特異積分方程式による平板回折格子の数値解析に関する研究

松島, 章

https://doi.org/10.11501/3075565

出版情報：九州大学, 1993, 博士（工学）, 論文博士

4.8 まとめ

本章では，誘電体スラブを装荷した平行 2 面の無限平板格子による平面電磁波の散乱問題に対して，未知関数が結合した形の連立特異積分方程式を導いた．この方程式に対して，第 2 章のモーメント法による数値解析の表現式を拡張した．数値計算は電力保存則に関する誤差が 0.01 % 以下という条件のもとで行い，次の成果を得た．

1. 数値解の収束性を検討することにより，本方法は 2 面の格子に対して，格子面間の距離にかかわらず適用可能であることを示した．また他の解析法による結果との比較により，誘電体が存在する場合にも本方法が有効であることを述べ，更に他の文献(15)(17)に含まれている数値結果の誤りを指摘した．

2. 格子および誘電体スラブの構造パラメータを最適化することにより，例えば，周期・設計波長比が 0.1，平板導体面の法線から測った入射角が 45°，許容損失が 0.025 dB という条件のもとで，有効周波数帯域 $0 < f/f_0 < 1.298$ (f_0: 設計周波数) を達成した．この結果は，同一の設定条件 (誘電体スラブ定数，周期・設計波長比，入射角) のもとで他の文献(11)で報告された最良の帯域に比べて，低周波側に 2 倍以上，高周波側に 1.5 倍程度改善されたものである．

3. 平行 2 面格子の偏波弁別特性が各種構造パラメータにどのように依存するかを，詳細な数値計算を行うことにより調べた．その性質を総合的に吟味しながら，弁別素子の系統的な設計アルゴリズムを構築した．これに従って，実際に例として 4/6 GHz 帯において素子を設計し，この周波数帯の全域で損失 1 % 以下を達成できることを示した．このことにより，本アルゴリズムの有効性が実証された．

第 5 章

結論

本研究は，電磁波伝送路における平板回折格子の有効な利用を可能にするために，誘電体スラブを装荷した平板格子による電磁波散乱問題の特異積分方程式を用いた数値解析法を展開すると共に，この構造を応用した偏波弁別素子・導波モード励振素子の設計法について検討したものである．本研究によって得られた結果を，解法理論の面，導波素子への応用面に分けて要約すれば，以下のとおりになる．

5.1 解法理論に関する結果

第 2 章の前半では，基本問題として真空中に置いた滑らかなストリップ導体群による平面電磁波の散乱問題を取り上げ，特異積分方程式法による一般的な解法理論を展開した．この手法は次の 2 つの手順からなる．

1. 境界値問題を，散乱体上に流れる表面電流密度を未知関数とする第 1 種フレドホルム型特異積分方程式に帰着させること．

2. モーメント法を適用して，未知関数の展開係数に関する連立 1 次方程式を導くこと．

この特異積分方程式法は次のような特長をもつため，数値処理における近似の効率がよく，解の安定性と信頼性も高い．

1. 核関数を単に特異部分と有界部分とに分解するだけでなく，更に後者を対数的部分と代数的部分とに分解し，多項式近似の対象を十分滑らかな代数的部分のみに限定した．

2. 未知関数を有限項の多項式で近似する際に，導体の端点近傍での電流密度の振舞いを正確に表現するような荷重関数を導入した．

3. 解くべき連立1次方程式は数値的スキームの確立した第2種の形式をもつ．

続いて第2章の後半では，上述の解析内容を有限枚・無限枚の周期的平板回折格子に対する表現に帰着させた．更に具体的な物理量に関して数値計算を行い，次の結果を得た．

1. 有限格子に対して全散乱断面積を，無限格子に対して格子モードの電力をそれぞれ数値計算し，解の収束性を調べた．その結果，未知関数の展開項数を平板幅・波長比の5倍以上にとれば，厳密解との相対誤差が 0.1 % 以下，電力保存則に関する誤差が 0.01 % 以下となることが判明した．

2. 有限格子に関して，遠方界を他の手法による結果と，近傍界を測定結果とそれぞれ比較することにより，本方法が散乱体の遠方・近傍の両方において正確な結果を与えることを示した．

3. 無限格子に関して，相対収束の現象が発生しないことを示した．

以上の事項は，特異積分方程式法が他の数値解法に比べて，精度，効率，信頼性の面で極めて優れたものであることを実証している．

5.2 導波素子への応用に関する結果

第3章では，誘電体スラブ上の有限平板格子に平面電磁波が入射したときの導波モードの励振問題を数値解析し，その特性を調べた．その結果，励振効率が極大値をとるときの平板導体の配列周期はブラッグ条件から予測される値とは若干ずれること，並びに平板枚数が最適値を越えると励振効率はかえって低下することを数値的に確認した．また，格子および誘電体スラブの構造パラメータを最適化することにより，最低次の偶対称モードの励振効率は偏波の別にかかわらず 30~40 % となることが判明した．

第4章では，誘電体スラブを装荷した平行2面の無限平板格子による平面電磁波の散乱問題に対する数値計算結果を示した．格子および誘電体スラブの構造パラメータを最適化することにより，例えば，周期・設計波長比が 0.1，平板導体面の法線から測った入射角が 45°，許容損失が 0.025 dB という条件のもとで，有効周波数帯域 $0 < f/f_0 < 1.298$ (f_0: 設計周波数) を達成した．この結果は，同一の設定条件 (誘電体スラブ定数，周期・設計波長比，入射角) のもとで他の文献[11]で報告された最良の帯域に比べて，低周波側に2倍以上，高周波側に1.5倍程度改善されたものである．

更に第3章，第4章では詳細な数値計算を行い，偏波弁別素子，導波モード励振素子の諸特性が，格子と誘電体スラブの構造にどのように依存するかを調べた．その性質を総合的に吟味しながら，素子の系統的な設計アルゴリズムを構築した．このアルゴリズムはすべての構造パラメータを考慮に入れたものであり，しかもパラメータを1個ずつ同定していく方式であるため，各導波素子の精密な設計がすみやかに実行できる．このことを実証するために，例として，周波数 30 GHz における最低次の奇対称導波モードの励振素子，並びに 4/6 GHz 帯における偏波弁別素子を実際に設計した．

5.3 今後の展望

本論文で展開・適用してきた特異積分方程式法は，導体ストリップによる電磁波散乱問題に対する有効な解法のひとつであり，今後も更に理論面，応用面での拡張が期待される．これらについて言及しておこう．

