九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

### 特異積分方程式による平板回折格子の数値解析に関 する研究

松島,章

https://doi.org/10.11501/3075565

出版情報:九州大学, 1993, 博士(工学), 論文博士 バージョン: 権利関係:

### 第4章 平行2面の無限平板格子の偏波弁別特性

4.8 まとめ

本章では、誘電体スラブを装荷した平行2面の無限平板格子による平面 電磁波の散乱問題に対して、未知関数が結合した形の連立特異積分方程式 を導いた.この方程式に対して、第2章のモーメント法による数値解析の 表現式を拡張した.数値計算は電力保存則に関する誤差が 0.01 % 以下と いう条件のもとで行い、次の成果を得た.

- 1. 数値解の収束性を検討することにより、本方法は2面の格子に対して、 格子面間の距離にかかわらず適用可能であることを示した. また他の 解析法による結果との比較により,誘電体が存在する場合にも本方法 が有効であることを述べ、更に他の文献(15)(17)に含まれている数値結 果の誤りを指摘した.
- 2. 格子および誘電体スラブの構造パラメータを最適化することにより、 例えば、周期・設計波長比が 0.1、平板導体面の法線から測った入射 角が 45°, 許容損失が 0.025 dB という条件のもとで, 有効周波数帯 域  $0 < f/f_0 < 1.298$  ( $f_0$ : 設計周波数)を達成した. この結果は、同一 の設定条件(誘電体スラブ定数,周期・設計波長比,入射角)のもとで 他の文献<sup>(11)</sup>で報告された最良の帯域に比べて、低周波側に2倍以上、 高周波側に 1.5 倍程度改善されたものである.
- 3. 平行2面格子の偏波弁別特性が各種構造パラメータにどのように依存 するかを、詳細な数値計算を行うことにより調べた. その性質を総 合的に吟味しながら, 弁別素子の系統的な設計アルゴリズムを構築し た.これに従って、実際に例として 4/6 GHz 帯において素子を設計 し、この周波数帯の全域で損失1%以下を達成できることを示した. このことにより、本アルゴリズムの有効性が実証された.

## 第5章

# 結論

本研究は、電磁波伝送路における平板回折格子の有効な利用を可能にす るために、誘電体スラブを装荷した平板格子による電磁波散乱問題の特異 積分方程式を用いた数値解析法を展開すると共に、この構造を応用した偏 波弁別素子・導波モード励振素子の設計法について検討したものである. 本研究によって得られた結果を、解法理論の面、導波素子への応用面に分 けて要約すれば、以下のとおりになる.

### 5.1 解法理論に関する結果

第2章の前半では、基本問題として真空中に置いた滑らかなストリップ 導体群による平面電磁波の散乱問題を取り上げ、特異積分方程式法による 一般的な解法理論を展開した.この手法は次の2つの手順からなる.

- 種フレドホルム型特異積分方程式に帰着させること.
- 式を導くこと.

この特異積分方程式法は次のような特長をもつため、数値処理における近 似の効率がよく、解の安定性と信頼性も高い.

122

1. 境界値問題を、散乱体上に流れる表面電流密度を未知関数とする第1

2. モーメント法を適用して、未知関数の展開係数に関する連立1次方程

- 1. 核関数を単に特異部分と有界部分とに分解するだけでなく、更に後者 を対数的部分と代数的部分とに分解し,多項式近似の対象を十分滑ら かな代数的部分のみに限定した.
- 2. 未知関数を有限項の多項式で近似する際に、導体の端点近傍での電流 密度の振舞いを正確に表現するような荷重関数を導入した.
- 3. 解くべき連立1次方程式は数値的スキームの確立した第2種の形式を もつ、

続いて第2章の後半では、上述の解析内容を有限枚・無限枚の周期的平 板回折格子に対する表現に帰着させた.更に具体的な物理量に関して数値 計算を行い,次の結果を得た.

- 1. 有限格子に対して全散乱断面積を、無限格子に対して格子モードの電 力をそれぞれ数値計算し、解の収束性を調べた.その結果、未知関数 の展開項数を平板幅・波長比の5倍以上にとれば、厳密解との相対誤 差が 0.1 % 以下, 電力保存則に関する誤差が 0.01 % 以下となること が判明した.
- 2. 有限格子に関して、遠方界を他の手法による結果と、近傍界を測定結 果とそれぞれ比較することにより、本方法が散乱体の遠方・近傍の両 方において正確な結果を与えることを示した.

3. 無限格子に関して、相対収束の現象が発生しないことを示した.

以上の事項は、特異積分方程式法が他の数値解法に比べて、精度、効率、 信頼性の面で極めて優れたものであることを実証している.

5.2 導波素子への応用に関する結果

第3章では、誘電体スラブ上の有限平板格子に平面電磁波が入射した ドの励振効率は偏波の別にかかわらず 30~40 % となることが判明した. 第4章では、誘電体スラブを装荷した平行2面の無限平板格子による 更に第3章、第4章では詳細な数値計算を行い、偏波弁別素子、導波

ときの導波モードの励振問題を数値解析し、その特性を調べた.その結果、 励振効率が極大値をとるときの平板導体の配列周期はブラッグ条件から予 測される値とは若干ずれること、並びに平板枚数が最適値を越えると励振 効率はかえって低下することを数値的に確認した.また、格子および誘電 体スラブの構造パラメータを最適化することにより、最低次の偶対称モー 平面電磁波の散乱問題に対する数値計算結果を示した. 格子および誘電体 スラブの構造パラメータを最適化することにより、例えば、周期・設計波 長比が 0.1, 平板導体面の法線から測った入射角が 45°, 許容損失が 0.025 dB という条件のもとで、有効周波数帯域  $0 < f/f_0 < 1.298$  ( $f_0$ : 設計周波 数)を達成した.この結果は、同一の設定条件(誘電体スラブ定数、周期・ 設計波長比,入射角)のもとで他の文献<sup>(11)</sup>で報告された最良の帯域に比べ て、低周波側に2倍以上、高周波側に1.5倍程度改善されたものである. モード励振素子の諸特性が、格子と誘電体スラブの構造にどのように依存 するかを調べた.その性質を総合的に吟味しながら、素子の系統的な設計 アルゴリズムを構築した.このアルゴリズムはすべての構造パラメータを 考慮に入れたものであり、しかもパラメータを1個ずつ同定していく方式 であるため、各導波素子の精密な設計がすみやかに実行できる. このこと を実証するために、例として、周波数 30 GHz における最低次の奇対称導 波モードの励振素子,並びに 4/6 GHz 帯における偏波弁別素子を実際に

設計した.

124

### 5.2 導波素子への応用に関する結果

第5章 結論

### 5.3 今後の展望

本論文で展開・適用してきた特異積分方程式法は、導体ストリップによ る電磁波散乱問題に対する有効な解法のひとつであり、今後も更に理論面、 応用面での拡張が期待される.これらについて言及しておこう.

