)\} - \frac{z_0^2(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_x^Q &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{ix}^Q dx dy & (A4.4) \\
 &= 3Bz_0 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^5} Q dx dy \\
 &= -Bz_0 \int_{-b}^b \left[\frac{(y-y_0)}{r^3} \right]_{-a}^a Q dy \\
 &= Bz_0 \left[\left[\frac{1}{r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_y^Q &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{iy}^Q dx dy & (A4.5) \\
 &= Bz_0 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} \right\} Q dx dy \\
 &= Bz_0 \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(y-y_0)^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} \right]_{-a}^a Q dy
 \end{aligned}$$

$$= B \left[\left[2(1-\nu) \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} - \frac{z_0(x-x_0)(y-y_0)}{\{(y-y_0)^2 + z_0^2\} r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Q$$

$$F_x^Q = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x^Q dx dy \quad (A4.6)$$

$$= B \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(y-y_0)}{r^3} - \frac{3z_0^2(y-y_0)}{r^5} \right\} Q dx dy$$

$$= -B \int_{-a}^a \left[\frac{(1-2\nu)}{r} - \frac{z_0^2}{r^3} \right]_{-b}^b Q dx$$

$$= -B \left[\left[(1-2\nu) \log\{r+(x-x_0)\} - \frac{z_0^2(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2 + z_0^2\} r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Q$$

$$F_x^R = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{xx}^R dx dy \quad (A4.7)$$

$$= -B \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{r^3} + \frac{3z_0^2(x-x_0)}{r^5} \right\} R dx dy$$

$$= B \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)}{r} + \frac{z_0^2}{r^3} \right]_{-a}^a R dy$$

$$= B \left[\left[(1-2\nu) \log\{r+(y-y_0)\} + \frac{z_0^2(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2 + z_0^2\} r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b R$$

$$F_y^R = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{yy}^R dx dy \quad (A4.8)$$

$$= -B \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(y-y_0)}{r^3} + \frac{3z_0^2(y-y_0)}{r^5} \right\} R dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= B \int_{-a}^a \left[\frac{(1-2\nu)}{r} + \frac{z_0^2}{r^3} \right]_{-b}^b R dx \\
 &= B \left[\left[(1-2\nu) \log\{r+(x-x_0)\} + \frac{z_0^2(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b R
 \end{aligned}$$

$$F_z^R = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_z^R dx dy \quad (A4.9)$$

$$= B z_0 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{3z_0^2}{r^5} \right\} R dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= B z_0 \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3z_0^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} \right]_{-a}^a R dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= B \left[\left[2(1-\nu) \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{z_0(y-y_0)}{(x-x_0)} \left\{ \frac{r}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}} - \frac{z_0^2}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b R
 \end{aligned}$$

ここで,

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (A4.10)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2} \quad (A4.11)$$