理論的な側面からは，リーマン・ヒルベルト境界値問題の方法[13]および Hayashi の関数論的方法[47]を検討し，これらと特異積分方程式法の数学的構造を明確に対応付けすることに興味がもたれる．以上の 3 つの方法は最終的な連立 1 次方程式の形から判断すれば，「解析的正則化の方法」として統一的な構造をもつが，見かけ上の解析処理過程が多くの点で異なっている．他の 2 つの方法における数学的構造が詳細に解明されていることを考えると，上述のような対応付けができれば特異積分方程式法にとって極めて有益なものとなる．すなわちこれにより，数値解の収束性および誤差評価に関する関数解析的な考察が容易になると思われる．

有限平板格子の応用的な側面からみると，本論文では結合形態に関して一例を扱ったにすぎない．応用上は，ビーム波入射，導波モード入射に対するビーム放射，複数個の導波モード間の結合など，他の形態に関する特性のデータを蓄積していくことが必要となる．また，平板幅や周期が一様でない格子を用いることにより，結合効率を向上させる試みも興味深い．

最後に無限平板格子に関しては，本論文で仮定した格子形状および入射波は理想的なものであったが，より精密な設計を目指すためには実際の条件に近づけて解析することが望ましい．すなわち，完全導体や誘電体に損失を導入したとき，ストリップが局面上に配置されたとき，入射波が指向性をもつビーム波のときなどの一般的な状況のもとでの偏波弁別特性の把握が重要となる．

謝 辞

本研究をまとめるにあたり，終始懇切な御指導と御高配を賜った九州大学工学部工学部安元清俊教授に厚く感謝の意を表します．

また，九州大学工学部立居場光生教授，山藤馨教授，渡辺征夫教授には有益な御助言，御教示を頂いたことを深く感謝致します．

本研究を進めるに当たって，その開始から完成まで終始御指導頂きました熊本大学工学部板倉徳也教授に深謝致します．

また，熊本大学工学部生野浩正教授，奥野洋一助教授には研究の各段階において種々の御討論，御助言を頂きました．福岡工業大学内田一徳教授，野田武昭講師には無限平板格子に関して貴重なプログラムおよびデータを提供して頂きました．更に，第 2 章の散乱実験においては熊本大学渡邊一徳技官に大変御世話になりました．ここに厚く御礼申し上げます．

参 考 文 献

(1) Lord Rayleigh, “On the passage of waves through apertures in plane screens and allied problems”, *Phil. Mag.*, **43**, pp. 259–272 (1897).

(2) H. Lamb, “On the reflection and transmission of electric waves by a metallic grating”, *Proc. London Math. Soc.*, **29**, pp. 523–544 (1898).

(3) G. L. Baldwin and A. E. Heins, “On the diffraction of a plane wave by an infinite plane grating”, *Math Scand.*, **2**, pp. 103–118 (1954).

(4) E. Lüneburg and K. Westphahl, “Diffraction of plane waves by an infinite strip grating”, *Ann. Phys.*, **27**, 3, pp. 257–288 (1971).

(5) N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, Chap. 5, McGraw-Hill, New York (1951).

(6) 板倉徳也, “平板状無限格子による電磁波回折の Single Anomaly について”, 信学論(B), **51-B**, 7, pp. 293–300 (1968-07).

(7) V. I. Kalinichev and Y. V. Kuranov, “Surface wave diffraction by a finite metal grating and numerical model for design of leaky-wave antennas”, *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, **1**, 10, pp.282–284 (Oct. 1991).

(8) A. S. Andrenko and A. I. Nosich, “H-scattering of thin-film modes from periodic gratings of finite extent”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **5**, 7, pp. 333–337 (June 1992).

(9) A. R. Neureuther and K. Zaki, “Numerical solutions of electromagnetic boundary value problems by means of asymptotic anticipation method”, *Radio Science*, **3**, 12, pp. 1158–1167 (Dec. 1968).

(10) 日向 隆, 細野敏夫, “均一媒質中の平面格子による電磁波の散乱について — Point Matching 法の基礎づけと数値解析 —”, 信学論(B), **J59-B**, 12, pp. 571–578 (1976-12).

(11) M. Murota, M. Ando, and N. Goto, “Design of a low-loss grating on a dielectric sheet”, *Trans. IECE Japan*, **E69**, 4, pp. 321–322 (April 1986).

(12) 近藤 彰, 鹿子嶋憲一, “低損失偏波弁別グリッド板の設計と特性”, 信学論(B), **71-B**, 12, pp. 1640–1647 (1988-12).

(13) Z. S. Agranovich, V. A. Marchenko, and V. P. Shestopalov, “The diffraction of electromagnetic waves from plane metallic lattices”, *Soviet Phys.-Tech. Phys.*, **7**, 4, pp. 277–286 ロシア語からの英訳版, (Oct. 1962).

(14) O. A. Tret’yakov and V. P. Shestopalov, “The diffraction of electromagnetic waves by a plane double metallic grating”, *Soviet Phys.-Tech. Phys.*, **8**, 10, ロシア語からの英訳版, pp. 918–925 (April 1964).

(15) V. P. Shestopalov, L. N. Litvinenko, S. A. Masalov, and V. G. Sologub, *Difraktsiia Voln na Reshetkakh* (書名和訳: 格子による波の回折), Izdatel'stvo Khar'kovskogo Universiteta, Khar'kov, 原著ロシア語 (1973).

(16) 中田康則, 小柴正則, "任意の入射面と偏波をもつ平面波の格子による散乱特性の有限要素法解析", 信学論 (C-I), **J72-C-I**, 11, pp. 731–739 (1989-11).

(17) C. G. Christodoulou, D. P. Kwan, R. Middleveen, and P. F. Wahid, "Scattering from stacked gratings and dielectrics for various angles of wave incidence", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-36**, 10, pp. 1435–1442 (Oct. 1988).

(18) M. Guglielmi and A. A. Oliner, "Multimode network description of a planar periodic metal-strip grating at a dielectric interface — part I: rigorous network formulations", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-37**, 3, pp. 534–541 (Mar. 1989).

(19) K. Uchida, T. Noda, and T. Matsunaga, "Electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating in case of oblique incidence and arbitrary polarization", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-36**, 3, pp. 415–422 (March 1988).