理論的な側面からは、リーマン・ヒルベルト境界値問題の方法<sup>(13)</sup> およ び Hayashi の関数論的方法<sup>(47)</sup>を検討し、これらと特異積分方程式法の数学 的構造を明確に対応付けすることに興味がもたれる.以上の3つの方法は 最終的な連立1次方程式の形から判断すれば、「解析的正則化の方法」と して統一的な構造をもつが、見かけ上の解析処理過程が多くの点で異なっ ている.他の2つの方法における数学的構造が詳細に解明されていること を考えると、上述のような対応付けができれば特異積分方程式法にとって 極めて有益なものとなる.すなわちこれにより、数値解の収束性および誤 差評価に関する関数解析的な考察が容易になると思われる.

有限平板格子の応用的な側面からみると、本論文では結合形態に関して 一例を扱ったにすぎない.応用上は、ビーム波入射、導波モード入射に対 するビーム放射、複数個の導波モード間の結合など、他の形態に関する特 性のデータを蓄積していくことが必要となる.また、平板幅や周期が一様 でない格子を用いることにより、結合効率を向上させる試みも興味深い.

最後に無限平板格子に関しては、本論文で仮定した格子形状および入射 波は理想的なものであったが、より精密な設計を目指すためには実際の条 件に近づけて解析することが望ましい.すなわち、完全導体や誘電体に損 失を導入したとき、ストリップが局面上に配置されたとき、入射波が指向 性をもつビーム波のときなどの一般的な状況のもとでの偏波弁別特性の把 握が重要となる. 本研究をまとめるにあたり,終始懇切な御指導と御高配を賜った九州大 学工学部工学部安元清俊教授に厚く感謝の意を表します. また,九州大学工学部立居場光生教授,山藤馨教授,渡辺征夫教授には 有益な御助言,御教示を頂いたことを深く感謝致します. 本研究を進めるに当たって,その開始から完成まで終始御指導頂きまし た熊本大学工学部板倉徳也教授に深謝致します. また,熊本大学工学部生野浩正教授,奥野洋一助教授には研究の各段階 において種々の御討論,御助言を頂きました.福岡工業大学内田一徳教授, 野田武昭講師には無限平板格子に関して貴重なプログラムおよびデータを 提供して頂きました.更に,第2章の散乱実験においては熊本大学渡邊一 徳技官に大変御世話になりました.ここに厚く御礼申し上げます.

126

### 謝 辞

- and allied problems", Phil. Mag., 43, pp. 259-272 (1897).
- grating", Proc. London Math. Soc., 29, pp. 523-544 (1898).
- infinite plane grating", Math Scand., 2, pp. 103-118 (1954).
- (4)grating", Ann. Phys., 27, 3, pp. 257-288 (1971).
- (5)
- (6)いて",信学論(B), 51-B, 7, pp. 293-300 (1968-07).
- (7)
- (June 1992).
- Science, 3, 12, pp. 1158-1167 (Dec. 1968).
- 12, pp. 571-578 (1976-12).
- sheet", Trans. IECE Japan, E69, 4, pp. 321-322 (April 1986).
- 学論(B), 71-B, 12, pp. 1640-1647 (1988-12).
- 7, 4, pp. 277-286 ロシア語からの英訳版, (Oct. 1962).
- ロシア語からの英訳版, pp. 918-925 (April 1964).

#### 文 献 考

(1) Lord Rayleigh, "On the passage of waves through apertures in plane screens

(2) H. Lamb, "On the reflection and transmission of electric waves by a metallic

(3) G. L. Baldwin and A. E. Heins, "On the diffraction of a plane wave by an

E. Lüneburg and K. Westphahl, "Diffraction of plane waves by an infinite strip

N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, Chap. 5, McGraw-Hill, New York (1951).

板倉徳也, "平板状無限格子による電磁波回折の Single Anomaly につ

V. I. Kalinichev and Y. V. Kuranov, "Surface wave diffraction by a finite metal grating and numerical model for design of leaky-wave antennas", IEEE Microwave Guided Wave Lett., 1, 10, pp.282-284 (Oct. 1991).

(8) A. S. Andrenko and A. I. Nosich, "H-scattering of thin-film modes from periodic gratings of finite extent", Microwave Opt. Technol. Lett., 5, 7, pp. 333-337

(9) A. R. Neureuther and K. Zaki, "Numerical solutions of electromagnetic boundary value problems by means of asymptotic anticipation method", Radio

(10) 日向隆,細野敏夫,"均一媒質中の平面格子による電磁波の散乱につ いて-Point Matching法の基礎づけと数値解析-",信学論(B), J59-B,

(11) M. Murota, M. Ando, and N. Goto, "Design of a low-loss grating on a dielectric

(12) 近藤 彰, 鹿子嶋憲一, "低損失偏波弁別グリッド板の設計と特性", 信

(13) Z. S. Agranovich, V. A. Marchenko, and V. P. Shestopalov, "The diffraction of electromagnetic waves from plane metallic lattices", Soviet Phys.-Tech. Phys.,

(14) O. A. Tret'yakov and V. P. Shestopalov, "The diffraction of electromagnetic waves by a plane double metallic grating", Soviet Phys.-Tech. Phys., 8, 10,

- (15) V. P. Shestopalov, L. N. Litvinenko, S. A. Masalov, and V. G. Sologub, Difraktsiia Voln na Reshetkakh (書名和訳: 格子による波の回折), Izdatel'stvo Khar'kovskogo Universiteta, Khar'kov, 原著ロシア語 (1973).
- (16) 中田康則,小柴正則,"任意の入射面と偏波をもつ平面波の格子によ る散乱特性の有限要素法解析",信学論(C-I), J72-C-I, 11, pp. 731-739 (1989-11).
- (17) C. G. Christodoulou, D. P. Kwan, R. Middleveen, and P. F. Wahid, "Scattering from stacked gratings and dielectrics for various angles of wave incidence", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-36, 10, pp. 1435-1442 (Oct. 1988).
- (18) M. Guglielmi and A. A. Oliner, "Multimode network description of a planar periodic metal-strip grating at a dielectric interface — part I: rigorous network formulations", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-37, 3, pp. 534-541 (Mar. 1989).
- (19) K. Uchida, T. Noda, and T. Matsunaga, "Electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating in case of oblique incidence and arbitrary polarization", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-36, 3, pp. 415-422 (March 1988).
- (20) 野田武昭, 内田一徳, 松永利明, "誘電体板付き平面格子による斜入射 平面電磁波の散乱",信学論(B), J71-B, 2, pp. 263-270 (1988-02).
- (21) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Frequency and polarization selectivities by a multi-periodic planar grating on a dielectric slab", Trans. IEICE, E72, 3, pp. 170-173 (March 1989)
- (22) 内田一徳,野田武昭,松永利明,"三層誘電体板装荷平面格子による平 面電磁波の散乱",信学論(B), J70-B, 3, pp. 375-384 (1987-03).
- (23) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Scattering of electromagnetic plane wave by infinite double gratings on a dielectric slab with oblique incidence and arbitrary polarization", Trans. IEICE, E73, 7, pp. 1198-1206 (July 1990).
- (24) T. Noda, K. Uchida, and T. Matsunaga, "Scattering of electromagnetic wave by double grating loaded with three layered dielectric slabs", IEICE Trans. Electron., E74, 10, pp. 3342-3351 (Oct. 1991).
- (25) T. Itoh and R. Mittra, "Wood anomalies in diffraction from strip grating", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-18, 1, pp. 54-55 (Jan. 1970).
- (26) J. H. Richmond, "On the edge mode in the theory of TM scattering by a strip or strip grating", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-28, 6, pp. 883-887 (Nov. 1980).