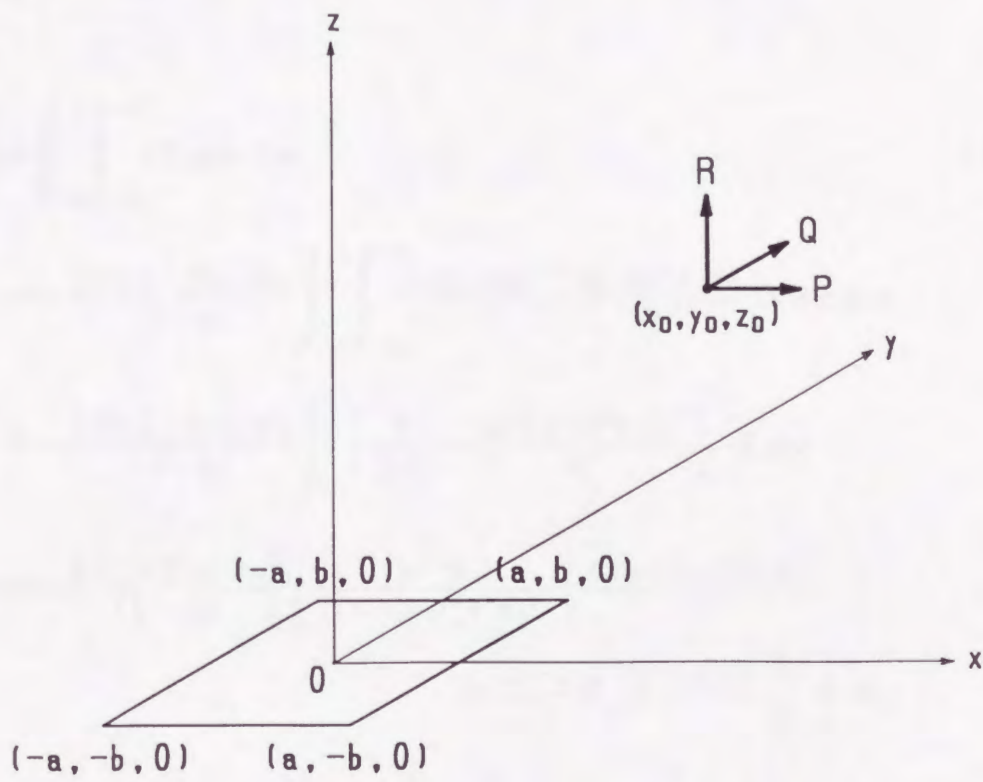


図 A 4 ・ 1 集中力による矩形区間の合力

[付録5] 無限体に作用する引張りの標準型集中力対による矩形区間に作用する合力

無限体中の一点 (x_0, y_0, z_0) に X, Y, Z なる引張りの標準型集中力対 (それぞれ x, y, z 方向とする) が作用する場合の矩形区間 $(a, b, 0), (a, -b, 0), (-a, -b, 0), (-a, b, 0)$ に生じる合力の成分 F_x^X, F_y^Y, F_z^Z などは応力の値 [付録3] を積分することによって次のように求められる。また、積分に用いた公式を [付録6] に示す。

$$\begin{aligned}
 F_x^X &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{xz}^X dx dy && (A5.1) \\
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(x-x_0)}{r^5} - \frac{5(x-x_0)^3}{r^7} \right\} X dx dy \\
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \left[\frac{4}{3r^3} - \frac{(y-y_0)^2+z_0^2}{r^5} \right]_{-a}^a X dy \\
 &= -\frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \left\{ \frac{4(x-x_0)^2+z_0^2}{r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b X
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_y^X &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{yz}^X dx dy && (A5.2) \\
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(y-y_0)}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(x-x_0)^2(y-y_0)}{r^7} \right\} X dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-a}^a \left[\frac{(1-2\nu)}{3r^3} - \frac{(x-x_0)^2}{r^5} \right]_{-b}^b X dx \\
 &= \frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r} - \frac{(x-x_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b X
 \end{aligned}$$

$$F_x^x = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x^x dx dy \tag{A5.3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(y-y_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15z_0^2(x-x_0)^2}{r^7} \right\} X dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \left[\frac{2(1-\nu)(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right. \\
 &\quad - \frac{3(1-2\nu)(y-y_0)^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} + \frac{3z_0^2(x-x_0)}{r^5} \\
 &\quad \left. - \frac{3z_0^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} \right]_{-a}^a X dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left[\left[(x-x_0)(y-y_0) \left\{ \frac{2\nu}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)^2-2z_0^2}{r} + \frac{(y-y_0)^2z_0^2}{r^3} \right\} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b X
 \end{aligned}$$

$$F_x^y = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{yx}^y dx dy \tag{A5.4}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)(x-x_0)}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5(x-x_0)(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y dx dy \\
 &= \frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \left[\frac{(1-2\nu)}{3r^3} - \frac{(y-y_0)^2}{r^5} \right]_{-a}^a Y dy \\
 &= \frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r} - \frac{(y-y_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Y
 \end{aligned}$$

$$F_y^Y = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{y,x}^Y dx dy \quad (A5.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(y-y_0)}{r^5} - \frac{5(y-y_0)^3}{r^7} \right\} Y dx dy \\
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-a}^a \left[\frac{4}{r^3} - \frac{(x-x_0)^2+z_0^2}{r^5} + \right]_{-b}^b Y dx \\
 &= -\frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}} \left\{ \frac{4(y-y_0)^2+z_0^2}{r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Y
 \end{aligned}$$

$$F_x^Y = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x^Y dx dy \quad (A5.6)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r^3} - \frac{3(1-2\nu)(x-x_0)^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15z_0^2(y-y_0)^2}{r^7} \right\} Y dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_{-a}^a \left[\frac{2(1-\nu)(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right. \\
 &\quad - \frac{3(1-2\nu)(x-x_0)^2}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(y-y_0)}{r} - \frac{(y-y_0)^3}{3r^3} \right\} + \frac{3z_0^2(y-y_0)}{r^5} \\
 &\quad \left. - \frac{3z_0^2}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(y-y_0)}{r} - \frac{(y-y_0)^3}{3r^3} \right\} \right]_b^b Y dx \\
 &= -\frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left[\left[(x-x_0)(y-y_0) \left\{ \frac{2\nu}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(y-y_0)^2-2z_0^2}{r} + \frac{(x-x_0)^2z_0^2}{r^3} \right\} \right\} \right]_{-a}^a \right]_b^b Y
 \end{aligned}$$

