

## 特異積分方程式による平板回折格子の数値解析に関する研究

松島, 章

<https://doi.org/10.11501/3075565>

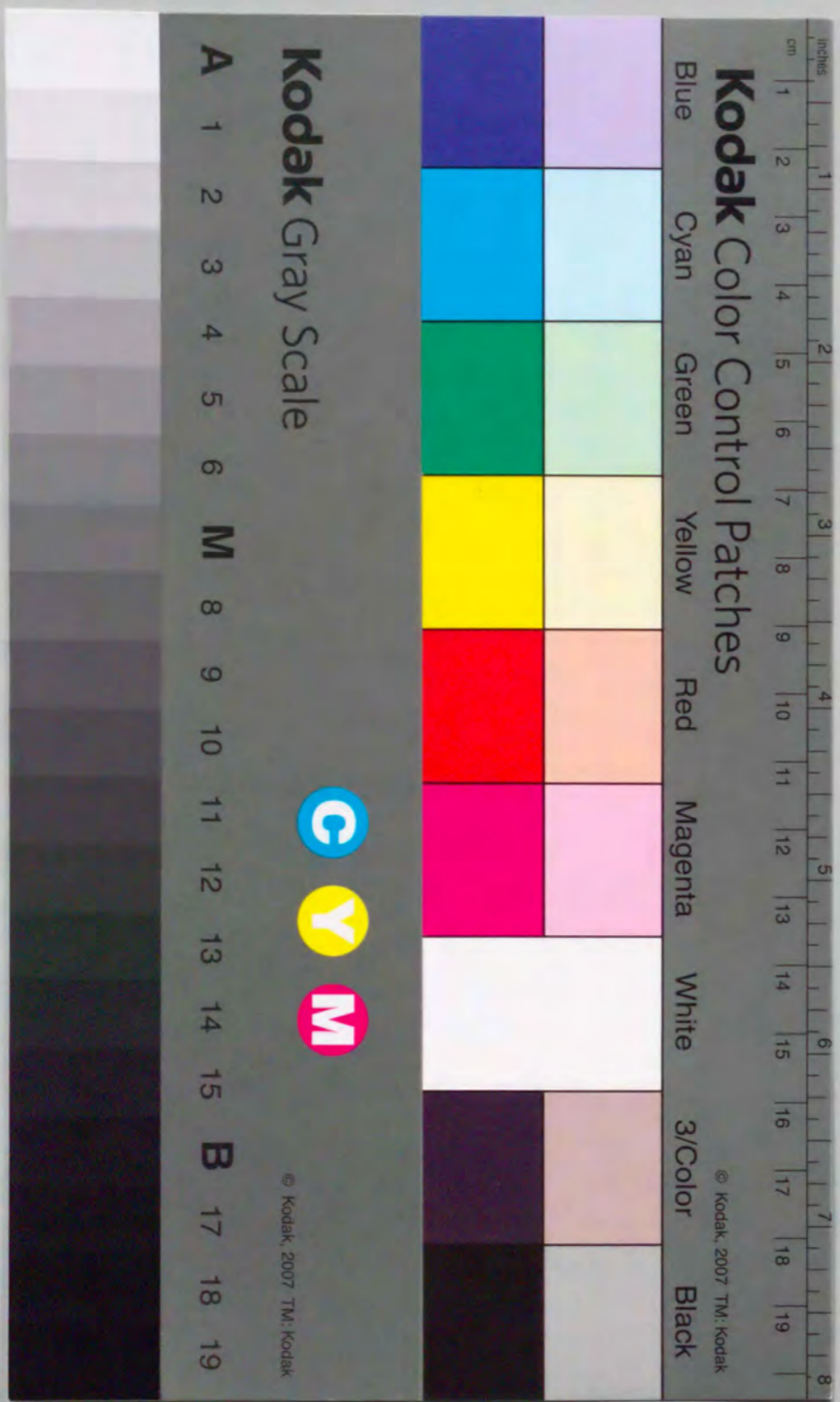
---

出版情報 : 九州大学, 1993, 博士 (工学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

特異積分方程式による  
平板回折格子の数値解析に関する研究

平成6年1月

松島章



①

特異積分方程式による  
平板回折格子の数値解析に関する研究

平成6年1月

松島 章

# 目 次

第1章 序 論

1.1 研究の背景 ..... 1

1.2 平板回折格子による散乱に関する研究状況 ..... 4

1.3 本論文の構成 ..... 7

第2章 特異積分方程式法

2.1 まえがき ..... 11

2.2 特異積分方程式の導出 ..... 12

2.3 モーメント法による数値解析 ..... 20

2.4 有限平板格子への応用 ..... 24

    2.4.1 解析式の表現 ..... 24

    2.4.2 数値解の精度 ..... 27

2.5 無限平板格子への応用 ..... 34

    2.5.1 特異積分方程式 ..... 34

    2.5.2 数値解析法 ..... 37

    2.5.3 数値解の精度 ..... 41

2.6 まとめ ..... 45

第3章 有限平板格子の導波モード励振特性

3.1 まえがき ..... 47

3.2 問題の定式化 ..... 48

3.3 積分方程式 ..... 52

    3.3.1 E波の場合 ..... 52

    3.3.2 H波の場合 ..... 54

3.4 特異積分方程式と数値解析 .....	56
3.5 物理量の数式表現 .....	58
3.5.1 表面電流密度 .....	58
3.5.2 導波モードの励振 .....	59
3.5.3 遠方放射界 .....	60
3.5.4 導波系の構造に関する種々の関係式 .....	61
3.6 導波モード励振素子の設計 .....	63
3.6.1 導波モード励振特性の検討 .....	63
3.6.2 設計アルゴリズム .....	72
3.6.3 設計例 .....	73
3.7 まとめ .....	76
第4章 平行2面の無限平板格子の偏波弁別特性	
4.1 まえがき .....	77
4.2 問題の定式化 .....	78
4.3 特異積分方程式の導出 .....	84
4.4 モーメント法による数値解析 .....	90
4.5 物理量の数式表現 .....	93
4.5.1 表面電流密度 .....	94
4.5.2 電力分布 .....	94
4.6 数値解の精度の検討 .....	95
4.7 偏波弁別素子の設計 .....	100
4.7.1 電力分布の周波数特性 .....	100
4.7.2 偏波弁別特性の検討 .....	105
4.7.3 設計アルゴリズム .....	118
4.7.3 設計例 .....	119
4.8 まとめ .....	122

## 第5章 結論

5.1 解法理論に関する結果 .....	123
5.2 導波素子への応用に関する結果 .....	125
5.3 今後の展望 .....	126
謝辞 .....	127
参考文献 .....	129
付録A チェビシェフ多項式の性質 .....	135
付録B 無限平板格子に対する通常の積分方程式法 .....	139
付録C 誘電体スラブによる平面波の反射と透過 .....	141
付録D 層状構造に関するヘルツポテンシャル .....	143
付録E 積分で定義された核関数の評価法 .....	145

# 第1章

## 序論

### 1.1 研究の背景

電気通信工学の中で、電磁波のさまざまな性質を利用して特定の機能をもつようにした受動・能動素子を研究する分野がある。この研究では、素子の形状やサイズを与えてその特性を精密に求めることはもちろん必要であるが、逆に、所望の特性をもつように素子を系統的に設計することも重要な課題となる。

導波形態を効率的に変換・制御することが可能な受動素子のひとつとして、薄い平板導体を周期的に並べた透過型の平板回折格子がある。この種の格子は単純な構造をもっていることより、古くから理論的な解析の対象とされてきた<sup>(1)~(6)</sup>。近年における計算機の高性能化に伴い、この格子による電磁波の散乱は、電磁界理論における基本的な境界値問題のひとつとして頻繁に取扱われるようになっている<sup>(7)~(35)</sup>。しかしそのうち1980年代前半までの研究は、格子構造を単に境界形状の一例とみなし、解析法それ自身の構成・改良に主眼をおいたものがほとんどであった。従って、この格子を導波素子として応用する際には、近似的な特性表現式や実験データに基づく経験則を用いた設計が主としてなされてきた<sup>(36)~(38)</sup>。