参考文献

- 1198 (Nov. 1986).
- pp. 1327-1334 (Dec. 1984).
- Electro. Waves Applic., 5, 6, pp. 545-562 (1991).
- Waves Applic., 4, 6, pp. 505-519 (1990).
- 1992).
- (March 1993).
- pp. 486-495 (March 1993).
- E75-C, 9, pp. 1071-1079 (Sept. 1992).
- Tech., MTT-26, 10, pp. 764-773 (Oct. 1978).
- (Sept. 1984).
- Press, New York (1974).

(27) M. Ando and M. Murota, "Reflection and transmission coefficients of a thin strip grating on a dielectric sheet", Trans. IECE Japan, E69, 11, pp. 1189-

(28) W. A. Walker C. M. Butler, "A method for computing scattering by large arrays of narrow strips", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-32, 12,

(29) A. Matsushima and T. Itakura, "Singular integral equation approach to electromagnetic scattering from a finite periodic array of conducting strips", J.

(30) A. Matsushima and T. Itakura, "Singular integral equation approach to plane wave diffraction by an infinite strip grating at oblique incidence", J. Electro.

(31) A. Matsushima and T. Itakura, "Scattering of a plane electromagnetic wave by a finite periodic array of conducting strips on a dielectric slab", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kumamoto University, 37, 2, pp. 215-230 (Nov.

(32) A. Matsushima and T. Itakura, "Excitation of guided modes of a slab waveguide using a finite strip grating", Trans. IEE Japan, 113-A, 3, pp. 205-210

(33) A. Matsushima and T. Itakura, "Polarization diplexing by a double strip grating loaded with a pair of dielectric slabs", IEICE Trans. Electron., E76-C, 3,

(34) A. Matsushima and T. Itakura, "Polarization discriminating characteristics of a double strip grating loaded with a dielectric slab", IEICE Trans. Electron.,

(35) A. Matsushima and T. Itakura, "Electromagnetic scattering from cascaded strip gratings", Trans. IEICE, E73, 6, pp. 952-958 (June. 1990).

(36) K. L. Klohn, R. E. Horn, H. Jacobs, and E. Freibergs, "Silicon waveguide frequency scanning linear array antenna", IEEE Trans. Microwave Theory

(37) M. R. Seiler and B. M. Mathena, "Millimeter-wave beam steering using diffraction electronics", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-32, 9, pp. 987-990

(38) T. S. Chu, M. J. Gans, and W. E. Legg, "Quasi-optical polarization diplexing of microwaves," Bell Syst. Tech. J., 54, 10, pp. 1665-1680 (Dec. 1975).

(39) D. Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides, Chap. 4, Academic

- (40) 西原浩,春名正光,栖原敏明,"光集積回路(改訂増補版)",第4章,オー ム社 (1993).
- (41) R. B. Kieburtz and A. Ishimaru, "Scattering by a periodically apertured conducting screen", IRE Trans. Antennas Propagat., 9, 6, pp. 506-514 (Nov. 1961).
- (42) C. C. Chen, "Transmission through a conducting screen perforated periodically with apertures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-18, 9, pp. 627-632 (Sept. 1970).
- (43) T. Carleman, "Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen", Math. Z., 15, pp. 111-120, 原著ドイツ語 (1922).
- (44) F. G. Tricomi, Integral Equations, Chap. 4, Interscience, New York (1957).
- (45) N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, translated by J. R. M. Radok, Noordhoff, Groningen, ロシア語からの英訳版 (1958).
- (46) L. Lewin, "On the resolution of a class of waveguide discontinuity problems by the use of singular integral equations", IRE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-9, 4, pp. 321–332 (July 1961).
- (47) Y. Hayashi, "A singular integral equation approach to electromagnetic fields for circular boundaries with slots", Appl. Sci. Res. (Sec. B), 12, pp. 331-359 (1965).
- (48) Y. Hayashi, "The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary", J. Math. Anal. Appl., 44, 2, pp. 489-530 (Nov. 1973).
- (49) F. Erdogan, G. D. Gupta, and T. S. Cook, "Numerical solution of singular integral equations", in Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Vol. 1, Chap. 7, G. C. Sih (ed.), Noordhoff, Leyden (1973).
- (50) A. Frenkel, "External modes of two-dimensional thin scatterers", IEE Proc. Pt. H, 130, 3, pp. 209-214 (April 1983).
- (51) B. B. Panasiuk, M. P. Savruk, and Z. T. Nazarchuk, Metod Singuliarnikh Integral'nikh Uravnenii v Dvumernikh Zadachakh Difraktsii (書名和訳: 2次 元回折問題に対する特異積分方程式の方法), Naukova Dumka, Kiev, 原 著ロシア語(1984).
- (52) P. M. Morse and P. J. Rubenstein, "The diffraction of waves by ribbons and by slits", Phys. Rev., 54, pp. 895-898 (Dec. 1938).
- (53) S. Skavlem, "On the diffraction of scalar plane waves by a slit of infinite length", Arch. Math. Naturv., B-51, pp. 61-80 (1951).

参考文献

- New York (1987).
- (B), J60-B, 11, pp. 836-842 (1977-11).
- 22, 6, pp. 987-991 (Nov.-Dec. 1987).
- pp. 1195-1206 (Nov.-Dec. 1983).
- Propagat., AP-32, 3, pp. 226-231 (March 1984).
- 1985).
- 10).

- 5, pp. 481-486 (May 1987).
- Kumamoto University, 37, 1, pp. 47-59 (March 1992).
- Hill, New York (1961).

132

(54) J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, Revised Pringing, Chap. 4, Hemisphere,

(55) 青木和男,田中達夫,"2枚の平行導体板による平面波の回折",信学論

(56) M. Shimoda and T. Itakura, "Scattering by parallel plates", Radio Science,

(57) A. W. Glisson and D. R. Wilton, "Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-28, 5, pp. 593-603 (Sept. 1980).

(58) K. A. Michalski and C. M. Butler, "Determination of current induced on a conducting strip embedded in a dielectric slab", Radio Science, 18, 6,

(59) C. M. Butler, "Current induced on a conducting strip which resides on the planar interface between two semi-infinite half-spaces", IEEE Trans. Antennas

(60) C. M. Butler, "General solutions of the narrow strip (and slot) integral equations", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-33, 10, pp. 1085-1090 (Oct.