(20) 野田武昭, 内田一徳, 松永利明, "誘電体板付き平面格子による斜入射平面電磁波の散乱", 信学論 (B), **J71-B**, 2, pp. 263–270 (1988-02).

(21) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Frequency and polarization selectivities by a multi-periodic planar grating on a dielectric slab", *Trans. IEICE*, **E72**, 3, pp. 170–173 (March 1989).

(22) 内田一徳, 野田武昭, 松永利明, "三層誘電体板装荷平面格子による平面電磁波の散乱", 信学論 (B), **J70-B**, 3, pp. 375–384 (1987-03).

(23) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Scattering of electromagnetic plane wave by infinite double gratings on a dielectric slab with oblique incidence and arbitrary polarization", *Trans. IEICE*, **E73**, 7, pp. 1198–1206 (July 1990).

(24) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Scattering of electromagnetic wave by double grating loaded with three layered dielectric slabs", *IEICE Trans. Electron.*, **E74**, 10, pp. 3342–3351 (Oct. 1991).

(25) T. Itoh and R. Mittra, "Wood anomalies in diffraction from strip grating", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-18**, 1, pp. 54–55 (Jan. 1970).

(26) J. H. Richmond, "On the edge mode in the theory of TM scattering by a strip or strip grating", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-28**, 6, pp. 883–887 (Nov. 1980).

(27) M. Ando and M. Murota, "Reflection and transmission coefficients of a thin strip grating on a dielectric sheet", *Trans. IECE Japan*, **E69**, 11, pp. 1189–1198 (Nov. 1986).

(28) W. A. Walker C. M. Butler, "A method for computing scattering by large arrays of narrow strips", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-32**, 12, pp. 1327–1334 (Dec. 1984).

(29) A. Matsushima and T. Itakura, "Singular integral equation approach to electromagnetic scattering from a finite periodic array of conducting strips", *J. Electro. Waves Applic.*, **5**, 6, pp. 545–562 (1991).

(30) A. Matsushima and T. Itakura, "Singular integral equation approach to plane wave diffraction by an infinite strip grating at oblique incidence", *J. Electro. Waves Applic.*, **4**, 6, pp. 505–519 (1990).

(31) A. Matsushima and T. Itakura, "Scattering of a plane electromagnetic wave by a finite periodic array of conducting strips on a dielectric slab", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kumamoto University*, **37**, 2, pp. 215–230 (Nov. 1992).

(32) A. Matsushima and T. Itakura, "Excitation of guided modes of a slab waveguide using a finite strip grating", *Trans. IEE Japan*, **113-A**, 3, pp. 205–210 (March 1993).

(33) A. Matsushima and T. Itakura, "Polarization diplexing by a double strip grating loaded with a pair of dielectric slabs", *IEICE Trans. Electron.*, **E76-C**, 3, pp. 486–495 (March 1993).

(34) A. Matsushima and T. Itakura, "Polarization discriminating characteristics of a double strip grating loaded with a dielectric slab", *IEICE Trans. Electron.*, **E75-C**, 9, pp. 1071–1079 (Sept. 1992).

(35) A. Matsushima and T. Itakura, "Electromagnetic scattering from cascaded strip gratings", *Trans. IEICE*, **E73**, 6, pp. 952–958 (June. 1990).

(36) K. L. Klohn, R. E. Horn, H. Jacobs, and E. Freibergs, "Silicon waveguide frequency scanning linear array antenna", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-26**, 10, pp. 764–773 (Oct. 1978).

(37) M. R. Seiler and B. M. Mathena, "Millimeter-wave beam steering using diffraction electronics", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-32**, 9, pp. 987–990 (Sept. 1984).

(38) T. S. Chu, M. J. Gans, and W. E. Legg, "Quasi-optical polarization diplexing of microwaves," *Bell Syst. Tech. J.*, **54**, 10, pp. 1665–1680 (Dec. 1975).

(39) D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Chap. 4, Academic Press, New York (1974).

(40) 西原 浩, 春名正光, 栖原敏明, "光集積回路(改訂増補版)", 第4章, オーム社 (1993).

(41) R. B. Kieburtz and A. Ishimaru, "Scattering by a periodically apertured conducting screen", *IRE Trans. Antennas Propagat.*, **9**, 6, pp. 506–514 (Nov. 1961).

(42) C. C. Chen, "Transmission through a conducting screen perforated periodically with apertures", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-18**, 9, pp. 627–632 (Sept. 1970).

(43) T. Carleman, "Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen", *Math. Z.*, **15**, pp. 111–120, 原著ドイツ語 (1922).

(44) F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Chap. 4, Interscience, New York (1957).

(45) N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations, translated by J. R. M. Radok*, Noordhoff, Groningen, ロシア語からの英訳版 (1958).

(46) L. Lewin, "On the resolution of a class of waveguide discontinuity problems by the use of singular integral equations", *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-9**, 4, pp. 321–332 (July 1961).

(47) Y. Hayashi, "A singular integral equation approach to electromagnetic fields for circular boundaries with slots", *Appl. Sci. Res.* (*Sec. B*), **12**, pp. 331–359 (1965).

(48) Y. Hayashi, "The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary", *J. Math. Anal. Appl.*, **44**, 2, pp. 489–530 (Nov. 1973).

(49) F. Erdogan, G. D. Gupta, and T. S. Cook, "Numerical solution of singular integral equations", in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Vol. 1*, Chap. 7, G. C. Sih (ed.), Noordhoff, Leyden (1973).

(50) A. Frenkel, "External modes of two-dimensional thin scatterers", *IEE Proc. Pt. H*, **130**, 3, pp. 209–214 (April 1983).

(51) B. B. Panasi͡uk, M. P. Savruk, and Z. T. Nazarchuk, *Metod Singuli͡arnikh Integral'nikh Uravnenii v Dvumernikh Zadachakh Difraktsii* (書名和訳: 2次元回折問題に対する特異積分方程式の方法), Naukova Dumka, Kiev, 原著ロシア語 (1984).

(52) P. M. Morse and P. J. Rubenstein, "The diffraction of waves by ribbons and by slits", *Phys. Rev.*, **54**, pp. 895–898 (Dec. 1938).

(53) S. Skavlem, "On the diffraction of scalar plane waves by a slit of infinite length", *Arch. Math. Naturv.*, **B-51**, pp. 61–80 (1951).