近年、高度情報化時代の進展に伴って、電波を利用した通信回線は高密度化・高機能化の方向に進んでいる。このような状況のもとでは、次のよ

うな事項が不可欠な要求となっている。

1. 導波系内で用いられる素子の特性の高効率化を図ること。
2. 単一周波数で偏波面の異なる2つの信号を伝送することにより、周波数帯を有効に利用すること。
3. 単一通信路内で周波数帯の異なる複数の信号を伝送することにより、通信路を有効に利用すること。

上記を達成するために、誘電体アンテナにおける結合素子、開口面アンテナ系の分離素子として、平板回折格子の実用化が始まっている。次に、これらの素子の構造・機能について概説しておこう。

(1) 結合素子 誘電体スラブ型の表面波アンテナの一部に周期構造を設ければ、導波モード励振、ビーム放射、周波数弁別などの結合作用が起きるため、これを工学的に応用することができる。このためには、結合すべき2つの導波姿態の伝搬定数に関して、位相整合条件すなわちブラッグ条件が満たされるように格子周期を選んでおく必要がある。このような素子はマイクロ波・ミリ波回路だけでなく<sup>(36),(37)</sup>、近年では光回路においても用いられるようになってきた<sup>(39),(40)</sup>。しかしそれらの結合特性を理論的に解明する目的で、境界条件を精密に取り入れて数値解析したものは数少ない<sup>(7),(8)</sup>。しかもそれらの数値解析の研究報告の中にも、格子構造と特性との関係を調べることにより、素子の具体的な設計法を示した例は見当たらない。

(2) 分離素子 これは偏波弁別素子、周波数選択素子に分類でき、それぞれ周波数、通信路の有効利用を目的としている。

偏波弁別素子とは、偏波多重通信において、磁界が格子軸に垂直であるE波と電界が格子軸に垂直であるH波とを分離する格子のこと

## 1.1 研究の背景

を言う。ここでは、1方向に周期的な平板格子が、波長が配列周期に比べて十分に大きい低周波領域において、E波を反射させH波を透過させる性質<sup>(5)</sup>が応用されている。また、その特性に関する実験的な検討も行われている<sup>(38)</sup>。実際の構造では、平板導体を支えるために誘電体スラブで裏打ちする必要がある、このとき弁別特性は誘電体損によって一般に劣化する。これを補償するためには、平板導体面および誘電体スラブを複数枚重ねて層状構造とし、媒質の不連続面の間の干渉を利用して特性曲線を変形させればよいことが最近明らかにされている<sup>(11),(12),(21)~(25)</sup>。しかし、具体的な設計法については更に検討する余地があるように思われる。

周波数選択素子は、特定の周波数帯の電波を反射または透過させる格子である。この選択特性を実現するためには、一般には2次元的な周期性をもつ格子が必要となり、既に方形<sup>(41)</sup>、円形<sup>(42)</sup>などの開口をもつ平面格子に対する解析結果が報告されている。

以上に述べたように、数値解析法に関する数多くの研究は、必ずしも格子を応用した素子の設計に効果的に結びついていたとは言えない。従って、解析・設計の両者の重要性という点からみれば、従来のように境界値問題を単に数値解析するだけでなく、応用素子の設計法を構築することも重要であることが分かる。

筆者はこの目的のために、前述した構造・機能のうち、構造面では1方向に周期的な平板格子に、機能面では導波モード励振特性および偏波弁別特性に焦点を絞り、数値解法理論の構成および数値計算結果の検討を行ってきた。本論文は、平板回折格子による電磁波散乱問題の特異積分方程式を用いた精密な数値解析法、並びにこの構造を応用した励振素子・弁別素子の設計法に関する筆者の一連の研究をまとめたものである。

## 1.2 平板回折格子による散乱に関する研究状況

本論文で用いる特異積分方程式 (SIE: Singular Integral Equations) 法は、断面が開曲線の集合で与えられるような散乱体に対する境界値問題に対して有力な手法である。但し平板格子の場合には、開境界は周期的に並んだ線分の列に帰着する。この線分すなわち平板導体の数は、有限個、無限個の2種類とし、前者を「有限平板格子」、後者を「無限平板格子」と呼ぶことにしよう。本節では、開境界の散乱問題への特異積分方程式の適用、有限格子・無限平板格子による散乱の解析の各項目について、現在までの研究状況を述べる。なお有限格子については、平板型に関する解析例は余り多くないので、他の構造のものも含めて解説する。

(1) 開境界の散乱問題への特異積分方程式の適用 特異積分方程式の理論は当初は数学の分野における研究対象であったが<sup>(43)~(45)</sup>、1960年頃に初めて、その散乱問題への適用が Lewin<sup>(46)</sup>、Hayashi<sup>(47),(48)</sup>により独立になされた。Lewin<sup>(46)</sup>は準静電近似を導入し、導波管内の不連続部における散乱特性の近似表現を求めた。Hayashi<sup>(47)</sup>は同時期に、開境界に関するディリクレ問題について複素関数論に基づく厳密な解法を確立したが、これは本質的には Lewin の手法の拡張となっている。

Erdogan ら<sup>(49)</sup>は1970年代初頭に、コーシー型<sup>1</sup>の特異積分方程式に対してモーメント法 (MM: Moment Method) による数値解析の手法を提案し、それを材料内の亀裂における応力問題に適用した。これは未知関数を適当な直交関数系の1次結合で近似したのち、試験関数を用いて連立1次方程式に帰着させるものである。ところが電磁波散

<sup>1</sup>本論文で取り扱う特異積分方程式は、その核関数(変数  $s, t$ )の  $t-s \rightarrow 0$  における主要項が次のいずれかの型をもつものとする。

(i) コーシー型:  $1/(t-s)$ , (ii) 対数型:  $\log|s-t|$ .

乱問題に同様の手法を適用しようとする場合、散乱体上の表面電流密度を未知関数とした積分方程式の特異核は、E波入射、H波入射に対してそれぞれ対数型、コーシー型となる。従ってこのときは、文献(49)の解析法を対数型の核に拡張しなければならない。この観点から、Frenkel<sup>(50)</sup>、Panasiuk ら<sup>(51)</sup>らは1980年代になって、特異積分方程式の数値解法の散乱問題への適用に着手し、両方の偏波に対する解析手順を提案した。しかしそこでは核関数の解析的分解が完全ではないため、数値処理上の効率の点からみて改善の余地を残している。

(2) 有限格子による散乱の解析 真空中に置いた1枚の平板導体による平面波の散乱問題は、電磁界理論における基本問題のひとつである。従ってこれに対しては、マチウ関数系を用いた変数分離解<sup>(52),(53)</sup>が得られると共に、準静電解や高周波漸近解などの近似解<sup>(54)</sup>も知られている。また、平板導体が2枚の場合には拡張されたウィーナー・ホッフ法による解析も報告されている<sup>(55),(56)</sup>。しかし誘電体領域や多数の平板導体を含む複雑な導波系に対しては、一般には数値解析を行わざるを得ない。その例として、種々の基底関数を用いたモーメント法による解析<sup>(28),(57)~(60)</sup>、並びに界の級数展開と境界整合に基づく計算<sup>(61)</sup>がある。これらは簡便ではあるが、数値解の収束性が必ずしもよいとは言えず、しかも具体的な導波素子への応用については述べられていない。

近年では、1.1節で述べたような格子の結合機能がしばしば研究の対象となっている。結合モード理論<sup>(39),(40)</sup>や摂動法<sup>(62),(63)</sup>は、境界の変形度や屈折率の変調度が小さいときに有効なものであるから、一般的には精度よい数値解析法を開発しておく必要がある。この観点から、導体円柱格子<sup>(7)</sup>、円弧形ストリップ格子<sup>(8)</sup>、方形溝形格子<sup>(64)</sup>による散乱に対する数値計算例が報告されている。しかし以上の解析はいずれ



も出力結合すなわちビーム放射特性に関するものであり、入力結合すなわちモード励振問題については十分には検討されていない。

- (3) 無限平板格子による散乱の解析 無限平板格子において境界値問題が解析的に取り扱えるのは、極めて特殊な場合に限られている。特に、任意の周波数で厳密解が得られるのは、平板が厚みのない完全導体であり、平板幅・周期比が $1/2$ で、かつ周囲が均質の自由空間の場合のみである。入射平面波の進行方向が平板導体面に垂直なときには、すでに1954年にBaldwinら<sup>(3)</sup>がウィーナー・ホッフ法による厳密解を発表していたが、この入射方向に関する制限を取り除くためには、1971年のLüneburgらの論文<sup>(4)</sup>まで待たなければならなかった。しかしそれから現在に至るまで、より一般的な条件のもとでの厳密解は報告されていない。一方、ある特定の周波数領域でのみ有効な解析解としては、変分法に基づく準静電近似解<sup>(5)</sup>、Wood Anomaly 近傍での摂動解<sup>(6)</sup>が知られている。