(61) 西本昌彦, 青木和男, "任意の方向を向いた2枚の平行導体ストリップ による平面電磁波の散乱",信学論(B), J69-B, 10, pp. 1131-1139 (1986-

(62) W. S. Park and S. R. Seshadri, "Theory of the grating coupler for a groundeddielectric-slab waveguide", IEE Proc. Pt. H, 132, 3, pp. 149-156 (June 1985).

(63) M. Tomita, "Thin-film waveguide with a periodic groove structure of finite extent", J. Opt. Soc. Amer. A, 6, 9, pp. 1455-1464 (Sept. 1989)

(64) K. Uchida, "Numerical analysis of surface-wave scattering by finite periodic notches in ground plane", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-35,

(65) A. Matsushima and T. Itakura, "Numerical solution of singular integral equations for electromagnetic scattering by a set of perfectly conducting strips with two-dimensional geometry", Memoirs of the Faculty of Engineering,

(66) R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, Chap. 5, McGraw-

- (67) J. Meixner, "The behavior of electromagnetic fields at edges", *IEEE Trans.* Antennas Propagat., AP-20, 4, pp. 442-446 (July 1972).
- (68) E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, London (1902).
- (69) C. T. H. Baker, The Numerical Treatment of Integral Equations, Oxford University Press (1977).
- (70) L. M. Delves and J. L. Mohamed, Computational Methods for Integral Equations, Cambridge University Press (1985).
- (71) D. S. Jones, "On the scattering cross section of an obstacle", *Philosophical Magazine.*, 46, pp. 957-960 (1955).
- (72) R. V. Row, "Microwave diffraction measurement in a parallel-plate region", J. Appl. Phys., 24, 12, pp. 1448-1452 (Dec. 1953).
- (73) P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Part I, McGraw-Hill, New York (1953).
- (74) I. S. Gradstein and I. M. Ryzhik (大槻義彦訳), "数学大公式集", 丸善, ロシア語からの和訳版 (1983).
- (75) R. Mittra, T. Itoh, and T.-S. Li, "Analytical and numerical studies of the relative convergence phenomenon arising in the solution of an integral equation by the moment method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-20, 2, pp. 96-104 (Feb. 1972).
- (76) P. G. Petropoulos and G. A. Kriegsmann, "Optical theorems for electromagnetic scattering by inhomogeneities in layered dielectric media", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-39, 8, pp. 1119–1124 (Aug. 1991).
- (77) A. Hessel and A. A. Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings", Appl. Opt., 4, 10, pp. 1275-1297 (Oct. 1965).
- (78) T. J. Rivlin, Chebyshev Polynomials, Wiley-Interscience, New York (1990).
- (79) G. A. Otteni, "Plane wave reflection from a rectangular-mesh ground screen", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-21, 6, pp. 843-851 (Nov. 1973).
- (80) D. A. Hill and J. R. Wait, "Electromagnetic scattering of an arbitrary plane wave by two nonintersecting perpendicular wire grids", Can. J. Phys., 52, pp. 227-237 (1974).
- (81) A. Sommerfeld, Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, New York (1967).

# 付録 A

# チェビシェフ多項式の性質

本文中での参照の便宜のために、チェビシェフ多項式の種々の性質をま とめておく<sup>(78)</sup>

(1) 定義

 $T_n(\cos\theta) =$ 

 $U_{n-1}(\cos\theta)$ 

(2) 表示 第1種:

 $T_0(t) = 1$  $T_1(t) = t$  $T_2(t) = 2t^2$  $T_3(t) = 4t^3$  $T_4(t) = 8t^4$  $T_5(t) = 16t^5$  $T_n(t) = 2tT_n$ 

134

$$= \cos(n\theta)$$

$$(n = 0, 1, \dots) : \hat{\mathfrak{R}} 1 \overline{\mathfrak{A}}$$

$$(A.1)$$

$$= \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

$$(n = 1, 2, \dots) : \hat{\mathfrak{R}} 2 \overline{\mathfrak{A}}$$

$$-1$$
  
 $-3t$   
 $-8t^{2} + 1$   
 $t^{2} - 20t^{3} + 5$ 

(A.2)

付録 A チェビシェフ多項式の性質

第2種:

- $U_0(t) = 1$  $U_1(t) = 2t$  $U_2(t) = 4t^2 - 1$  $U_3(t) = 8t^3 - 4t$ (A.3) $U_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1$  $U_5(t) = 32t^5 - 32t^3 + 6t$  $U_n(t) = 2tU_{n-1}(t) - U_{n-2}(t)$ : 漸化式
- 第1種, 第2種間の関係:

$$\begin{cases} T_n(t) = U_n(t) - tU_{n-1}(t) \\ (1 - t^2)U_{n-1}(t) = tT_n(t) - T_{n+1}(t) \end{cases}$$
(A.4)

(3) 直交性

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\delta_{mn}}{2-\delta_{m0}}$$
(A.5)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} U_{m-1}(t) U_{n-1}(t) \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{\delta_{mn}}{2} \tag{A.6}$$

但し δ<sub>mn</sub> はクロネッカのデルタである.

(4) 微分演算

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = nU_{n-1}(t), \quad \frac{d}{dt}[U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}] = -\frac{nT_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$
(A.7)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t) \log|s-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = \tilde{\lambda}_n T_n(s)$$
(A.8)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{(t-s)\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ U_{n-1}(s) & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$
(A.9)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_{n}}{\sqrt{1-1}} \frac{1}{\sqrt{1-1}} \frac{1}{\sqrt{1-1}} \frac{1}{\sqrt{1-1}} U_{n-1}(t) e^{-t}$$

但し
$$j$$
は虚数単位, $J_n(\cdot)$ は  
次の記号を用いている.

$$\tilde{\lambda}_n = \left\{ \begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right\}$$

(6) 内挿多項式 滑らかな関数 f(t) (-1 < t < 1) は次の内挿多項式のい

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} f_n^{(1)} T_n(t),$$

但し係数は次式から求められる.

$$f_n^{(1)} = \frac{2 - \delta_{n0}}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} f(t_i^{(1)}) T_n(t_i^{(1)})$$
(A.15)

$$f_n^{(2)} = \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \left[1 - (t_i^{(2)})^2\right] f(t_i^{(2)}) U_{n-1}(t_i^{(2)}) \tag{A.16}$$

ここでの内挿点は次のとおりである.

$$t_i^{(1)} = \cos\frac{(i-1/2)\pi}{N+1}, \quad t_i^{(2)} = \cos\frac{i\pi}{N+1}$$
 (A.17)

もし関数 f(t) が多項式であれば、式 (A.14)の表現はそれぞれ  $t^N$ ,  $t^{N-1}$ のオーダまで正確に近似する.

136

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-s} dt = -T_n(s) \tag{A.10}$$

$$\frac{f_n(t)e^{jst}}{\sqrt{1-t^2}} dt = j^n J_n(s)$$
 (A.11)

$$^{jst}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{j^{n-1}n}{s}J_n(s)$$
 (A.12)

(n次の第1種ベッセル関数であり,更に

$$\log 2 \quad (n = 0)$$
  
 $1/n \quad (n = 1, 2, \cdots)$  (A.13)

ずれによっても近似される. 使用の際には都合のよい方を選ぶ.