(54) J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, Revised Pringing*, Chap. 4, Hemisphere, New York (1987).

(55) 青木和男, 田中達夫, "2枚の平行導体板による平面波の回折", 信学論 (B), **J60-B**, 11, pp. 836–842 (1977-11).

(56) M. Shimoda and T. Itakura, "Scattering by parallel plates", *Radio Science*, **22**, 6, pp. 987–991 (Nov.-Dec. 1987).

(57) A. W. Glisson and D. R. Wilton, "Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-28**, 5, pp. 593–603 (Sept. 1980).

(58) K. A. Michalski and C. M. Butler, "Determination of current induced on a conducting strip embedded in a dielectric slab", *Radio Science*, **18**, 6, pp. 1195–1206 (Nov.-Dec. 1983).

(59) C. M. Butler, "Current induced on a conducting strip which resides on the planar interface between two semi-infinite half-spaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-32**, 3, pp. 226–231 (March 1984).

(60) C. M. Butler, "General solutions of the narrow strip (and slot) integral equations", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-33**, 10, pp. 1085–1090 (Oct. 1985).

(61) 西本昌彦, 青木和男, "任意の方向を向いた2枚の平行導体ストリップによる平面電磁波の散乱", 信学論 (B), **J69-B**, 10, pp. 1131–1139 (1986-10).

(62) W. S. Park and S. R. Seshadri, "Theory of the grating coupler for a grounded-dielectric-slab waveguide", *IEE Proc. Pt. H*, **132**, 3, pp. 149–156 (June 1985).

(63) M. Tomita, "Thin-film waveguide with a periodic groove structure of finite extent", *J. Opt. Soc. Amer. A*, **6**, 9, pp. 1455–1464 (Sept. 1989).

(64) K. Uchida, "Numerical analysis of surface-wave scattering by finite periodic notches in ground plane", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-35**, 5, pp. 481–486 (May 1987).

(65) A. Matsushima and T. Itakura, "Numerical solution of singular integral equations for electromagnetic scattering by a set of perfectly conducting strips with two-dimensional geometry", *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kumamoto University*, **37**, 1, pp. 47–59 (March 1992).

(66) R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, Chap. 5, McGraw-Hill, New York (1961).

(67) J. Meixner, "The behavior of electromagnetic fields at edges", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-20**, 4, pp. 442–446 (July 1972).

(68) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, London (1902).

(69) C. T. H. Baker, *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Oxford University Press (1977).

(70) L. M. Delves and J. L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press (1985).

(71) D. S. Jones, "On the scattering cross section of an obstacle", *Philosophical Magazine.*, **46**, pp. 957–960 (1955).

(72) R. V. Row, "Microwave diffraction measurement in a parallel-plate region", *J. Appl. Phys.*, **24**, 12, pp. 1448–1452 (Dec. 1953).

(73) P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I*, McGraw-Hill, New York (1953).

(74) I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik (大槻義彦訳), "数学大公式集", 丸善, ロシア語からの和訳版 (1983).

(75) R. Mittra, T. Itoh, and T.-S. Li, "Analytical and numerical studies of the relative convergence phenomenon arising in the solution of an integral equation by the moment method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-20**, 2, pp. 96–104 (Feb. 1972).

(76) P. G. Petropoulos and G. A. Kriegsmann, "Optical theorems for electromagnetic scattering by inhomogeneities in layered dielectric media", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-39**, 8, pp. 1119–1124 (Aug. 1991).

(77) A. Hessel and A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings", *Appl. Opt.*, **4**, 10, pp. 1275–1297 (Oct. 1965).

(78) T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials*, Wiley-Interscience, New York (1990).

(79) G. A. Otteni, "Plane wave reflection from a rectangular-mesh ground screen", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-21**, 6, pp. 843–851 (Nov. 1973).

(80) D. A. Hill and J. R. Wait, "Electromagnetic scattering of an arbitrary plane wave by two nonintersecting perpendicular wire grids", *Can. J. Phys.*, **52**, pp. 227–237 (1974).

(81) A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York (1967).

付録 A

チェビシェフ多項式の性質

本文中での参照の便宜のために，チェビシェフ多項式の種々の性質をまとめておく(78).

(1) 定義

$$\left.\begin{aligned} &T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \\ &\qquad (n = 0, 1, \cdots):\ \text{第 1 種} \\ &U_{n-1}(\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \\ &\qquad (n = 1, 2, \cdots):\ \text{第 2 種} \end{aligned}\right\} \tag{A.1}$$

(2) 表示　第 1 種:

$$\left\{\begin{aligned} &T_0(t) = 1 \\ &T_1(t) = t \\ &T_2(t) = 2t^2 - 1 \\ &T_3(t) = 4t^3 - 3t \\ &T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ &T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t \\ &\quad\vdots \\ &T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t):\ \text{漸化式} \end{aligned}\right. \tag{A.2}$$

第 2 種:

$$\begin{cases} U_0(t) = 1 \\ U_1(t) = 2t \\ U_2(t) = 4t^2 - 1 \\ U_3(t) = 8t^3 - 4t \\ U_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1 \\ U_5(t) = 32t^5 - 32t^3 + 6t \\ \quad\vdots \\ U_n(t) = 2tU_{n-1}(t) - U_{n-2}(t):\ \text{漸化式} \end{cases} \tag{A.3}$$

第 1 種，第 2 種間の関係:

$$\begin{cases} T_n(t) = U_n(t) - tU_{n-1}(t) \\ (1-t^2)U_{n-1}(t) = tT_n(t) - T_{n+1}(t) \end{cases} \tag{A.4}$$

(3) 直交性

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\delta_{mn}}{2-\delta_{m0}} \tag{A.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} U_{m-1}(t)U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\delta_{mn}}{2} \tag{A.6}$$

但し δ_{mn} はクロネッカのデルタである．

(4) 微分演算

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = nU_{n-1}(t), \qquad \frac{d}{dt}[U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}] = -\frac{nT_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \tag{A.7}$$

(5) 積分演算

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\log|s-t|}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \tilde{\lambda}_n T_n(s) \tag{A.8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{(t-s)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ U_{n-1}(s) & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{A.9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-s}\,dt = -T_n(s) \tag{A.10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\mathrm{e}^{jst}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = j^n J_n(s) \tag{A.11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} U_{n-1}(t)\mathrm{e}^{jst}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{j^{n-1}n}{s}J_n(s) \tag{A.12}$$