以上のことから、1970年代以降は計算機の使用を前提としたさまざまな数値解析法が開発され<sup>(9)~(27)</sup>、解析対象の範囲も、平板幅、格子の面数、入射波の偏波・伝搬方向を任意とした場合、更に誘電体スラブを挿入した場合へと拡張されてきた。これらの解法を分類すると、点整合法<sup>(9)~(12)</sup>、リーマン・ヒルベルト境界値問題の方法<sup>(13)~(15)</sup>、有限要素法<sup>(16)</sup>、回路網法<sup>(17),(18)</sup>、スペクトル領域法<sup>(19)~(24)</sup>、および積分方程式法<sup>(25)~(27)</sup>となる。以上のうち、1980年代後半以降の研究動向は、入射方向が必ずしも平板軸と直交しない任意の場合で、かつ誘電体スラブを導入したときの解析が主流となっている<sup>(11),(16),(20),(21),(23),(27)</sup>。

第1.1節で述べたとおり、この格子は偏波弁別の機能をもち、特に平板導体面および誘電体スラブを複数枚用いて平行に設置すれば、弁

別特性は向上することが知られてきた<sup>(11),(12),(21)~(24),(27)</sup>。しかしこれらのうち文献(12)を除いたものは、特定の格子サイズや周波数帯域に対する弁別特性の例を掲げているにすぎず、弁別特性の構造パラメータ依存性についての詳細な検討はない。また、アンテナ系に組み込む際には交さ偏波の抑圧という重要な要請があるにもかかわらず、共偏波・交さ偏波の各電力成分を明確に分けた検討は、いずれの文献でもなされていないようである。

### 1.3 本論文の構成

本論文では1.2節で述べた現状の問題点を踏まえて、周期的平板回折格子に平面電磁波が入射したときの散乱問題を、特異積分方程式法により精密に数値解析する。

第1章は序論であり、本研究の背景、国内外の研究状況、本論文の構成について述べている。

第2章では、特異積分方程式法に関する基本理論の研究と有効性の検証を行う。すなわち最初に、本論文の全体において参照の便宜を図るために、真空中に置いた滑らかなストリップ導体群による平面電磁波の散乱を採用し、特異積分方程式法を解析的な側面から解説する。次に、上記の内容を具体的な平板回折格子に対する表現に帰着させ、数値計算結果について検討する。なお定式化においては、入射波の伝搬方向、偏波は任意とするが、散乱体は完全導体で一様な断面形状をもつと仮定している。このため特異積分方程式は、E波に対応する対数型、H波に対応するコーシー型に対して独立に扱うことができる。

第2章における具体的な記述は次の順序で行う。最初に境界値問題を、導体上に流れる表面電流密度を未知関数とする第1種フレドホルム型連立

特異積分方程式の解法問題に帰着させる。次にチェビシェフ多項式系を基底関数、試験関数としたモーメント法を適用し、未知関数の展開係数が満たすべき連立1次方程式を導く。このとき数値的な近似能率が最良となるように、核関数には完全な解析的分解を施し、また未知関数の展開には端点条件を組み込む。以上で得られた連立1次方程式は第2種の形式をもつため、安定な数値解を与えることが保証される。この章の後半では、具体的な有限、無限の平板格子に対して本手法を適用する。特に無限格子の場合には、配列の周期性を利用して式を変形し、電磁界が各次数の「格子モード」の和で表現されること、また特定の1周期分の積分方程式を解くだけで十分であることを示す。最後に、平板格子に関する数値計算結果の収束性を調べることにより、本手法の有効性を確認すると共に、近似多項式の展開項数の選択に関する基準を得る。

第3章では、誘電体スラブの片面に置いた有限平板格子による導波モードの励振問題を解析する。入射波を平面波とし、偏波についてはE波、H波の両方を扱う。しかし簡単のために、導波系の構造と電磁界が共に平板導体の軸方向に一樣であるような2次元問題を考えよう。この章の積分方程式は、第2章で得た方程式に誘電体の影響を取り入れて一般化した形となっている。数値計算においては、入射電力の導波モード・放射波への分布状況、導波モードの励振効率、遠方放射界などの物理量に関する結果を掲げる。特に、励振効率特性の構造パラメータへの依存性に関しては詳細な計算を行い、それに基づいて励振素子を設計するための効果的なアルゴリズムを構築する。更にこのアルゴリズムの有効性を、具体的に使用周波数30 GHzに対する素子を設計することによって示す。

第4章では、2面の無限平板格子を平行に設置した素子による任意平面波の散乱問題を解析する。ここで、平板導体は両面とも薄い誘電体スラブで裏打ちされ、その間には空気コアが設けられているものとする。解析の

都合上、平板導体の配列周期は2面間で共通とするが、平板の幅および中心軸は互いにずれていてもよいとする。媒質の境界面から生ずる各散乱波の位相差による干渉を制御すれば、素子全体の反射特性・透過特性を最適化することができる。誘電体が存在しかつ入射方向が任意であるから、特異積分方程式は、対数型、コーシー型のものが互いに結合した形となる。すなわちこの特異積分方程式は、第2章で得た方程式に境界面の間の相互作用と誘電体の影響を取り入れて一般化した形となっている。このように本章の解析は、式表示は幾分繁雑ではあるが、数値処理上の打ち切り以外はまったく近似を加えていない精密なものである。数値計算は境界面の間で多重反射する高次の格子モードを十分な数だけ取り入れて行い、精度よい解が得られることを確認する。その上で、偏波弁別特性の格子構造パラメータに対する依存性、並びに交差偏波特性に関して定性的、定量的に詳しく調べ、従来の報告結果に比べて有効周波数帯域を広くできることを示す。それと共に、この依存性のデータに基づいて、弁別素子を設計するための効果的なアルゴリズムを構築する。最後にこのアルゴリズムの有効性を、具体的に4/6 GHz帯における素子を設計することによって示す。

第5章は結論であり、本研究の結果をまとめると共に、今後の展望について述べている。

図1.1には各章における内容の関係を示している。また、有限平板格子と無限平板格子の間には取扱い方に関して異なる部分があるため、それらの比較を表1.1に掲げておく。

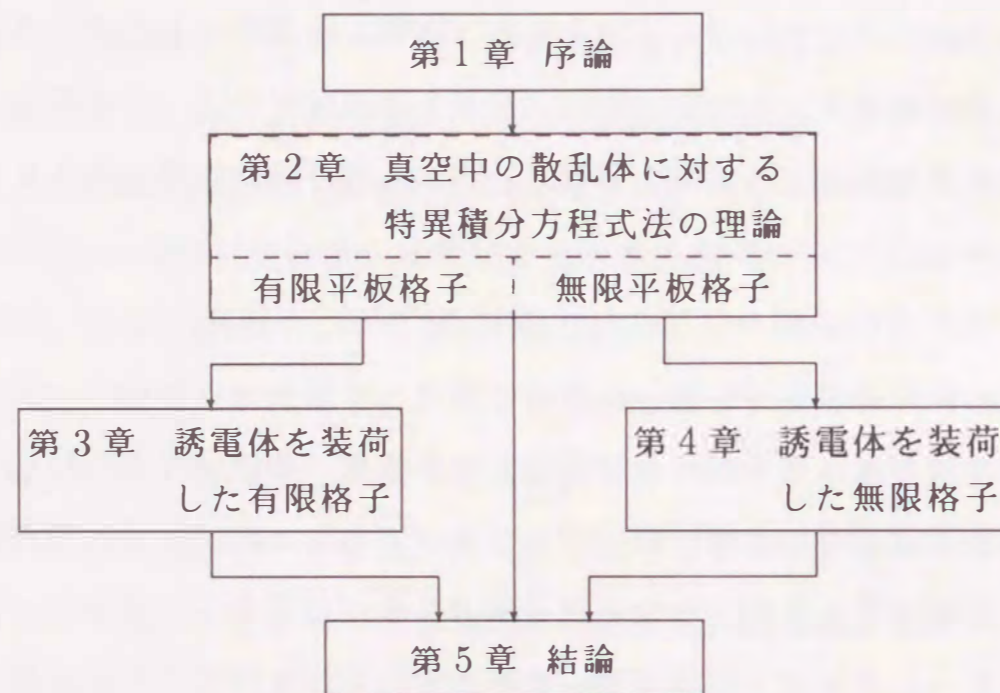


図 1.1: 論文の構成

表 1.1: 有限平板格子と無限平板格子の取扱い方に関する比較

着眼点	有限平板格子	無限平板格子	
特異積分方程式の演算域	平板導体領域の全体	特定の1周期内の平板導体上	
誘電体スラブの役割	導波路	平板導体の裏打ち支持	
本論文での取扱い	工学的機能	導波モードの励振	相異なる偏波の弁別
	入射平面波の伝搬方向と偏波	誘電体がないとき任意、誘電体があるとき2次元問題	誘電体の有無にかかわらず任意
	掲載箇所	第2.4節: 誘電体なし 第3章: 誘電体あり	第2.5節: 誘電体なし 第4章: 誘電体あり