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} f_n^{(2)} U_{n-1}(t)$$
 (A.14)

付録A チェビシェフ多項式の性質

(7) 積和公式 次のように2個の多項式の積を多項式の線形結合で表現す ることを考えよう.

$$T_{m}(t)T_{n}(t) = \sum_{k=0}^{2N} v_{mnk}^{(1)} T_{k}(t)$$

$$U_{m-1}(t)U_{n-1}(t)(1-t^{2}) = \sum_{k=0}^{2N} v_{mnk}^{(2)} T_{k}(t) \qquad (A.18)$$

$$U_{m-1}(t)T_{n}(t) = \sum_{k=1}^{2N} v_{mnk}^{(3)} U_{k-1}(t)$$

上の総和記号内の展開係数は、式(A.1)および三角関数系の直交性を 用いて次のように求められる.

$$\begin{cases} \upsilon_{mnk}^{(1)} = \frac{1}{2} (\delta_{(m+n)k} + \delta_{|m-n|k}) \\ \upsilon_{mnk}^{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{|m-n|k} - \delta_{(m+n)k}) \\ \upsilon_{mnk}^{(3)} = \frac{1}{2} (\delta_{(m+n)k} + \operatorname{sgn}(m-n)\delta_{|m-n|k}) \end{cases}$$
(A.19)

# 付録 B 無限平板格子に対する通常の積分方程式法

おこう. 出発点となる式 (2.84) を次に再記しておく.

$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{zl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{z}(t) dt = -\xi_{z} - \xi_{z0}$$
(B.1)  
$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{yl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{y}(t) dt = \frac{j\pi}{\Delta} \xi_{y} - \xi_{y0}$$
(B.1)  
2.90), (2.91) で定義される記号  $C_{u}$ ,  $F_{ul}$  を用いれば, 式 (B.1) は  
 $C_{u} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{ul} F_{ul} e^{-j2ls\Delta} = -\xi_{u} - C_{u} \xi_{u0}$  (-1 < s < 1;  $u = z, y$ ) (B.2)  
E形される. これに式 (2.82), (2.94) を代入し、第2章と同じ試験関数

$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{zl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{z}(t) dt = -\xi_{z} - \xi_{z0}$$
(B.1)  
$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{yl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{y}(t) dt = \frac{j\pi}{\Delta} \xi_{y} - \xi_{y0}$$
(B.1)  
2.90), (2.91) で定義される記号  $C_{u}$ ,  $F_{ul}$  を用いれば, 式 (B.1) は  
 $C_{u} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{ul} F_{ul} e^{-j2ls\Delta} = -\xi_{u} - C_{u} \xi_{u0}$ (-1 < s < 1;  $u = z, y$ ) (B.2)  
ぎ形される. これに式 (2.82), (2.94) を代入し、第2章と同じ試験関数

$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{zl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{z}(t) dt = -\xi_{z} - \xi_{z0}$$
(B.1)  
$$\int_{-1}^{1} \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \zeta_{yl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_{y}(t) dt = \frac{j\pi}{\Delta} \xi_{y} - \xi_{y0}$$
(B.1)  
$$(-1 < s < 1)$$
(B.1)  
$$(2.90), (2.91) で定義される記号  $C_{u}, F_{ul} \in \mathbb{H}$ いれば,式(B.1) は  
$$C_{u} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{ul} F_{ul} e^{-j2ls\Delta} = -\xi_{u} - C_{u} \xi_{u0}$$
(-1 < s < 1;  $u = z, y$ ) (B.2)  
変形される. これに式 (2.82), (2.94) を代入し、第2章と同じ試験関数$$

刊いれは, 理业1次万程式

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\substack{n=0\\N}}^{N} \eta_{zmn} f_{zn} = -\xi_{z} \delta_{m0} & (m = 0, 1, \cdots, N) \\ \sum_{\substack{n=0\\N}}^{N} \eta_{ymn} f_{yn} = -\xi_{y} \delta_{m1} & (m = 1, 2, \cdots, N) \end{array} \right\}$$
(B.3)

が得られる. 但し左辺の係数 { $\eta_{umn}$ } は, 式 (2.99) と類似した形で

138

第2.5節で展開した特異積分方程式 (SIE) 法の精度・効率を調べる際の 比較の対象として、通常の積分方程式 (CIE) の数値解析法<sup>(25),(26)</sup>を示して

### 付録 B 無限平板格子に対する通常の積分方程式法

$$\eta_{umn} = \begin{pmatrix} \pi \delta_{m0} \delta_{n0} \\ j \Delta \delta_{m1} \delta_{n0} \\ j \Delta^2 \delta_{m1} \delta_{n1} \end{pmatrix} \zeta_{u0} + j^{n-m} \sum_{\substack{l=-L\\l \neq 0}}^{L} \begin{pmatrix} \pi (2 - \delta_{m0}) \\ -m/l \\ -m/l \end{pmatrix} \zeta_{ul} J_m (2l\Delta) J_n (2l\Delta)$$

(上から  $u = z; u = y, \phi_0 \neq 0; u = y, \phi_0 = 0$ ) (B.4)

となる. 但し  $\zeta_{u0}$  は式 (2.100), (2.101) で定義したものと同じである. また 式 (2.102) の場合と同様に, 連立1次方程式 (B.3) の下側の組には式 (2.105) を付加して解かなければならない.

以上のように、この CIE 法は SIE 法に比べてかなり簡便なものである が、2.5.3 項の数値計算では CIE 法がしばしば誤った解を導くことを示し ている.

# 付録 C 誘電体スラブによる平面波の反射と透過

図 3.1、図 4.1の構造において、導体平板を取り去ったときの反射・透 過平面波の振幅係数を示しておこう.まず図 4.1(c) のような 2 枚の対称ス ラブでは,式(4.7)の振幅係数は

$$\begin{pmatrix} \rho_z^{(q)} \\ \rho_y^{(q)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{R}_{\rm c}^{-1} \overline{\mathbf{R}}_{\rm c} - (-1)^q \mathbf{R}_{\rm s}^{-1} \overline{\mathbf{R}}_{\rm s} \right\} \begin{pmatrix} \iota_z \\ \iota_y \end{pmatrix} \quad (q = 1, 2) \qquad (C.1)$$

と表される. 但し $\overline{R}$ はRの複素共役を表し、行列 $R_{c,s}$ は

$$R_{c} = R(c_{0}, s_{0}, c_{1}, s_{1}) \cdot R_{s} = R(s_{0}, -c_{0}, c_{1}, s_{1})$$