$$F_x^z = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{xx}^z dx dy \tag{A5.7}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(x-x_0)}{r^5} - \frac{5z_0^2(x-x_0)}{r^7} \right\} Z dx dy \\
 &= \frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{3r^3} - \frac{z_0^2}{r^5} + \right]_{-a}^a Z dy \\
 &= \frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)^2-2z_0^2}{r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{z_0^2(y-y_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_b^b Z
 \end{aligned}$$

$$F_y^z = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \tau_{yy}^z dx dy \tag{A5.8}$$

$$= -\frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(y-y_0)}{r^5} - \frac{5z_0^2(y-y_0)}{r^7} \right\} Z dx dy$$

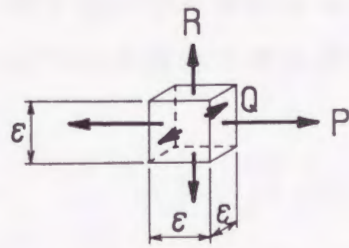
$$\begin{aligned}
 &= \frac{3B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{3r^3} - \frac{z_0^2}{r^5} + \right]_{-a}^a Z dx \\
 &= \frac{B(1-2\nu)z_0}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(y-y_0)^2-2z_0^2}{r} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{z_0^2(x-x_0)^2}{r^3} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Z
 \end{aligned}$$

$$F_z^z = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_z^z dx dy \quad (A5.9)$$

$$\begin{aligned}
 &= B \frac{1}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{6(1-2\nu)z_0^2}{r^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{15\nu z_0^4}{r^7} \right\} Z dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_{-b}^b \left[\frac{(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} - \frac{3z_0^4(x-x_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r^5} \right. \\
 &\quad + \frac{6z_0^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} \\
 &\quad \left. - \frac{12z_0^4}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^3} \left\{ \frac{(x-x_0)}{r} - \frac{(x-x_0)^3}{3r^3} \right\} \right]_{-a}^a Z dy
 \end{aligned}$$

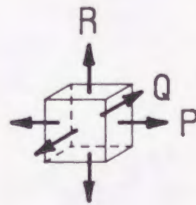
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{B(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left[\left[\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^3} \right. \right. \\
 &\quad \times \left\{ \frac{r}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}} \left\{ 3(x-x_0)^2 - z_0^2 - \frac{2(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z_0^2}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \times \left\{ \frac{2(x-x_0)^4+z_0^4}{r} + \frac{z_0^2(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{r^3} \right\} \right\} \right]_{-a}^a \right]_{-b}^b Z
 \end{aligned}$$