## 第2章

### 特異積分方程式法

#### 2.1 まえがき

本章では、特異積分方程式法に関する基本理論の記述と有効性の実証を行う。最初に、本論文の全体において参照の便宜を図るために、真空中に置いたストリップ導体群による平面電磁波の散乱<sup>(65)</sup>を採用し、特異積分方程式法を解析的な側面から解説する。次に、上記の内容を具体的な平板回折格子に対する表現<sup>(29)(30)</sup>に帰着させ、数値計算結果について検討する。なお定式化においては、入射波の伝搬方向、偏波は任意とするが、散乱体は完全導体で一様な断面形状をもつと仮定している。このため特異積分方程式は、E波に対応する対数型、H波に対応するコーシー型に対して独立に扱うことができる。

具体的な記述は次の順序で行う。第2.2節では境界値問題を、導体上にかかる表面電流密度を未知関数とする第1種フレドホルム型連立特異積分方程式の解法問題に帰着させる。次に2.3節ではチェビシェフ多項式系を基底関数、試験関数としたモーメント法を特異積分方程式に適用し、未知関数の展開係数が満たすべき連立1次方程式を導く。このとき数値的な近似能率が最良となるように、核関数には完全な解析的分解を施し、未知関数の展開は端点条件を組み込んだ形で行う。以上で得られた連立1次方程式は第2種の形式をもつため、安定な数値解を与えることが保証されてい

る。第2.4節, 2.5節では, 具体的な有限, 無限の平板格子に対して本手法の検討を行う。特に無限格子の場合には, 配列の周期性を利用して式を変形し, 電磁界が各次数の「格子モード」の和の形で表現されること, 並びに特定の1周期分の積分方程式を解くだけで十分であることを示す。最後に, 平板格子に関する数値計算結果の収束性を調べることにより, 本手法の有効性を確認すると共に, 近似多項式の展開項数の選択に関する目安を得る。第2.6節には本章で得られた結果をまとめている。

なお, 時間因子は  $\exp(j\omega t)$  とし, その記述を省略する。

### 2.2 特異積分方程式の導出

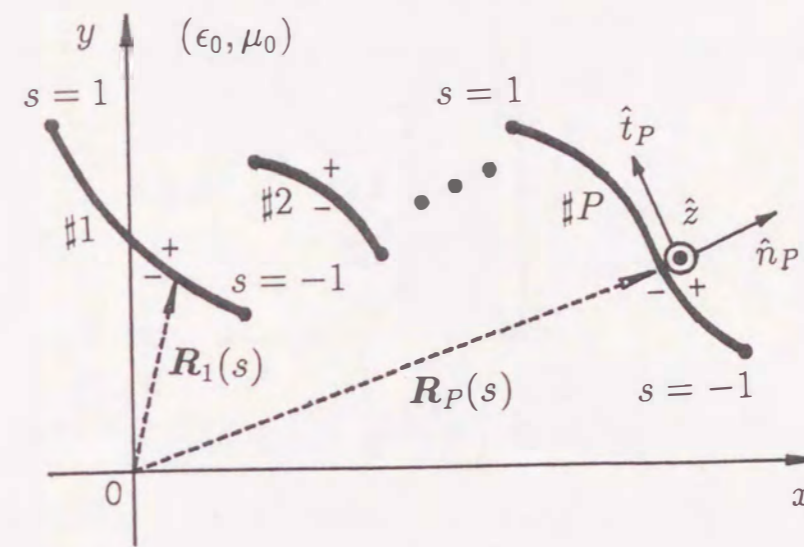
図2.1に示すような  $z$  方向に一様で厚みのない完全導体でできたストリップ群による電磁波の散乱問題を考えよう。このうち図(a)は導体が十分に滑らかな開曲線の断面をもつ一般的な場合を示しており, 本節と2.3節ではこの散乱体に対する解析法について述べる。図(b), (c)のように断面が周期的に並んだ線分である場合は, 上記の特殊なものとして扱うことができ, それぞれ2.4節, 2.5節で結果を与えることにする。本論文を通じて, 図(a)の一般的な散乱体に対しては「ストリップ導体」, 図(b), (c)の平らな散乱体に対しては「平板導体」と呼ぶことにする。なお, 媒質は誘電率  $\epsilon_0$ , 透磁率  $\mu_0$  の自由空間とする。

図2.1(a)の中に記入している種々の記号について説明しておこう。ストリップ導体の断面形状は  $C^\infty$  級関数で

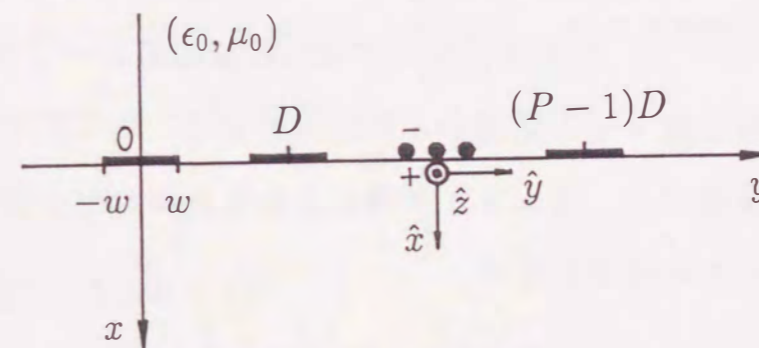
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_p(s) \quad (-1 < s < 1; p = 1, 2, \dots, P) \quad (2.1)$$

とパラメータ表示されている。但し,  $xy$  平面内の位置ベクトル, 形状関数はそれぞれ

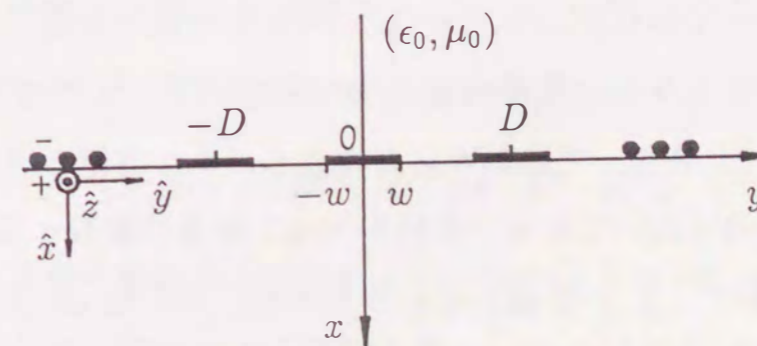
$$\mathbf{R} = \hat{x}x + \hat{y}y, \quad \mathbf{R}_p(s) = \hat{x}x_p(s) + \hat{y}y_p(s) \quad (2.2)$$