但し j は虚数単位，$J_n(\cdot)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数であり，更に次の記号を用いている．

$$\tilde{\lambda}_n = \begin{cases} -\log 2 & (n=0) \\ -1/n & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{A.13}$$

(6) 内挿多項式　滑らかな関数 $f(t)$ $(-1<t<1)$ は次の内挿多項式のいずれによっても近似される．使用の際には都合のよい方を選ぶ．

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} f_n^{(1)} T_n(t), \qquad f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} f_n^{(2)} U_{n-1}(t) \tag{A.14}$$

但し係数は次式から求められる．

$$f_n^{(1)} = \frac{2-\delta_{n0}}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} f(t_i^{(1)})T_n(t_i^{(1)}) \tag{A.15}$$

$$f_n^{(2)} = \frac{2}{N+1}\sum_{i=1}^{N} [1-(t_i^{(2)})^2]\, f(t_i^{(2)})U_{n-1}(t_i^{(2)}) \tag{A.16}$$

ここでの内挿点は次のとおりである．

$$t_i^{(1)} = \cos\frac{(i-1/2)\pi}{N+1}, \qquad t_i^{(2)} = \cos\frac{i\pi}{N+1} \tag{A.17}$$

もし関数 $f(t)$ が多項式であれば，式 (A.14) の表現はそれぞれ t^N, t^{N-1} のオーダまで正確に近似する．

(7) 積和公式　次のように 2 個の多項式の積を多項式の線形結合で表現することを考えよう．

$$\begin{cases} T_m(t)T_n(t) = \sum_{k=0}^{2N} v_{mnk}^{(1)} T_k(t) \\ U_{m-1}(t)U_{n-1}(t)(1-t^2) = \sum_{k=0}^{2N} v_{mnk}^{(2)} T_k(t) \\ U_{m-1}(t)T_n(t) = \sum_{k=1}^{2N} v_{mnk}^{(3)} U_{k-1}(t) \end{cases} \tag{A.18}$$

上の総和記号内の展開係数は，式 (A.1) および三角関数系の直交性を用いて次のように求められる．

$$\begin{cases} v_{mnk}^{(1)} = \frac{1}{2}(\delta_{(m+n)k} + \delta_{|m-n|k}) \\ v_{mnk}^{(2)} = \frac{1}{2}(\delta_{|m-n|k} - \delta_{(m+n)k}) \\ v_{mnk}^{(3)} = \frac{1}{2}(\delta_{(m+n)k} + \mathrm{sgn}(m-n)\delta_{|m-n|k}) \end{cases} \tag{A.19}$$

付録 B

無限平板格子に対する通常の積分方程式法

第 2.5 節で展開した特異積分方程式 (SIE) 法の精度・効率を調べる際の比較の対象として，通常の積分方程式 (CIE) の数値解析法[(25),(26)]を示しておこう．出発点となる式 (2.84) を次に再記しておく．

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{zl}\, e^{j2l(t-s)\Delta} F_z(t)\, dt &= -\xi_z - \xi_{z0} \\ \int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{yl}\, e^{j2l(t-s)\Delta} F_y(t)\, dt &= \frac{j\pi}{\Delta}\xi_y - \xi_{y0} \end{aligned}\right\} \quad (-1 < s < 1) \tag{B.1}$$

式 (2.90)，(2.91) で定義される記号 C_u，F_{ul} を用いれば，式 (B.1) は

$$C_u \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{ul} F_{ul}\, e^{-j2ls\Delta} = -\xi_u - C_u\xi_{u0} \quad (-1 < s < 1;\ u = z, y) \tag{B.2}$$

と変形される．これに式 (2.82)，(2.94) を代入し，第 2 章と同じ試験関数を用いれば，連立 1 次方程式

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \eta_{zmn} f_{zn} &= -\xi_z\delta_{m0} \quad (m = 0, 1, \cdots, N) \\ \sum_{n=0}^{N} \eta_{ymn} f_{yn} &= -\xi_y\delta_{m1} \quad (m = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned}\right\} \tag{B.3}$$

が得られる．但し左辺の係数 $\{\eta_{umn}\}$ は，式 (2.99) と類似した形で

$$\eta_{umn} = \begin{pmatrix} \pi\delta_{m0}\delta_{n0} \\ j\Delta\delta_{m1}\delta_{n0} \\ j\Delta^2\delta_{m1}\delta_{n1} \end{pmatrix} \zeta_{u0} + j^{n-m} \sum_{\substack{l=-L \\ l\neq 0}}^{L} \begin{pmatrix} \pi(2-\delta_{m0}) \\ -m/l \\ -m/l \end{pmatrix} \zeta_{ul} J_m(2l\Delta) J_n(2l\Delta)$$

$$(\text{上から}\ u=z;\ u=y,\,\phi_0\neq 0;\ u=y,\,\phi_0=0) \tag{B.4}$$

となる．但し ζ_{u0} は式 (2.100), (2.101) で定義したものと同じである．また式 (2.102) の場合と同様に，連立 1 次方程式 (B.3) の下側の組には式 (2.105) を付加して解かなければならない．

以上のように，この CIE 法は SIE 法に比べてかなり簡便なものであるが，2.5.3 項の数値計算では CIE 法がしばしば誤った解を導くことを示している．

付録 C

誘電体スラブによる平面波の反射と透過

図 3.1，図 4.1 の構造において，導体平板を取り去ったときの反射・透過平面波の振幅係数を示しておこう．まず図 4.1(c) のような 2 枚の対称スラブでは，式 (4.7) の振幅係数は

$$\begin{pmatrix} \rho_z^{(q)} \\ \rho_y^{(q)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left\{ \boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{c}} - (-1)^q \boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{s}} \right\} \begin{pmatrix} \iota_z \\ \iota_y \end{pmatrix} \qquad (q=1,2) \tag{C.1}$$

と表される．但し $\overline{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{R}$ の複素共役を表し，行列 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{c,s}}$ は

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\mathrm{c}} &= \boldsymbol{R}(c_0,\, s_0,\, c_1,\, s_1) + \boldsymbol{R}(c_0,\, s_0,\, s_1,\, -c_1) \\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{s}} &= \boldsymbol{R}(s_0,\, -c_0,\, c_1,\, s_1) + \boldsymbol{R}(s_0,\, -c_0,\, s_1,\, -c_1) \end{aligned}\right\} \tag{C.2}$$