で定義される. ここに

$$R(x_{0}, y_{0}, x_{1}, y_{1}) = (\epsilon_{r} \alpha_{00} x_{0} x_{1} - \alpha_{10} y_{0} y_{1})^{-1} (\alpha_{10} x_{0} x_{1} - \alpha_{00} y_{0} y_{1})^{-1} \\ \times \left[ x_{0} x_{1} \begin{pmatrix} \epsilon_{r} \alpha_{00} (\alpha_{10} x_{1} + j \tilde{\alpha}_{00} y_{1}) & j \tilde{\epsilon}_{0} y_{1} \\ j \tilde{\epsilon}_{0} y_{1} & \alpha_{10} (\epsilon_{r} \alpha_{00} x_{1} + j \tilde{\alpha}_{10} y_{1}) \end{pmatrix} \\ + y_{0} y_{1} \begin{pmatrix} -\alpha_{10} (\tilde{\alpha}_{10} x_{1} + j \alpha_{00} y_{1}) & \tilde{\epsilon}_{0} x_{1} \\ \tilde{\epsilon}_{0} x_{1} & -\alpha_{00} (\epsilon_{r} \tilde{\alpha}_{00} x_{1} + j \alpha_{10} y_{1}) \end{pmatrix} \right]$$

$$+ y_0 y_1 \begin{pmatrix} -\alpha_{10}(\bar{\alpha}_{10}x_1 + j\alpha_{00}y_1) & \tilde{\epsilon}_0 x_1 \\ \tilde{\epsilon}_0 x_1 & -\alpha_{00}(\epsilon_r \bar{\alpha}_{00}x_1 + j\alpha_{10}y_1) \end{pmatrix} \right]$$
(C.3)  
$$c_0 + j s_0 = e^{j\alpha_{00}(h/2 - h_d)}, \quad c_1 + j s_1 = e^{j\alpha_{10}h_d/2}$$
(C.4)

$$\tilde{\alpha}_{00} = \frac{k_0^2 - \beta_0^2 - \gamma^2 / \epsilon_r}{\alpha_{00}}, \quad \tilde{\alpha}_{10} = \frac{k_1^2 - \beta_0^2 - \epsilon_r \gamma^2}{\alpha_{10}}, \quad \tilde{\epsilon}_0 = \beta_0 \gamma (\epsilon_r - 1) \quad (C.5)$$

 $(c_{\nu}, s_{\nu}$ は実数) である. 定数  $\alpha_{\nu 0}$  は式 (4.9) で定義した.

140

 $+ R(c_0, s_0, s_1, -c_1)$ (C.2) $(1) + \mathbf{R}(s_0, -c_0, s_1, -c_1)$ 

### 付録C 誘電体スラブによる平面波の反射と透過

次に図 4.1(b) のような 1 枚のスラブでは、上の結果に極限操作  $h_d \rightarrow h/2$ を施すことにより

$$\begin{pmatrix} \rho_z^{(q)} \\ \rho_y^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{q1} - \alpha_{10} [v_s^{\rm h}s - (-1)^q v_c^{\rm h}c] & \chi^{(q)} \\ \chi^{(q)} & \delta_{q1} - j\epsilon_{\rm r}\alpha_{00} [v_c^{\rm e}s + (-1)^q v_s^{\rm e}c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_z \\ \iota_y \end{pmatrix} \quad (q = 1, 2)$$
(C.6)

と表せる. 但し

$$\begin{pmatrix} v_{\rm c}^{\rm e} \\ v_{\rm s}^{\rm h} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_{\rm c}^{\rm e} u_{\rm s}^{\rm h}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\rm c}^{\rm e} \\ \tilde{u}_{\rm s}^{\rm h} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_{\rm s}^{\rm e} \\ v_{\rm c}^{\rm h} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_{\rm s}^{\rm e} u_{\rm c}^{\rm h}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\rm s}^{\rm e} \\ \tilde{u}_{\rm c}^{\rm h} \end{pmatrix}$$
(C.7)

$$\begin{pmatrix} u_{\rm c}^{\rm e} & u_{\rm s}^{\rm e} \\ u_{\rm c}^{\rm h} & u_{\rm s}^{\rm h} \\ \tilde{u}_{\rm c}^{\rm e} & \tilde{u}_{\rm s}^{\rm e} \\ \tilde{u}_{\rm c}^{\rm h} & \tilde{u}_{\rm s}^{\rm h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & -j\alpha_{00} \\ \alpha_{10} & -j\epsilon_{\rm r}\alpha_{00} \\ \alpha_{10} & -j\tilde{\epsilon}_{\rm r}\alpha_{00} \\ \tilde{\alpha}_{10} & -j\tilde{\epsilon}_{\rm r}\alpha_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & c \\ c & -s \end{pmatrix}$$
(C.8)

$$c+js = e^{j\alpha_{10}h/2}, \qquad \chi^{(q)} = \tilde{\epsilon}_0 cs \left[\frac{1}{u_c^e u_s^h} - \frac{(-1)^q}{u_s^e u_c^h}\right] \tag{C.9}$$

(c,s は実数) である. 図 4.1(a) のようにスラブが消失したときには, 式 (C.7) に極限操作  $\epsilon_r \rightarrow 1$  を施した表示

$$\begin{pmatrix} u_{\rm c}^{\rm e} & u_{\rm s}^{\rm e} \\ u_{\rm c}^{\rm h} & u_{\rm s}^{\rm h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j & 1 \\ -j & 1 \end{pmatrix} \alpha_{00} e^{j\alpha_{00}h}$$
(C.10)

を用いれば、係数の式 (C.6) は次の単純な表示に帰着する.

$$\rho_z^{(1)} = \rho_y^{(1)} = 0, \qquad \rho_z^{(2)} = \iota_z, \qquad \rho_y^{(2)} = \iota_y$$
(C.11)

最後に第3章での参照の便宜上、 $\theta_0 = 90^\circ$ なる2次元問題における式 (C.6)の表示を掲げておこう.

$$\rho_z^{(1)} = \frac{(\alpha_{00}^2 - \alpha_{10}^2)cs}{u_c^e u_s^e} \iota_z, \qquad \rho_z^{(2)} = \frac{\alpha_{00}\alpha_{10}}{ju_c^e u_s^e} \iota_z \tag{C.12}$$

$$\rho_y^{(1)} = \frac{(\alpha_{10}^2 - \epsilon_r \alpha_{00}^2)cs}{u_c^h u_s^h} \iota_y, \qquad \rho_y^{(2)} = \frac{\epsilon_1 \alpha_{00} \alpha_{10}}{j u_c^h u_s^h} \iota_y \tag{C.13}$$

但しこの場合には  $\alpha_{00} = k_0 \cos \phi_0$ ,  $\alpha_{10} = k_0 \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \phi_0}$ ,  $\iota_z = 1$ ,  $\iota_y =$ sec on である.