(a) 滑らかな断面をもつストリップ導体



(b) 有限平板格子



(c) 無限平板格子

図2.1: 散乱体の断面形状

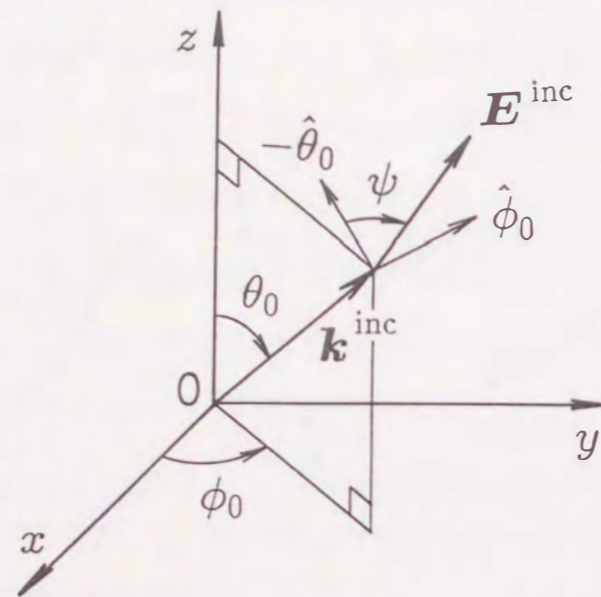


図 2.2: 入射角と偏波角

である. 上記号  $\hat{\cdot}$  は各方向への単位ベクトルを表す. また, ストリップ導体の表裏を記号  $+$ ,  $-$  で区別する. すなわち開曲線の一方の端点  $s = -1$  からもう一方の端点  $s = 1$  に向かって進んだとき, 右手側を表 ( $+$ ), 左手側を裏 ( $-$ ) と定義する. ストリップ導体上の各点における接線方向, 法線方向の単位ベクトルはそれぞれ

$$\hat{t}_p(s) = \frac{\mathbf{R}'_p(s)}{|\mathbf{R}'_p(s)|}, \quad \hat{n}_p(s) = \hat{t}_p(s) \times \hat{z} \quad (2.3)$$

と書ける. ここに,  $\mathbf{R}'_p(s)$  は  $\mathbf{R}_p(s)$  の変数  $s$  に関する微分を表す.

図 2.2 に示すように, 直線偏波した平面波 ( $\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$ ) が入射角  $\theta_0, \phi_0$ , 並びに偏波角  $\psi$  をもって入射するものとしよう. 波数ベクトル  $\mathbf{k}^{\text{inc}}$  は入射波の進行方向を向いており, その長さは入射波の波数に等しい. 仰角  $\theta_0$  は  $z$  軸から  $\mathbf{k}^{\text{inc}}$  に向けて測ったものであり, 方位角  $\phi_0$  は  $x$  軸から出発して  $\mathbf{k}^{\text{inc}}$  の  $xy$  平面への射影に向けて測ったものである. また, 偏波角  $\psi$  は単位ベクトル  $-\hat{\theta}_0$  から入射電界  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  に向けて測る. 入射電磁界 (上添字 inc: incident field) は, その電界振幅を 1 と選べば次のように表すこと

ができる.

$$\begin{pmatrix} E_x^{\text{inc}} \\ E_y^{\text{inc}} \\ E_z^{\text{inc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_0 \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ -\cos \theta_0 \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \exp(-j\mathbf{k}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 H_x^{\text{inc}} \\ \zeta_0 H_y^{\text{inc}} \\ \zeta_0 H_z^{\text{inc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi_0 & -\cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ -\cos \phi_0 & -\cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ 0 & \sin \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \exp(-j\mathbf{k}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.5)$$

但し

$$\mathbf{k}^{\text{inc}} = k_T(\hat{x} \cos \phi_0 + \hat{y} \sin \phi_0) + \hat{z}\gamma, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} + \hat{z}z \quad (2.6)$$

$$k_T = k_0 \sin \theta_0, \quad \gamma = k_0 \cos \theta_0, \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \zeta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad (2.7)$$

であり,  $\mathbf{r}$  は観測点の位置ベクトル,  $k_T$  は波数の断面 ( $xy$  平面) 内成分である. また, 入射波の電界と磁界の間には  $k_0 \zeta_0 \mathbf{H}^{\text{inc}} = \mathbf{k}^{\text{inc}} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}$  の関係がある. 式 (2.4), (2.5) より任意の入射波は, 次の 2 種類の偏波の重ね合せで表現されることが分かる.

- E 波:  $H_z^{\text{inc}} = 0, \psi = 0^\circ$
- H 波:  $E_z^{\text{inc}} = 0, \psi = 90^\circ$

導波系の一様性により, すべての界成分は共通因子  $\exp(-j\gamma z)$  をもつ. また,  $\theta_0 = 90^\circ$ , すなわちベクトル  $\mathbf{k}^{\text{inc}}$  が  $xy$  平面内に存在する場合は 2 次元問題となり, 以後の解析で  $k_T = k_0, \gamma = 0$  と置けばよい.

全電磁界を次のように入射波と散乱波の和で表そう.

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) + (\mathbf{E}^{\text{sc}}, \mathbf{H}^{\text{sc}}) \quad (2.8)$$

上式の右辺第 2 項の散乱波 (上添字 sc: scattered field) は ストリップ導体上に誘起される表面電流による寄与を表し, ヘルツポテンシャル  $\Pi^{\text{sc}}$  を用いて

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} = \nabla \nabla \cdot \Pi^{\text{sc}} + k_0^2 \Pi^{\text{sc}}, \quad \mathbf{H}^{\text{sc}} = \frac{jk_0}{\zeta_0} \nabla \times \Pi^{\text{sc}} \quad (2.9)$$

から導かれる。ここにヘルツポテンシャルはヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k_0^2)\Pi^{\text{sc}} = 0 \quad (2.10)$$

の解であり、2重積分で

$$\Pi^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{\zeta_0}{j4\pi k_0} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{n}_q(t) \times [\mathbf{H}(\mathbf{r}')]^{\pm}) \cdot \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dz' \right] |\mathbf{R}'_q(t)| dt \quad (2.11)$$

と表示される<sup>(66)</sup>。上式でベクトル  $\mathbf{r}' = \mathbf{R}_q(t) + \hat{z}z'$  はストリップ導体上の2次波源の点を表し、積分は導体の表面全体にわたる。また、表示  $[\cdot]^{\pm}$  はストリップ導体の表における界の値から裏における値を引いた差を意味する。関係式  $\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{R}_q(t)) \exp(-j\gamma z')$  と無限積分の公式<sup>(66)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\gamma z'} \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dz' = \frac{\pi}{j} e^{-j\gamma z} H_0^{(2)}(k_T |\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) \quad (2.12)$$

を用いれば、式(2.11)は単積分表示

$$\Pi^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = -\frac{\zeta_0}{4k_0} e^{-j\gamma z} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{R}_q(t)) H_0^{(2)}(k_T |\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) |\mathbf{R}'_q(t)| dt \quad (2.13)$$

に直される。ここに  $H_0^{(2)}(\cdot)$  は0次の第2種ハンケル関数であり、 $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{R}_q(t))$  は次式で定義されるストリップ導体上の表面電流密度である。

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{R}_q(t)) = \hat{n}_q(t) \times [\mathbf{H}^{\text{sc}}(\mathbf{R}_q(t))]^{\pm} \quad (2.14)$$

これはストリップ導体の表と裏における電流密度の値の和を表す。上式を

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{R}_q(t)) = \hat{z}\tilde{J}_z(\mathbf{R}_q(t)) + \hat{t}_q(t)\tilde{J}_\eta(\mathbf{R}_q(t)) \quad (2.15)$$

のように軸方向成分  $\tilde{J}_z$  と接線方向成分  $\tilde{J}_\eta$  に分解すれば、各成分はストリップ導体の端点近傍で次のように振る舞う<sup>(67)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{J}_z(\mathbf{R}_q(t)) &= O((1 \mp t)^{-1/2}) \\ \tilde{J}_\eta(\mathbf{R}_q(t)) &= O((1 \mp t)^{1/2}) \end{aligned} \right\} (t \rightarrow \pm 1) \quad (2.16)$$

但し、複号同順である。

式(2.13)で与えられるヘルツポテンシャルを、断面内  $(x, y)$  成分と軸方向  $(z)$  成分とに分けて書けば

$$\Pi_T^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4k_0} e^{-j\gamma z} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \int_0^t H_0^{(2)}(k_T |\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(\tau)|) |\mathbf{R}'_q(\tau)| d\tau \right] F_y^{(q)}(t) dt \quad (2.17)$$

$$\Pi_z^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j4k_0 k_T^2} e^{-j\gamma z} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 H_0^{(2)}(k_T |\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) (2k_0 F_z^{(q)}(t) + \gamma F_y^{(q)}(t)) dt \quad (2.18)$$