で定義される．ここに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(x_0,\, y_0,\, x_1,\, y_1) &= (\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}x_0x_1 - \alpha_{10}y_0y_1)^{-1}(\alpha_{10}x_0x_1 - \alpha_{00}y_0y_1)^{-1} \\ &\quad \times \left[x_0x_1 \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}(\alpha_{10}x_1 + j\tilde{\alpha}_{00}y_1) & j\tilde{\epsilon}_0 y_1 \\ j\tilde{\epsilon}_0 y_1 & \alpha_{10}(\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}x_1 + j\tilde{\alpha}_{10}y_1) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + y_0y_1 \begin{pmatrix} -\alpha_{10}(\tilde{\alpha}_{10}x_1 + j\alpha_{00}y_1) & \tilde{\epsilon}_0 x_1 \\ \tilde{\epsilon}_0 x_1 & -\alpha_{00}(\epsilon_{\mathrm{r}}\tilde{\alpha}_{00}x_1 + j\alpha_{10}y_1) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$c_0 + js_0 = \mathrm{e}^{j\alpha_{00}(h/2-h_{\mathrm{d}})}, \qquad c_1 + js_1 = \mathrm{e}^{j\alpha_{10}h_{\mathrm{d}}/2} \tag{C.4}$$

$$\tilde{\alpha}_{00} = \frac{k_0^2 - \beta_0^2 - \gamma^2/\epsilon_{\mathrm{r}}}{\alpha_{00}}, \quad \tilde{\alpha}_{10} = \frac{k_1^2 - \beta_0^2 - \epsilon_{\mathrm{r}}\gamma^2}{\alpha_{10}}, \quad \tilde{\epsilon}_0 = \beta_0\gamma(\epsilon_{\mathrm{r}} - 1) \tag{C.5}$$

(c_ν, s_ν は実数) である．定数 $\alpha_{\nu 0}$ は式 (4.9) で定義した．

次に図 4.1(b) のような 1 枚のスラブでは，上の結果に極限操作 $h_{\mathrm{d}} \to h/2$ を施すことにより

$$\begin{pmatrix} \rho_z^{(q)} \\ \rho_y^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{q1} - \alpha_{10}[v_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} s - (-1)^q v_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} c] & \chi^{(q)} \\ \chi^{(q)} & \delta_{q1} - j\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}[v_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} s + (-1)^q v_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_z \\ \iota_y \end{pmatrix} \quad (q = 1, 2) \tag{C.6}$$

と表せる．但し

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \\ v_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} \\ \tilde{u}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \\ v_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \\ \tilde{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

$$\begin{pmatrix} u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} & u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \\ u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} & u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} \\ \tilde{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} & \tilde{u}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \\ \tilde{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} & \tilde{u}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & -j\alpha_{00} \\ \alpha_{10} & -j\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00} \\ \alpha_{10} & -j\tilde{\alpha}_{00} \\ \tilde{\alpha}_{10} & -j\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & c \\ c & -s \end{pmatrix} \tag{C.8}$$

$$c + js = \mathrm{e}^{j\alpha_{10}h/2}, \qquad \chi^{(q)} = \tilde{\epsilon}_0 cs \left[\frac{1}{u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}}} - \frac{(-1)^q}{u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}}} \right] \tag{C.9}$$

(c, s は実数) である．図 4.1(a) のようにスラブが消失したときには，式 (C.7) に極限操作 $\epsilon_{\mathrm{r}} \to 1$ を施した表示

$$\begin{pmatrix} u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} & u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}} \\ u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} & u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j & 1 \\ -j & 1 \end{pmatrix} \alpha_{00} \mathrm{e}^{j\alpha_{00}h} \tag{C.10}$$

を用いれば，係数の式 (C.6) は次の単純な表示に帰着する．

$$\rho_z^{(1)} = \rho_y^{(1)} = 0, \qquad \rho_z^{(2)} = \iota_z, \qquad \rho_y^{(2)} = \iota_y \tag{C.11}$$

最後に第 3 章での参照の便宜上，$\theta_0 = 90^\circ$ なる 2 次元問題における式 (C.6) の表示を掲げておこう．

$$\rho_z^{(1)} = \frac{(\alpha_{00}^2 - \alpha_{10}^2)cs}{u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}}} \iota_z, \qquad \rho_z^{(2)} = \frac{\alpha_{00}\alpha_{10}}{j u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{e}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{e}}} \iota_z \tag{C.12}$$

$$\rho_y^{(1)} = \frac{(\alpha_{10}^2 - \epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}^2)cs}{u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}}} \iota_y, \qquad \rho_y^{(2)} = \frac{\epsilon_{\mathrm{r}}\alpha_{00}\alpha_{10}}{j u_{\mathrm{c}}^{\mathrm{h}} u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{h}}} \iota_y \tag{C.13}$$

但しこの場合には $\alpha_{00} = k_0 \cos\phi_0$，$\alpha_{10} = k_0\sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}} - \sin^2\phi_0}$，$\iota_z = 1$，$\iota_y = \sec\phi_0$ である．

付録 D

層状構造に関するヘルツポテンシャル

すべての媒質境界面が x 軸に垂直な平面であるような層状構造をなす空間を考えよう．その中で境界条件が満足されるためには，電磁界の x 依存性はすべての成分において $\exp(j\alpha x)$ の形をとらなければならない．但し，α は x 方向の波数である．このとき電磁界は，電気形 ($\boldsymbol{\Pi}$)，磁気形 ($\boldsymbol{\Pi}^*$) のヘルツポテンシャルより適当に選んだ 2 つのスカラ成分から誘導される．特に平面状格子や平面アンテナを解析する際には，次の 2 つの方法のいずれかがしばしば用いられる．なお，定数 ϵ，μ，k $(= \omega\sqrt{\epsilon\mu})$ はそれぞれ考察している媒質の誘電率，透磁率，波数とする．

1. 両方のヘルツポテンシャルが境界面に垂直であると仮定し，$\boldsymbol{\Pi} = \hat{x}\Pi_x$，$\boldsymbol{\Pi}^* = \hat{x}\Pi_x^*$ と表せば，電磁界が
$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi} - j\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{\Pi}^* \\ \boldsymbol{H} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}^* + k^2\boldsymbol{\Pi}^* + j\omega\epsilon\nabla \times \boldsymbol{\Pi} \end{cases} \tag{D.1}$$
から導かれる[79]．この選び方は任意の偏波を TE 波 ($E_x = 0$) と TM 波 ($H_x = 0$) に分解するときに便利である．なぜなら電磁界の x 成分 E_x，H_x はそれぞれ Π_x，Π_x^* のみを用いて表現されるからである．□