# 付録 D

すべての媒質境界面が x 軸に垂直な平面であるような層状構造をなす 空間を考えよう. その中で境界条件が満足されるためには、電磁界の x 依 存性はすべての成分において exp(jax) の形をとらなければならない. 但 し、 $\alpha$ はx方向の波数である.このとき電磁界は、電気形( $\Pi$ )、磁気形 (П\*)のヘルツポテンシャルより適当に選んだ2つのスカラ成分から誘導 される.特に平面状格子や平面アンテナを解析する際には、次の2つの方 法のいずれかがしばしば用いられる. なお、定数  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $k (= \omega \sqrt{\epsilon \mu})$  はそ れぞれ考察している媒質の誘電率,透磁率,波数とする. 1. 両方のヘルツポテンシャルが境界面に垂直であると仮定し、 $\Pi = \hat{x} \Pi_x$ 、  $\Pi^* = \hat{x} \Pi^*_r$ と表せば、電磁界が  $E = \nabla \nabla \cdot \Pi + k^2 \Pi - j \omega \mu \nabla \times \Pi^*$ (D.1) $H = \nabla \nabla \cdot \Pi^* + k^2 \Pi^* + j \omega \epsilon \nabla \times \Pi$ から導かれる<sup>(79)</sup>. この選び方は任意の偏波を TE 波 ( $E_x = 0$ ) と TM 波  $(H_x = 0)$  に分解するときに便利である. なぜなら電磁界の x 成分  $E_x$ ,  $H_x$  はそれぞれ  $\Pi_x$ ,  $\Pi_r^*$  のみを用いて表現されるからである.  $\Box$ 2. 電気形ヘルツポテンシャルが境界面に平行であると仮定し. П =

 $\hat{y}\Pi_{y} + \hat{z}\Pi_{z}$ と表せば、電磁界が

$$\begin{cases} E = \\ H = \end{cases}$$

142

## 層状構造に関するヘルツポテンシャル

 $\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi}$  $j\omega\epsilon\nabla\times\Pi$ 

(D.2)

から導かれる<sup>(80)</sup>.この場合には磁気形のポテンシャルは不要である. この選び方は任意の偏波を E 波 ( $E_z = 0$ ) と H 波 ( $H_z = 0$ ) に分解す るときに便利である. なぜなら電界成分  $E_z$ , 磁界成分  $H_z$  はそれぞ れ *Π<sub>z</sub>*, *Π<sub>y</sub>*のみを用いて表現されるからである. ゆえに本論文では こちらの方を採用した. ロ

もちろん他の選択法、例えば  $\Pi = \hat{x}\Pi_x + \hat{z}\Pi_z$ なども可能である<sup>(81)</sup>. 関係式

$$(\nabla^2 + k^2)\Pi^{(*)} = 0, \quad \partial/\partial x = j\alpha \tag{D.3}$$

を考慮しながら、式(D.1)、(D.2)の各成分を比較すれば、次の条件のもと に上記の2つの選択法が等価であることが示される.

$$\left( \begin{array}{l} \Pi_{x} = \frac{j\alpha}{k^{2} - \alpha^{2}} \left( \frac{\partial \Pi_{y}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{z}}{\partial z} \right) \\ \Pi_{x}^{*} = \frac{j\omega\epsilon}{k^{2} - \alpha^{2}} \left( \frac{\partial \Pi_{z}}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_{y}}{\partial z} \right) \end{array} \right) \tag{D.4}$$

本論文の回折格子の問題においては、媒質定数、波数、伝搬定数は、考 察している媒質、モード次数に応じて  $\epsilon_0$ 、  $\epsilon_0\epsilon_r$ 、  $\mu_0$ 、  $k_0$ 、  $k_1$ 、  $\pm \alpha_{0l}$ 、  $\pm \alpha_{1l}$ などに置き換えなければならない.

# 付録 E

変数が  $|\beta| \rightarrow \infty$  なるときの被積分関数の振舞い

$$\begin{cases} W(0,\beta) \sim \frac{j^2}{\alpha_1 + \alpha_0} \\ \frac{\partial W(x,\beta)}{\partial x} \bigg|_{x=0} \sim \frac{2}{\epsilon_r + \epsilon_r} \end{cases}$$

を考慮して,式(3.31)に示したように核関数を

$$\mathcal{D}_{u}K_{u}^{(pq)}(s,t) = K_{u0}^{(pq)}(s,t) + K_{u1}^{(pq)}(s,t) \qquad \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{z} = 1\\ \mathcal{D}_{y} = \partial/\partial t \end{pmatrix}$$
(E.2)

と分解する. 関数  $K_{u0}^{(pq)}(s,t)$  は被積分関数に式 (E.1) を代入した主要項,  $K_{u1}^{(pq)}(s,t)$  はそれに対する補正項である. 前者は簡略化した表示  $y_{pq} =$ (p-q)D + w(s-t)を用いて

$$K_{z0}^{(pq)}(s,t) = j \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 + \alpha_0)^{-1} e^{-j\beta y_{pq}} d\beta$$
(E.3)  
$$K_{y0}^{(pq)}(s,t) = \frac{jw^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \alpha_0 + \frac{k_1^2(\epsilon_r - 1)}{2(\epsilon_r + 1)\alpha_0} \right] e^{-j\beta y_{pq}} d\beta$$
(E.4)

と書かれる. これは解析的に評価す

$$K_{z0}^{(pq)}(s,t) = \frac{\jmath\pi}{k_0|y_{pq}|(1-\epsilon_r)} \left[ H_1^{(2)}(k_0|y_{pq}|) - \sqrt{\epsilon_r} H_1^{(2)}(k_1|y_{pq}|) \right]$$
(E.5)  
$$K_{y0}^{(pq)}(s,t) = \frac{\jmath\pi k_0^2 w^2}{2} \left[ \frac{H_1^{(2)}(k_0|y_{pq}|)}{k_0|y_{pq}|} + \frac{\epsilon_r(\epsilon_r - 1)}{2(\epsilon_r + 1)} H_0^{(2)}(k_0|y_{pq}|) \right]$$
(E.6)

144

# 積分で定義された核関数の評価法

式 (3.19), (3.28) 中の無限積分を効率よく評価する方法を示そう.積分

(E波)

(E.1)

 $\frac{k_{\rm r}}{k_{\rm r}} + \frac{k_{\rm l}^2(\epsilon_{\rm r}-1)}{(\epsilon_{\rm r}+1)^2 \alpha_0^2}$ (H 波)

### 付録 E 積分で定義された核関数の評価法

他方で補正項  $K_{u1}^{(pq)}(s,t)$  は,その被積分関数が偶関数であるため半無限 積分

$$K_{u1}^{(pq)}(s,t) = \int_0^\infty L_u^{(pq)}(\beta) \, d\beta \qquad (u=z,y)$$
(E.7)

に変形される. ここに新しい被積分関数は

$$L_{z}^{(pq)}(\beta) = \left(W(0,\beta) - \frac{j2}{\alpha_{1} + \alpha_{0}}\right)\cos(\beta y_{pq})$$
(E.8)

$$L_{y}^{(pq)}(\beta) = jw^{2} \left[ \alpha_{0} \left( \frac{\epsilon_{r}+1}{2} \left. \frac{\partial W(x,\beta)}{\partial x} \right|_{x=0} - 1 \right) - \frac{k_{1}^{2}(\epsilon_{r}-1)}{2(\epsilon_{r}+1)\alpha_{0}} \right] \cos(\beta y_{pq})$$
(E.9)

で与えられる. これらは  $\beta \to \infty$  のとき式 (3.19), (3.28) に含まれる本来 の被積分関数より速く減少する.