となる。ここで電流密度に関する新しい未知関数を次式で導入した<sup>1</sup>。

$$F_z^{(q)}(t) = -\frac{\zeta_0}{2k_0} \left[ jk_T^2 |\mathbf{R}'_q(t)| \tilde{J}_z(\mathbf{R}_q(t)) + \gamma \frac{d\tilde{J}_\eta(\mathbf{R}_q(t))}{dt} \right] \quad (2.19)$$

$$F_y^{(q)}(t) = \zeta_0 \frac{d\tilde{J}_\eta(\mathbf{R}_q(t))}{dt} \quad (2.20)$$

式(2.16)を考慮すれば、これらの未知関数はいずれも

$$F_u^{(q)}(t) = O((1 \mp t)^{-1/2}) \quad (u = z, y; t \rightarrow \pm 1) \quad (2.21)$$

と振る舞うことが分かる。式(2.17)の導出には部分積分および等式

$$\int_{-1}^1 F_y^{(q)}(t) dt = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, P) \quad (2.22)$$

を用いた。この式は電流密度の断面内成分  $\tilde{J}_\eta$  に関する端点条件のひとつの表現となっている。すなわち式(2.20)を変数  $t$  について  $-1$  から  $1$  まで積分し、端点条件を表す式(2.16)の第2式を用いれば、直ちに式(2.22)が導かれる。式(2.20)から分かるように、解析によって未知関数  $F_y^{(q)}(t)$  を決定したとしても、実際の電流密度  $\tilde{J}_\eta(\mathbf{R}_q(t))$  に関してはその微分値が求められたにすぎない。従って、その未定の定数分を決定するための条件として、式(2.22)は重要な役割を果たす。

<sup>1</sup>未知関数  $F_z^{(q)}(t)$ ,  $F_y^{(q)}(t)$  は、すべての散乱体の断面が図2.1(b), (c)のように  $y$  軸に平行で、かつ  $\gamma = 0$  なる2次元問題のとき、それぞれ  $z$  方向,  $y$  方向の電流密度のみを用いて表される。すなわち未知関数の下添字  $z, y$  は、このような特別な場合において電流の向きと一致するように選んでいる。

式 (2.17), (2.18) を式 (2.9) に代入すれば, 散乱界の表示

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{R}) = & -\frac{1}{4k_T^2} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \nabla_{\text{T}} H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) (2\gamma F_z^{(q)}(t) + k_0 F_y^{(q)}(t)) dt \\ & + \frac{k_0}{4} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \int_0^t H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(\tau)|) \mathbf{R}'_q(\tau) d\tau \right] F_y^{(q)}(t) dt \\ & + \hat{z} \frac{1}{j2} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) F_z^{(q)}(t) dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\zeta_0 \mathbf{H}^{\text{sc}}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} = & -\hat{z} \times \frac{1}{4k_T^2} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \nabla_{\text{T}} H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(t)|) (2k_0 F_z^{(q)}(t) + \gamma F_y^{(q)}(t)) dt \\ & + \hat{z} \times \frac{\gamma}{4} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \int_0^t H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(\tau)|) \mathbf{R}'_q(\tau) d\tau \right] F_y^{(q)}(t) dt \\ & + \frac{1}{j4} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \int_0^t \mathbf{R}'_q(\tau) \times \nabla_{\text{T}} H_0^{(2)}(k_{\text{T}}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_q(\tau)|) d\tau \right] F_y^{(q)}(t) dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

を得る. 但し,  $\nabla_{\text{T}} = \hat{x}(\partial/\partial x) + \hat{y}(\partial/\partial y)$  は微分演算子の断面内成分である. 式 (2.23), (2.24) は面  $z=0$  内での表示であるが, 任意の点における電磁界は関係式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^{\text{sc}}(\mathbf{R}) e^{-j\gamma z} \\ \mathbf{H}^{\text{sc}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}^{\text{sc}}(\mathbf{R}) e^{-j\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

から直ちに求められる. 式 (2.23), (2.24) の右辺において, 第1, 2項は  $(x, y)$  成分を, 第3項は  $z$  成分を表している. この第3項に注目すれば, 界成分  $E_z^{\text{sc}}$  ( $H_z^{\text{sc}}$ ) が電流  $F_z^{(q)}$  ( $F_y^{(q)}$ ) のみに依存することが分かる. すなわち散乱界も入射界と同様に, 電流  $F_z^{(q)}$  から発生する E波と電流  $F_y^{(q)}$  から発生する H波とに分解できることになる. このように両偏波を独立に取り扱うことができるので, これ以後は E波, H波の場合の表示をそれぞれ下添字  $z, y$  によって区別することにしよう.

ストリップ導体上で成り立つ境界条件

$$\left. \begin{aligned} E_z(\mathbf{R}_p(s)) &= 0 && \text{(E波)} \\ \hat{n}_p(s) \cdot \nabla_{\text{T}} H_z(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_p(s)} &= 0 && \text{(H波)} \end{aligned} \right\} \quad (-1 < s < 1; p = 1, 2, \dots, P) \quad (2.26)$$

を式 (2.23), (2.24) に適用すれば, 連立積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 K_u^{(pq)}(s, t) F_u^{(q)}(t) dt &= G_u^{(p)}(s) \\ (-1 < s < 1; p = 1, 2, \dots, P; u = z, y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

が導かれる. ここに核関数は距離関数  $R_{pq}(s, t) = |\mathbf{R}_p(s) - \mathbf{R}_q(t)|$  を用いて

$$K_z^{(pq)}(s, t) = \frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(k_{\text{T}} R_{pq}(s, t)) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} K_y^{(pq)}(s, t) &= \frac{\pi}{j2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(k_{\text{T}} R_{pq}(s, t)) \right. \\ &\quad \left. - k_{\text{T}}^2 \int_0^t \mathbf{R}'_p(s) \cdot \mathbf{R}'_q(\tau) H_0^{(2)}(k_{\text{T}} R_{pq}(s, \tau)) d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

で定義され, また非斉次関数は次式で与えられる.

$$G_z^{(p)}(s) = E_z^{\text{inc}}(\mathbf{R}_p(s)) \quad (2.30)$$

$$G_y^{(p)}(s) = 2\zeta_0 \left( y'_p(s) \frac{\partial H_z^{\text{inc}}(\mathbf{R})}{\partial x} - x'_p(s) \frac{\partial H_z^{\text{inc}}(\mathbf{R})}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_p(s)} \quad (2.31)$$

変数  $R_{pq}(s, t)$  が零に近づいたとき, すなわち  $p=q$  かつ  $s \rightarrow t$  のときのハンケル関数の対数的特異性を考慮して, 式 (2.28), (2.29) を特異部分と有界部分とに分解しよう. この操作により, 次の第1種フレドホルム型連立特異積分方程式 (SIE: Singular Integral Equations) が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 [\delta_{pq} \log |s-t| + \tilde{K}_z^{(pq)}(s,t)] F_z^{(q)}(t) dt &= G_z^{(p)}(s) \\ \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^P \int_{-1}^1 \left[ \frac{\delta_{pq}}{t-s} + \tilde{K}_y^{(pq)}(s,t) \right] F_y^{(q)}(t) dt &= G_y^{(p)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (-1 < s < 1; p = 1, 2, \dots, P) \quad (2.32)$$

但し、式(2.32)の第2式の積分はコーシーの主値の意味で定義されたものである。また、核関数  $\tilde{K}_u^{(pq)}(s,t)$  は

$$\tilde{K}_z^{(pq)}(s,t) = K_z^{(pq)}(s,t) - \delta_{pq} \log |s-t| \quad (2.33)$$

$$\tilde{K}_y^{(pq)}(s,t) = K_y^{(pq)}(s,t) - \frac{\delta_{pq}}{t-s} \quad (2.34)$$

で定義され、これらは特異性が除去された有界な関数である。ここに記号  $\delta_{pq}$  はクロネッカのデルタである。

### 2.3 モーメント法による数値解析

特異積分方程式(2.32)にモーメント法(MM: Moment Method)を直接適用し、連立1次方程式に帰着させることにしよう。式(A.1)で定義される第1種チェビシェフ多項式を基底関数に選び、未知関数  $F_u^{(p)}(t)$  をその有限項で

$$F_u^{(p)}(t) \approx \sum_{n=0}^N \frac{f_{un}^{(p)} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (u = z, y) \quad (2.35)$$