2. 電気形ヘルツポテンシャルが境界面に平行であると仮定し，$\boldsymbol{\Pi} = \hat{y}\Pi_y + \hat{z}\Pi_z$ と表せば，電磁界が
$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi} \\ \boldsymbol{H} = j\omega\epsilon\nabla \times \boldsymbol{\Pi} \end{cases} \tag{D.2}$$

から導かれる[80]．この場合には磁気形のポテンシャルは不要である．この選び方は任意の偏波を E 波 ($E_z = 0$) と H 波 ($H_z = 0$) に分解するときに便利である．なぜなら電界成分 E_z，磁界成分 H_z はそれぞれ Π_z，Π_y のみを用いて表現されるからである．ゆえに本論文ではこちらの方を採用した．□

もちろん他の選択法，例えば $\boldsymbol{\Pi} = \hat{x}\Pi_x + \hat{z}\Pi_z$ なども可能である[81]．

関係式

$$(\nabla^2 + k^2)\Pi^{(*)} = 0, \quad \partial/\partial x = j\alpha \tag{D.3}$$

を考慮しながら，式 (D.1)，(D.2) の各成分を比較すれば，次の条件のもとに上記の 2 つの選択法が等価であることが示される．

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{j\alpha}{k^2-\alpha^2}\left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right) \\ \Pi_x^* &= \frac{j\omega\epsilon}{k^2-\alpha^2}\left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}\right) \end{aligned}\right. \tag{D.4}$$

本論文の回折格子の問題においては，媒質定数，波数，伝搬定数は，考察している媒質，モード次数に応じて ϵ_0，$\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{r}}$，$\mu_0$，$k_0$，$k_1$，$\pm\alpha_{0l}$，$\pm\alpha_{1l}$ などに置き換えなければならない．

付録 E

積分で定義された核関数の評価法

式 (3.19)，(3.28) 中の無限積分を効率よく評価する方法を示そう．積分変数が $|\beta| \to \infty$ なるときの被積分関数の振舞い

$$\left\{\begin{aligned} & W(0,\beta) \sim \frac{j2}{\alpha_1+\alpha_0} && (\text{E 波}) \\ & \left.\frac{\partial W(x,\beta)}{\partial x}\right|_{x=0} \sim \frac{2}{\epsilon_{\mathrm{r}}+1} + \frac{k_1^2(\epsilon_{\mathrm{r}}-1)}{(\epsilon_{\mathrm{r}}+1)^2\alpha_0^2} && (\text{H 波}) \end{aligned}\right. \tag{E.1}$$

を考慮して，式 (3.31) に示したように核関数を

$$\mathcal{D}_u K_u^{(pq)}(s,t) = K_{u0}^{(pq)}(s,t) + K_{u1}^{(pq)}(s,t) \qquad \left(\begin{aligned} \mathcal{D}_z &= 1 \\ \mathcal{D}_y &= \partial/\partial t \end{aligned}\right) \tag{E.2}$$

と分解する．関数 $K_{u0}^{(pq)}(s,t)$ は被積分関数に式 (E.1) を代入した主要項，$K_{u1}^{(pq)}(s,t)$ はそれに対する補正項である．前者は簡略化した表示 $y_{pq} = (p-q)D + w(s-t)$ を用いて

$$K_{z0}^{(pq)}(s,t) = j\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha_1+\alpha_0)^{-1}\mathrm{e}^{-j\beta y_{pq}}\,d\beta \tag{E.3}$$

$$K_{y0}^{(pq)}(s,t) = \frac{jw^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha_0 + \frac{k_1^2(\epsilon_{\mathrm{r}}-1)}{2(\epsilon_{\mathrm{r}}+1)\alpha_0}\right]\mathrm{e}^{-j\beta y_{pq}}\,d\beta \tag{E.4}$$

と書かれる．これは解析的に評価することができ，結果は次式となる[59]．

$$K_{z0}^{(pq)}(s,t) = \frac{j\pi}{k_0|y_{pq}|(1-\epsilon_{\mathrm{r}})}\left[H_1^{(2)}(k_0|y_{pq}|) - \sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}}}H_1^{(2)}(k_1|y_{pq}|)\right] \tag{E.5}$$

$$K_{y0}^{(pq)}(s,t) = \frac{j\pi k_0^2 w^2}{2}\left[\frac{H_1^{(2)}(k_0|y_{pq}|)}{k_0|y_{pq}|} + \frac{\epsilon_{\mathrm{r}}(\epsilon_{\mathrm{r}}-1)}{2(\epsilon_{\mathrm{r}}+1)}H_0^{(2)}(k_0|y_{pq}|)\right] \tag{E.6}$$

他方で補正項 $K_{u1}^{(pq)}(s,t)$ は，その被積分関数が偶関数であるため半無限積分

$$K_{u1}^{(pq)}(s,t) = \int_0^\infty L_u^{(pq)}(\beta)\,d\beta \qquad (u=z,y) \tag{E.7}$$

に変形される．ここに新しい被積分関数は

$$L_z^{(pq)}(\beta) = \left(W(0,\beta) - \frac{j2}{\alpha_1+\alpha_0}\right)\cos(\beta y_{pq}) \tag{E.8}$$

$$L_y^{(pq)}(\beta) = jw^2\left[\alpha_0\left(\frac{\epsilon_\mathrm{r}+1}{2}\left.\frac{\partial W(x,\beta)}{\partial x}\right|_{x=0} - 1\right) - \frac{k_1^2(\epsilon_\mathrm{r}-1)}{2(\epsilon_\mathrm{r}+1)\alpha_0}\right]\cos(\beta y_{pq}) \tag{E.9}$$

で与えられる．これらは $\beta\to\infty$ のとき式 (3.19)，(3.28) に含まれる本来の被積分関数より速く減少する．

式 (E.7) の半無限積分路を次のように分割しよう．

$$K_{u1}^{(pq)}(s,t) = \sum_{i=0}^{2} I_i \tag{E.10}$$

但し

$$\left\{\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{k_0} L_u^{(pq)}(\beta)\,d\beta \\ I_1 &= \int_{k_0}^{k_1} L_u^{(pq)}(\beta)\,d\beta \\ I_2 &= \int_{k_1}^{\infty} L_u^{(pq)}(\beta)\,d\beta \end{aligned}\right. \tag{E.11}$$