$$Q=R=\frac{\nu}{1-\nu}P$$

$$X=\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(P \cdot \epsilon)$$

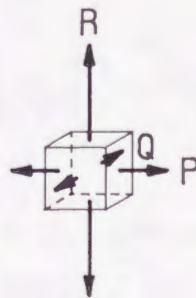
x 方向の集中力対 X



$$R=P=\frac{\nu}{1-\nu}Q$$

$$Y=\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(Q \cdot \epsilon)$$

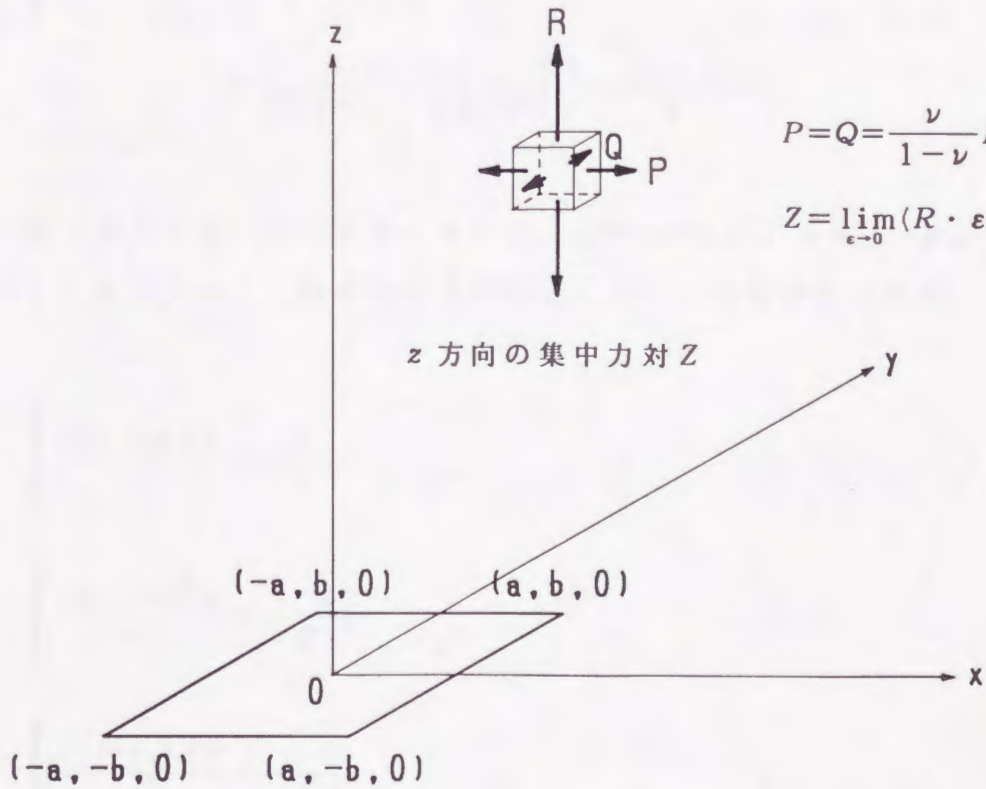
y 方向の集中力対 Y



$$P=Q=\frac{\nu}{1-\nu}R$$

$$Z=\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(R \cdot \epsilon)$$

z 方向の集中力対 Z



A 5・1 引張りの標準型集中力対による矩形区間の合力

〔付録 6〕 積分公式

集中力または引張りの標準型集中力対によって矩形区間に作用する合力を計算するためには、いくつかの積分公式を必要とする。以下に積分計算に用いた積分公式を示す。

$$\int \frac{dx}{r} = \log\{r + (x - x_0)\} \quad (\text{A6} \cdot 1)$$

$$\int \frac{dx}{r^3} = \frac{(x - x_0)}{\{(y - y_0)^2 + z_0^2\} r} \quad (\text{A6} \cdot 2)$$

$$\int \frac{dx}{r^5} = \frac{(x - x_0)}{\{(y - y_0)^2 + z_0^2\}^2} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{(x - x_0)^2}{3 r^3} \right\} \quad (\text{A6} \cdot 3)$$

$$\int \frac{dx}{r^7} = \frac{(x - x_0)}{5 \{(y - y_0)^2 + z_0^2\} r^5} \quad (\text{A6} \cdot 4)$$

$$+ \frac{4(x - x_0)}{5 \{(y - y_0)^2 + z_0^2\}^3} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{(x - x_0)^2}{3 r^3} \right\}$$

式 (A6・1) ~ (A6・4) は、 $X = (x - x_0)$ 、 $c = (y - y_0)^2 + z_0^2$ と置くことによって、数学公式 I⁽⁴⁶⁾ の p. 111 より求められる。

$$\int \frac{(x - x_0) dx}{r^3} = -\frac{1}{r} \quad (\text{A6} \cdot 5)$$

$$\int \frac{(x - x_0) dx}{r^5} = -\frac{1}{3 r^3} \quad (\text{A6} \cdot 6)$$

$$\int \frac{(x - x_0) dx}{r^7} = -\frac{1}{5 r^5} \quad (\text{A6} \cdot 7)$$

式 (A 6・5) ~ (A 6・7) は, $X=(x-x_0)$, $c=(y-y_0)^2+z_0^2$ と置くと, $XdX=rdr$ となり簡単に求められる.

$$\int \frac{(x-x_0)^2 dx}{r^3} = -\frac{(x-x_0)}{r} + \log\{r+(x-x_0)\} \quad (\text{A6}\cdot\text{8})$$

$$\int \frac{(x-x_0)^2 dx}{r^5} = \frac{(x-x_0)^3}{3\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r^3} \quad (\text{A6}\cdot\text{9})$$

$$\int \frac{(x-x_0)^2 dx}{r^7} = -\frac{(x-x_0)}{5r^5} + \frac{(x-x_0)}{5\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{(x-x_0)^2}{3r^3} \right\} \quad (\text{A6}\cdot\text{10})$$