と近似する。ここで荷重因子  $1/\sqrt{1-t^2}$  は関数  $F_u^{(p)}(t)$  が式(2.21)の端点条件を満足するように決めている。なお式(2.35)を式(2.22)に代入し、式(A.5)で与えられるチェビシェフ多項式系の直交性を用いれば、 $f_{y0}^{(p)} = 0$  を容易に導くことができる。従って式(2.35)のうち  $u = y$  に対する式では、総和の下限を  $n = 1$  としてよいことになる。

次に核関数の取扱い方について述べよう。式(2.28)、(2.29)に含まれるハンケル関数に対してその級数表示<sup>(68)</sup>を参照し、このうち対数関数

$\log |s-t|$  を含む部分を分離すれば、式(2.33)、(2.34)で定義される関数  $\tilde{K}_z^{(pq)}(s,t)$  は次の形に表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_u \tilde{K}_u^{(pq)}(s,t) &= \delta_{pq} K_u^{(0,p)}(s,t) \log |s-t| + K_u^{(1,pq)}(s,t) \\ (\mathcal{D}_z &= 1; \mathcal{D}_y = \partial/\partial t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

但し、右辺の関数は具体的には次のように書かれる。

$$K_z^{(0,p)}(s,t) = J_0(k_T R_{pp}(s,t)) - 1 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} K_y^{(0,p)}(s,t) &= \frac{k_T^2}{2} \left[ \mathbf{R}'_p(s) \cdot \mathbf{R}'_p(t) J_0(k_T R_{pp}(s,t)) \right. \\ &\quad \left. - \left( \mathbf{R}'_p(s) \cdot \mathbf{R}'_p(t) + 2 \frac{\partial R_{pp}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial R_{pp}(s,t)}{\partial t} \right) J_2(k_T R_{pp}(s,t)) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$K_z^{(1,pq)}(s,t) = \frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(k_T R_{pq}(s,t)) - \delta_{pq} J_0(k_T R_{pp}(s,t)) \log |s-t| \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} K_y^{(1,pq)}(s,t) &= \frac{k_T^2}{2} \left\{ \mathbf{R}'_p(s) \cdot \mathbf{R}'_q(t) \right. \\ &\quad \cdot \left[ \frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(k_T R_{pq}(s,t)) - \delta_{pq} J_0(k_T R_{pp}(s,t)) \log |s-t| \right] \\ &\quad - \left( \mathbf{R}'_p(s) \cdot \mathbf{R}'_q(t) + 2 \frac{\partial R_{pq}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial R_{pq}(s,t)}{\partial t} \right) \\ &\quad \cdot \left[ \frac{j\pi}{2} H_2^{(2)}(k_T R_{pq}(s,t)) - \delta_{pq} J_2(k_T R_{pp}(s,t)) \log |s-t| \right] \left. \right\} \\ &\quad + \delta_{pq} / (t-s)^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここに  $J_n(\cdot)$  は  $n$  次の第1種ベッセル関数である。ところで文献(50)、(51)では式(2.36)のような分解を行わず、対数関数と多項式との積をそのまま多項式展開しているが、その近似精度はよくない。なぜなら  $(t-s)^{2m} \log |t-s|$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) の  $2m$  階微分は  $s \rightarrow t$  のとき発散するが、数値解析の理論でよく知られているように、近似多項式の理論誤差はこの高階微分のオーダーとなるからである。これに対して、式(2.37)~(2.40)は見かけ上は円柱



関数および対数関数を含んでいるが、 $\mathbf{R}_p(s) \in C^\infty$  であるため実質的には2変数  $s, t$  に関する無限多項式である。従ってこれらの関数は、次のように有限項の多項式によって精度よく近似される。

$$\left. \begin{aligned} K_z^{(\sigma)}(s, t) &\approx \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \kappa_{zmn}^{(\sigma)} T_m(s) T_n(t) \\ K_y^{(\sigma)}(s, t) &\approx \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \kappa_{ymn}^{(\sigma)} U_{m-1}(s) U_{n-1}(t) \end{aligned} \right\} ((\sigma) = (0, p) \text{ または } (1, pq)) \quad (2.41)$$

但し、 $U_{n-1}(\cdot)$  は式 (A.1) で定義される第2種チェビシェフ多項式である。内挿多項式 (A.14) を用いれば、式 (2.41) 中の展開係数は2重級数で

$$\kappa_{zmn}^{(\sigma)} = \frac{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{n0})}{(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} K_z^{(\sigma)}(t_i^{(1)}, t_j^{(1)}) T_m(t_i^{(1)}) T_n(t_j^{(1)}) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ymn}^{(\sigma)} &= \frac{4}{(N+1)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [1 - (t_i^{(2)})^2][1 - (t_j^{(2)})^2] K_y^{(\sigma)}(t_i^{(2)}, t_j^{(2)}) \\ &\quad \times U_{m-1}(t_i^{(2)}) U_{n-1}(t_j^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

と表される。但し、内挿点  $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}$  は式 (A.19) で与えられる。近似のオーダーは、関数  $K_z^{(\sigma)}(s, t)$  では  $s^N t^N$  まで、関数  $K_y^{(\sigma)}(s, t)$  では  $s^{N-1} t^{N-1}$  までである。式 (2.42), (2.43) に含まれる2重級数を計算する際に、両変数が一致したときの核関数の値が必要となる。これは一般に  $\infty - \infty$  の形となるので、確定値を次にまとめておこう。

$$K_z^{(0,p)}(t, t) = 0 \quad (2.44)$$

$$K_y^{(0,p)}(t, t) = \frac{k_T^2}{2} |\mathbf{R}'_p(t)|^2 \quad (2.45)$$

$$K_z^{(1,pq)}(t, t) = C + \log \frac{k_T |\mathbf{R}'_p(t)|}{2} + \frac{j\pi}{2} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} K_y^{(1,pp)}(t, t) &= \frac{k_T^2}{2} |\mathbf{R}'_p(t)|^2 \left( C + \log \frac{k_T |\mathbf{R}'_p(t)|}{2} + \frac{j\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathbf{R}'_p(t)|^2} \left[ \frac{(\mathbf{R}'_p(t) \cdot \mathbf{R}''_p(t))^2}{|\mathbf{R}'_p(t)|^2} - \frac{3|\mathbf{R}''_p(t)|^2 + 2\mathbf{R}'_p(t) \cdot \mathbf{R}'''_p(t)}{6} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

ここに  $C$  はオイラーの定数<sup>(68)</sup>である。

核関数と同様に、式 (2.30), (2.31) の非斉次関数も内挿多項式で

$$\left. \begin{aligned} G_z^{(p)}(s) &\approx \sum_{m=0}^N g_{zm}^{(p)} T_m(s) \\ G_y^{(p)}(s) &\approx \sum_{m=1}^N g_{ym}^{(p)} U_{m-1}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

と近似しておく。ここに展開係数は次式から求められる。

$$g_{zm}^{(p)} = \frac{2 - \delta_{m0}}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} G_z^{(p)}(t_i^{(1)}) T_m(t_i^{(1)}) \quad (2.49)$$

$$g_{ym}^{(p)} = \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N [1 - (t_i^{(2)})^2] G_y^{(p)}(t_i^{(2)}) U_{m-1}(t_i^{(2)}) \quad (2.50)$$

式 (2.35), (2.36), (2.41), (2.48) を式 (2.32) に代入し、付録 A に与えられたチェビシェフ多項式の性質を活用しながら、変数  $t$  に関する積分を解析的に評価する。こうして方程式系の第1式、第2式は、それぞれ多項式系  $\{T_n(s)\}, \{U_{n-1}(s)\}$  の1次結合の形に変形される。よって第1式、第2式にそれぞれ試験関数  $T_m(s)/\sqrt{1-s^2}$  ( $m=0, 1, \dots, N$ ),  $U_{m-1}(s)\sqrt{1-s^2}$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) を乗じ、変数  $s$  に関して  $-1$  から  $1$  まで積分すると、最終的に連立1次方程式

$$\sum_{q=1}^P \sum_{n=0}^N k_{zmn}^{(pq)} f_{zn}^{(q)} = g_{zm}^{(p)} \quad (p=1, 2, \dots, P; m=0, 1, \dots, N) \quad (2.51)$$

$$\sum_{q=1}^P \sum_{n=1}^N k_{ymn}^{(pq)} f_{yn}^{(q)} = g_{ym}^{(p)} \quad (p=1, 2, \dots, P; m=1, 2, \dots, N) \quad (2.52)$$

を得る. 但し

$$k_{zmn}^{(pq)} = \delta_{pq} \left( \delta_{mn} \tilde{\lambda}_n + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \kappa_{zij}^{(0,p)} \sum_{k=0}^{2N} \tilde{\lambda}_k v_{jnk}^{(1)} v_{ikm}^{(1)} \right) + \frac{\kappa_{zmn}^{(1,pq)}}{2 - \delta_{n0}} \quad (2.53)$$

$$k_{ymn}^{(pq)} = \delta_{pq} \left( \delta_{mn} - \tilde{\lambda}_n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_{yij}^{(0,p)} \sum_{k=0}^{2N} \tilde{\lambda}_k v_{jnk}^{(2)} v_{ikm}^{(3)} \right) - \tilde{\lambda}_n \frac{\kappa_{ymn}^{(1,pq)}}{2} \quad (2.54)$$

である. ここで記号  $\tilde{\lambda}_n$ ,  $v_{jnk}^{(\cdot)}$  は式 (A.13), (A.19) で定義した. 解析処理は以上で完了し, 以後は式 (2.51), (2.52) を数値的に解けばよい.