である．変数変換 $\beta = k_0\sin\xi$，$\beta = \sqrt{k_1^2+(\xi/h)^2}$ をそれぞれ積分 I_0，I_2 に導入すれば

$$I_0 = k_0\int_0^{\pi/2} L_u^{(pq)}(k_0\sin\xi)\cos\xi\,d\xi \tag{E.12}$$

$$I_2 = h^{-1}\int_0^\infty L_u^{(pq)}(\sqrt{k_1^2+(\xi/h)^2})\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{(k_1h)^2+\xi^2}} \tag{E.13}$$

の形を得る．数値計算の際には，式 (E.8)，(E.9) の代わりに次の等価な表現を用いると便利である．

$$L_z^{(pq)}(\beta) = \frac{j4\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_0)^2(\mathrm{e}^{j2\alpha_1h}/\rho_z(\beta) - \rho_z(\beta))}\cos(\beta y_{pq}) \tag{E.14}$$

$$L_y^{(pq)}(\beta) = j\epsilon_\mathrm{r}\alpha_0w^2\left[-\frac{2(\epsilon_\mathrm{r}+1)\alpha_0\alpha_1}{(\alpha_1+\epsilon_\mathrm{r}\alpha_0)^2(\mathrm{e}^{j2\alpha_1h}/\rho_y(\beta)-\rho_y(\beta))} + \frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_1+\epsilon_\mathrm{r}\alpha_0} - \frac{k_0^2(\epsilon_\mathrm{r}-1)}{2(\epsilon_\mathrm{r}+1)\alpha_0^2}\right]\cos(\beta y_{pq}) \tag{E.15}$$

但し

$$\rho_z(\beta) = \frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha_1+\alpha_0}, \qquad \rho_y(\beta) = \frac{\alpha_1-\epsilon_\mathrm{r}\alpha_0}{\alpha_1+\epsilon_\mathrm{r}\alpha_0} \tag{E.16}$$

積分 I_0 では変数変換により，端点 $\beta=k_0$ ($\xi=\pi/2$) での α_0，α_0^{-1} に起因する特異性が打ち消されている．また，半無限積分 I_2 における被積分関数は $\xi\to\infty$ のとき，E 波に対して $O(\mathrm{e}^{-2\xi})$ で，H 波に対して $O(\xi^{-3})$ でそれぞれ振る舞うため，有限区間で打ち切ることにする．こうしてこれらの積分 I_0，I_2 には通常の数値積分公式が適用できる．但しその際の区間の分割数は，$\cos(\beta y_{pq})$ の存在による被積分関数の振動の程度を考慮して適切に選ばなければならない．

以上とは異なり，積分 I_1 の評価には特別の処理を要する．これは図 3.2 に示すように，被積分関数が積分路内に $Q_\mathrm{r}(\beta_{\mathrm{r}\mu})=0$ ($\mathrm{r}=\mathrm{c},\mathrm{s}$; $\mu=1,2,\cdots,M_\mathrm{r}$) で決定される有限個の極をもつためである．そこで式 (E.8)，(E.9) を次のように分解する．

$$L_u^{(pq)}(\beta) = \sum_{i=0}^{2} L_{ui}^{(pq)}(\beta) \qquad (u=z,y) \tag{E.17}$$

但し

$$L_{u0}^{(pq)}(\beta) = \sum_{\mathrm{r}=\mathrm{c,s}}\sum_{\mu=1}^{M_\mathrm{r}}\frac{\mathrm{Res}[L_u^{(pq)}(\beta),\beta_{\mathrm{r}\mu}]}{\beta-\beta_{\mathrm{r}\mu}} \qquad (u=z,y) \tag{E.18}$$

$$\left.\begin{aligned} L_{z1}^{(pq)}(\beta) &= \left(W(0,\beta)-\frac{j2}{\alpha_1+\alpha_0}\right)\cos(\beta y_{pq}) - L_{z0}^{(pq)}(\beta) \\ L_{y1}^{(pq)}(\beta) &= j\alpha_0w^2\left(\frac{\epsilon_\mathrm{r}+1}{2}\left.\frac{\partial W(x,\beta)}{\partial x}\right|_{x=0}-1\right)\cos(\beta y_{pq}) - L_{y0}^{(pq)}(\beta) \end{aligned}\right\} \tag{E.19}$$

$$\left.\begin{aligned} L_{z2}^{(pq)}(\beta) &= 0 \\ L_{y2}^{(pq)}(\beta) &= \frac{k_1^2 w^2(\epsilon_r - 1)}{j2(\epsilon_r + 1)\alpha_0}\cos(\beta y_{pq}) \end{aligned}\right\} \tag{E.20}$$

式 (E.18) 中の特異項を β に関して k_0 から k_1 まで積分するために，積分路の一部を極を中心とする小半円に変形する．解析的に積分したのち，その半径を零とする．以上の結果

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{u0}^{(pq)}(\beta)\,d\beta = \sum_{r=c,s}\sum_{\mu=1}^{M_r} \mathrm{Res}[L_u^{(pq)}(\beta), \beta_{r\mu}]\left(\log\frac{k_1 - \beta_{r\mu}}{\beta_{r\mu} - k_0} - j\pi\right) \tag{E.21}$$

を得る．また式 (E.19) に対しては，被積分関数の特異性が打ち消されているので，変数変換 $\beta = \xi/h$ により

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{u1}^{(pq)}(\beta)\,d\beta = h^{-1}\int_{k_0 h}^{k_1 h} L_{u1}^{(pq)}(\xi/h)\,d\xi \qquad (u = z, y) \tag{E.22}$$

と変形したのち数値積分を行う．最後に式 (E.20) では，被積分関数が端点 $\beta = k_0$ $(\xi = 0)$ において α_0^{-1} に起因する特異性をもつ．しかし変数変換 $\beta = k_0 \cosh\xi$ を施して

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{y2}^{(pq)}(\beta)\,d\beta = k_0\int_0^{\cosh^{-1}\sqrt{\epsilon_r}} L_{y2}^{(pq)}(k_0\cosh\xi)\sinh\xi\,d\xi \tag{E.23}$$

と変形すれば，端点での特異性が打ち消されて数値積分が可能になる．