式 (E.7) の半無限積分路を次のように分割しよう.

$$K_{u1}^{(pq)}(s,t) = \sum_{i=0}^{2} I_i$$
 (E.10)

但し

$$I_{0} = \int_{0}^{k_{0}} L_{u}^{(pq)}(\beta) d\beta$$
$$I_{1} = \int_{k_{0}}^{k_{1}} L_{u}^{(pq)}(\beta) d\beta$$
(E.11)

$$I_2 = \int_{k_1}^{\infty} L_u^{(pq)}(\beta) \, d\beta$$

である. 変数変換  $\beta = k_0 \sin \xi$ ,  $\beta = \sqrt{k_1^2 + (\xi/h)^2}$  をそれぞれ積分  $I_0$ ,  $I_2$ に導入すれば

$$I_0 = k_0 \int_0^{\pi/2} L_u^{(pq)}(k_0 \sin \xi) \cos \xi \, d\xi \tag{E.12}$$

$$I_2 = h^{-1} \int_0^\infty L_u^{(pq)} (\sqrt{k_1^2 + (\xi/h)^2}) \frac{\xi \, d\xi}{\sqrt{(k_1h)^2 + \xi^2}} \tag{E.13}$$

の形を得る.数値計算の際には,式(E.8),(E.9)の代わりに次の等価な表 現を用いると便利である.

$$L_z^{(pq)}(\beta) = \frac{j4\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_0)^2 (e^{j2\alpha_1 h} / \rho_z(\beta) - \rho_z(\beta))} \cos(\beta y_{pq})$$
(E.14)

$$L_{y}^{(pq)}(\beta) = j\epsilon_{\rm r}\alpha_{0}w^{2} \left[ -\frac{2(\epsilon_{\rm r}+1)\alpha_{0}\alpha_{1}}{(\alpha_{1}+\epsilon_{\rm r}\alpha_{0})^{2}({\rm e}^{j2\alpha_{1}h}/\rho_{y}(\beta)-\rho_{y}(\beta))} + \frac{\alpha_{1}-\alpha_{0}}{\alpha_{1}+\epsilon_{\rm r}\alpha_{0}} - \frac{k_{0}^{2}(\epsilon_{\rm r}-1)}{2(\epsilon_{\rm r}+1)\alpha_{0}^{2}} \right] \cos(\beta y_{pq})$$
(E.15)

但し

$$\rho_z(\beta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 + \alpha_0},$$

積分  $I_0$  では変数変換により、端点  $\beta = k_0 (\xi = \pi/2)$  での $\alpha_0$ ,  $\alpha_0^{-1}$  に起因 する特異性が打ち消されている.また、半無限積分  $I_2$  における被積分関 数は  $\xi \to \infty$  のとき、E 波に対して  $O(e^{-2\xi})$  で、H 波に対して  $O(\xi^{-3})$  で それぞれ振る舞うため、有限区間で打ち切ることにする.こうしてこれら の積分  $I_0$ ,  $I_2$  には通常の数値積分公式が適用できる.但しその際の区間 の分割数は、 $\cos(\beta y_{Pq})$ の存在による被積分関数の振動の程度を考慮して 適切に選ばなければならない.

以上とは異なり、積分  $I_1$  の評価には特別の処理を要する. これは図 3.2 に示すように、被積分関数が積分路内に  $Q_r(\beta_{r\mu}) = 0$  (r = c,s;  $\mu = 1, 2, \dots, M_r$ )で決定される有限個の極をもつためである. そこで式 (E.8), (E.9)を次のように分解する.

$$L_{u}^{(pq)}(\beta) = \sum_{i=0}^{2} L_{ui}^{(pq)}(\beta) \qquad (u = z, y)$$
(E.17)

但し

$$L_{u0}^{(pq)}(\beta) = \sum_{r=c,s} \sum_{\mu=1}^{M_{r}} \frac{\operatorname{Res}[L_{u}^{(pq)}(\beta), \beta_{r\mu}]}{\beta - \beta_{r\mu}} \quad (u = z, y)$$
(E.18)  
$$L_{z1}^{(pq)}(\beta) = \left(W(0, \beta) - \frac{j2}{\bar{\alpha}_{1} + \bar{\alpha}_{0}}\right) \cos(\beta y_{pq}) - L_{z0}^{(pq)}(\beta)$$

$$L_{z1}^{(pq)}(\beta) = \left(W(0,\beta) - \frac{J^2}{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_0}\right) \cos(\beta y_{pq}) - L_{z0}^{(pq)}(\beta)$$

$$L_{y1}^{(pq)}(\beta) = j\alpha_0 w^2 \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2} \left.\frac{\partial W(x,\beta)}{\partial \bar{x}}\right|_{x=0} - 1\right) \cos(\beta y_{pq}) - L_{y0}^{(pq)}(\beta)$$
(E.19)

146

$$\rho_y(\beta) = \frac{\alpha_1 - \epsilon_r \alpha_0}{\alpha_1 + \epsilon_r \alpha_0} \tag{E.16}$$

### 付録 E 積分で定義された核関数の評価法

$$L_{z2}^{(pq)}(\beta) = 0$$

$$L_{y2}^{(pq)}(\beta) = \frac{k_1^2 w^2(\epsilon_r - 1)}{i2(\epsilon_r + 1)\alpha_0} \cos(\beta y_{pq})$$
(E.20)

式 (E.18) 中の特異項を β に関して k<sub>0</sub> から k<sub>1</sub> まで積分するために,積分 路の一部を極を中心とする小半円に変形する. 解析的に積分したのち,そ の半径を零とする. 以上の結果

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{u0}^{(pq)}(\beta) \, d\beta = \sum_{\mathbf{r}=\mathbf{c},\mathbf{s}} \sum_{\mu=1}^{M_{\mathbf{r}}} \operatorname{Res}[L_u^{(pq)}(\beta), \beta_{\mathbf{r}\mu}] \left(\log \frac{k_1 - \beta_{\mathbf{r}\mu}}{\beta_{\mathbf{r}\mu} - k_0} - j\pi\right) \quad (E.21)$$

を得る.また式 (E.19) に対しては、被積分関数の特異性が打ち消されているので、変数変換  $\beta = \xi/h$  により

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{u1}^{(pq)}(\beta) \, d\beta = h^{-1} \int_{k_0 h}^{k_1 h} L_{u1}^{(pq)}(\xi/h) \, d\xi \qquad (u = z, y)$$
(E.22)

と変形したのち数値積分を行う. 最後に式 (E.20) では, 被積分関数が端 点  $\beta = k_0 \ (\xi = 0)$  において  $\alpha_0^{-1}$  に起因する特異性をもつ. しかし変数変 換  $\beta = k_0 \cosh \xi$  を施して

$$\int_{k_0}^{k_1} L_{y2}^{(pq)}(\beta) \, d\beta = k_0 \int_0^{\cosh^{-1}\sqrt{\epsilon_r}} L_{y2}^{(pq)}(k_0 \cosh \xi) \sinh \xi \, d\xi \tag{E.23}$$

と変形すれば、端点での特異性が打ち消されて数値積分が可能になる.