式 (A 6・8) ~ (A 6・10) は, $X=(x-x_0)$, $c=(y-y_0)^2+z_0^2$ と置くことによって, 数学公式 I⁽⁴⁶⁾ の p. 111 より求められる.

$$\int \frac{(x-x_0)^3 dx}{r^5} = -\frac{1}{r} + \frac{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}}{3r^3} \quad (\text{A6}\cdot\text{11})$$

$$\int \frac{(x-x_0)^3 dx}{r^7} = -\frac{1}{3r^3} + \frac{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}}{5r^5} \quad (\text{A6}\cdot\text{12})$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} = \frac{1}{z_0(y-y_0)} \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} \quad (\text{A6}\cdot\text{13})$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r^3} = \frac{1}{z_0(y-y_0)^3} \left[\tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} - \frac{z_0(x-x_0)(y-y_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right] \quad (\text{A6}\cdot\text{14})$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r^5} = \frac{1}{z_0(y-y_0)^5} \left[\tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} \right. \quad (A6 \cdot 15)$$

$$\left. - \frac{2z_0(x-x_0)(y-y_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} + \frac{z_0^3(x-x_0)(y-y_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{3z_0^2 r^3} \right\} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2 r} = \frac{1}{2z_0^2(y-y_0)^3} \left[\frac{\{(y-y_0)^2-z_0^2\}}{z_0} \right. \quad (A6 \cdot 16)$$

$$\left. \times \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} + \frac{(x-x_0)(y-y_0)r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2 r^3} = \frac{1}{2z_0^2(y-y_0)^5} \quad (A6 \cdot 17)$$

$$\times \left[\frac{\{(y-y_0)^2-3z_0^2\}}{z_0} \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} + \frac{(x-x_0)(y-y_0)r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} + \frac{2z_0^2(x-x_0)(y-y_0)}{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}r} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^3 r} = \frac{1}{8z_0^4(y-y_0)^5} \quad (A6 \cdot 18)$$

$$\times \left[\frac{\{3(y-y_0)^4-2z_0^2(y-y_0)^2+3z_0^4\}}{z_0} \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} + \frac{3(x-x_0)(y-y_0)\{(y-y_0)^2-z_0^2\}r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} + \frac{2z_0^2(x-x_0)(y-y_0)^3 r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^3 r^3} = \frac{1}{8z_0^4(y-y_0)^7} \quad (\text{A6}\cdot\text{19})$$

$$\times \left[\frac{3\{(y-y_0)^4-2z_0^2(y-y_0)^2+5z_0^4\}}{z_0} \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} \right. \\ \left. + \frac{3(x-x_0)(y-y_0)\{(y-y_0)^2-3z_0^2\}r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \right. \\ \left. + \frac{2z_0^2(x-x_0)(y-y_0)r^3}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2} - \frac{8z_0^4(x-x_0)(y-y_0)}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}r} \right]$$

$$\int \frac{(x-x_0)^2 dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2 r} = \frac{1}{2(y-y_0)^3} \left[\frac{\{(y-y_0)^2+z_0^2\}}{z_0} \quad (\text{A6}\cdot\text{20}) \right. \\ \left. \times \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} - \frac{(x-x_0)(y-y_0)r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \right]$$

$$\int \frac{(x-x_0)^2 dx}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}^2 r^3} = \frac{1}{2(y-y_0)^5} \left[\frac{\{(y-y_0)^2+3z_0^2\}}{z_0} \quad (\text{A6}\cdot\text{21}) \right. \\ \left. \times \tan^{-1} \left\{ \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{z_0 r} \right\} - \frac{(x-x_0)(y-y_0)r}{\{(x-x_0)^2+z_0^2\}} \right. \\ \left. - \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r} \right]$$

式 (A6・11) ~ (A6・21) は, $X=(x-x_0)$, $c=(y-y_0)^2+z_0^2$ と置き, $\tan\theta = \frac{X}{z_0} \sqrt{\frac{c-z_0^2}{X+c}}$ と置くことによって, 簡単な三角関数の積分となり求められる.

ここで,

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (\text{A6}\cdot\text{22})$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2} \quad (\text{A6}\cdot\text{23})$$

参考文献

第 1 章

- (1)西谷, 日本機械学会誌, 70-580 (1967), 627.
- (2)西谷・村上, 日本機械学会論文集, 40-329 (1974) 31.
- (3)西谷・陳, 日本機械学会論文集, 51-462, A (1985), 571.
- (4)陳, 他 2 名, 日本機械学会論文集, 55-515, A (1989), 1584.
- (5)西谷, 他 3 名, 日本機械学会論文集, 57-542, A (1991), 2561.
- (6)西谷, 日本機曾学会論文集, 29-197 (1963), 79.
- (7)西谷, 日本機曾学会論文集, 29-200 (1963), 765.
- (8)西谷・井ノ口, 日本機曾学会論文集, 33-246 (1967), 176.
- (9)西谷, 日本機曾学会誌, 71-579, (1968), 209.
- (10)Isida, M., Int J. Fract. Mech., 7-3 (1971), 301.
- (11)野田, 他 2 名, 日本機曾学会論文集, 55-520, A (1989), 2521.
- (12)西谷, 日本機曾学会論文集, 41-349 (1975), 2518.
- (13)村上, 日本機曾学会論文集, 43-370 (1977), 2022.
- (14)石田・野口, 日本機曾学会論文集, 49-437, A (1983), 36.
- (15)Erdogan, F., Trans. ASME, Ser. E, 30-2 (1963), 232.
- (16)Mindlin, R. D., Physics, 7, (1936), 195.
- (17)石田, 他 2 名, 日本機曾学会論文集, 50-451 (1974), 330.
- (18)西谷, 他 2 名, 日本機曾学会誌, 56-530, A (1990), 2123.

第 2 章

- (19)Love, A. E. H., Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Cambridge, (1927), 183.
- (20)西谷・陳, 体積力法 (1987), 15, 倍風館.

第 3 章

- (21)長谷川, 日本機曾学会論文集, 43-355 (1976), 716.
- (22)長谷川, 日本機曾学会論文集, 46-407, A (1980), 805.
- (23)Hasegawa, M.; Research Report of the Hiroshima-Denki Institute

of Technology, 13 (1980), 61.

(24)Isida, M., 他 2 名, T., Int J. Fract., 26 (1984), 157.

第 4 章

(25)Underwood, J., ASTM Spec. Tech. Publ., 512 (1972), 59.

(26)Kobayashi, A. S. (Kanazawa, T. and Kobayashi, A. S., ed),
Significance of defects in Welded Structure, (1974), 127,
University of Tokyo Press.

(27)Kobayashi, A. S., 他 3 名, Trans. ASTM, Ser. J, (1977), 83.

(28)Atluri, S. N. and Kathirean, K., Trans. 4th Int. Conf. Struct.
Mech. React. Technol., San Francisco, (1977).

(29)Heliot, J., 他 2 名, ASTM Spec. Tech. Publ., 677 (1979), 341.

(30)McGown, J. J. and Raymund, M., ASTM Spec. Tech. Publ., 677
(1979), 365.

(31)Atluri, S. N. and Kathiresan, K., Nucl. Eng. Des., 51 (1979),
163.

(32)Newman, J. C. and Raju, I. S., Trans. ASTM, Ser. J, 102 (1980),
342.

(33)Raju, I. S. and Newman, J. C., Trans. ASTM, Ser. J, 104 (1982),
293.

第 5 章

(34)木内, 他 2 名, 鉄と鋼, 68-13 (1982), 1830.

(35)西谷・陳, 日本機学会論文集, 50-453, A (1984), 1077.

(36)白鳥, 他 3 名, 日本機学会論文集, 53-488, A (1987), 799.

第 6 章

(37)Benthem, J. P. and Koiter, W. T., Mechanics of Fracture, I
(1973), 131, Noordhoff Internatinal Publishing Leyden.

(38)Irwin, G. R., Trans. ASME, Ser. E, 29 (1962), 651.

(39)Isida, M. and Noguchi, H., Eng. Fract. Mech., 20-3 (1984), 387.

(40)渋谷, 日本機学会論文集, 42-364 (1976), 3718.

第7章

(41)Mendiratta, M. G. and Petrovic, J. J., J. American Ceramics Soc., 61-5,6 (1978), 226.

(42)西谷・森, 日本機学会論文集, 52-474, A (1986), 539.

(43)白鳥, 他2名, 日本機学会論文集, 52-474, A (1986), 390.

(44)Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., NASA TP-1578, (1979).

(45)Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., Engng. Frac. Mech., 15-1,2 (1981), 185.

[付録]

(46)森口, 他2名, 数学公式I, (1987), 岩波書店.



Inches

Centimetres

KODAK Color Control Patches

© The Tiffen Company, 2000

Kodak

LICENSED PRODUCT

3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