以上の連立1次方程式の構造について考察しておこう. 式 (2.53), (2.54) を考慮すれば, 式 (2.51), (2.52) は次の形に書くことができる.

$$\tilde{\lambda}_m f_{zm}^{(p)} + \sum_{q=1}^P \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{zmn}^{(pq)} f_{zn}^{(q)} = g_{zm}^{(p)} \quad (p = 1, 2, \dots, P; m = 0, 1, \dots, N) \quad (2.55)$$

$$f_{ym}^{(p)} + \sum_{q=1}^P \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{ymn}^{(pq)} f_{yn}^{(q)} = g_{ym}^{(p)} \quad (p = 1, 2, \dots, P; m = 1, 2, \dots, N) \quad (2.56)$$

但し, 係数  $\tilde{k}_{umn}^{(pq)}$  は式 (2.53), (2.54) から  $\delta_{pq}\delta_{mn}$  の部分を除いたものである. このように連立1次方程式 (2.55), (2.56) は, 数値的スキームの確立した第2種の形式<sup>(69),(70)</sup>をもつため, 安定な数値解を与えることが保証されている. この特長は, 式 (2.32) のように積分方程式の核関数を都合よく分解したことに起因する.

## 2.4 有限平板格子への応用

### 2.4.1 解析式の表現

図 2.1(b) に掲げた有限平板格子<sup>(29)</sup>について, 図 2.1(a) に対する一般的な解析式がどのような表現に帰着されるかを示しておこう. 平板導体の幅

は  $2w$ , 周期は  $D$ , 枚数は  $P$  であるから, 式 (2.2) の形状関数, 式 (2.3) の単位ベクトルは

$$\left. \begin{aligned} x_p(s) &= 0, & y_p(s) &= (p-1)D + ws \\ \hat{t}_p(s) &= \hat{y}, & \hat{n}_p(s) &= \hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (-1 < s < 1; p = 1, 2, \dots, P) \quad (2.57)$$

と置くことができる. これにより表面電流密度を表す式 (2.15) は

$$\tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_q(t)) = \hat{z}\tilde{J}_z(y_q(t)) + \hat{y}\tilde{J}_y(y_q(t)) \quad (2.58)$$

のように軸方向成分  $\tilde{J}_z$  と横断方向成分  $\tilde{J}_y$  に分解された形となる.

以上を 2.2 節の解析式に順次代入していけば, 積分方程式, 特異積分方程式はそれぞれ式 (2.27), 式 (2.32) とまったく同一になる. 但し, その中の各関数は次のように簡単化される.

- 式 (2.19), (2.20) の未知関数:

$$F_z^{(q)}(t) = -\frac{\zeta_0}{2k_0} \left[ jk_T^2 w \tilde{J}_z(y_q(t)) + \gamma \frac{d\tilde{J}_y(y_q(t))}{dt} \right] \quad (2.59)$$

$$F_y^{(q)}(t) = \zeta_0 \frac{d\tilde{J}_y(y_q(t))}{dt} \quad (2.60)$$

- 式 (2.28), (2.29) の核関数: 距離関数  $y_{pq}(s, t) = y_p(s) - y_q(t)$  を用いて

$$K_z^{(pq)}(s, t) = \frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(k_T |y_{pq}(s, t)|) \quad (2.61)$$

$$K_y^{(pq)}(s, t) = \frac{\pi}{j2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(k_T |y_{pq}(s, t)|) - k_T^2 w^2 \int_0^t H_0^{(2)}(k_T |y_{pq}(s, \tau)|) d\tau \right] \quad (2.62)$$

- 式 (2.30), (2.31) の非斉次関数:

$$G_z^{(p)}(s) = E_z^{\text{inc}}(\hat{y}y_p(s)) \quad (2.63)$$

$$G_y^{(p)}(s) = 2\zeta_0 w \frac{\partial H_z^{\text{inc}}(\hat{x}x + \hat{y}y_p(s))}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.64)$$

モーメント法に関する 2.3 節の議論も同様に成り立ち、最終的には式 (2.51), (2.52) の連立 1 次方程式を数値的に解けばよいことになる。

次項での数値計算のために遠方散乱界の表示式を求めておく。散乱界の式 (2.23), (2.24) において、変換式  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$  により 2 次元極座標系  $(R, \phi)$  を導入する。未知関数の展開式 (2.35), およびハンケル関数の  $R \rightarrow \infty$  のときの漸近形を代入し、式 (A.11) を用いて変数  $t$  に関する定積分を解析的に評価すれば、遠方散乱界の  $z$  成分は

$$\begin{bmatrix} E_z^{\text{sc}}(R, \phi) \\ \zeta_0 H_z^{\text{sc}}(R, \phi) \end{bmatrix} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_T R}} e^{-j(k_T R - \pi/4)} \Phi(\phi) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (2.65)$$

の形にまとめられる。但し、パターン関数  $\Phi(\phi)$  は

$$\Phi(\phi) \approx \frac{\pi}{2} \sum_{q=1}^P e^{jk_T(q-1)D \sin \phi} \sum_{n=0}^N f_{zn}^{(q)} j^{n-1} J_n(k_T w \sin \phi) \quad (\text{E 波}) \quad (2.66)$$

$$\Phi(\phi) \approx \frac{\pi}{4} \cot \phi \sum_{q=1}^P e^{jk_T(q-1)D \sin \phi} \sum_{n=1}^N f_{yn}^{(q)} j^{n-1} J_n(k_T w \sin \phi) \quad (\text{H 波}) \quad (2.67)$$

である。このパターン関数を用いて、 $z$  方向単位長当りの全散乱断面積が

$$\sigma^{\text{sc}} = \frac{2k_0^3}{\pi k_T^4} \int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 d\phi \quad (2.68)$$

から計算される。

光学定理<sup>(71)</sup>によれば、式 (2.68) の全散乱断面積  $\sigma^{\text{sc}}$  は

$$\bar{\sigma}^{\text{sc}} = -\frac{4k_0^2}{k_T^3} \text{Re} \Phi(\phi_0) \quad (2.69)$$

に等しい。これにより光学定理に関する誤差を

$$\epsilon^{\text{opt}} = 2 \frac{|\sigma^{\text{sc}} - \bar{\sigma}^{\text{sc}}|}{|\sigma^{\text{sc}} + \bar{\sigma}^{\text{sc}}|} \quad (2.70)$$

で定義する。数値計算においては、上式を解の正確さを検証するための一手段として用いることにする。

表 2.1: 真空中に置いた 1 枚の平板導体の垂直入射に対する全散乱断面積  $\sigma^{\text{sc}}/(4w)$  の収束状況.  $P = 1$ ,  $kw = 8$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$

$N$	E 波	H 波
2	0.0764224	0.2350804
4	0.6769734	1.0720254
6	0.9805261	0.9937308
8	1.0006517	1.0185229
10	0.9999033	1.0226736
12	0.9997312	1.0232742
14	0.9997541	1.0233178
16	0.9997561	1.0233186
18	0.9997562	1.0233187
厳密解 <sup>(53)</sup>	0.99976	1.02332

#### 2.4.2 数値解の精度

数値計算を実行することにより、特異積分方程式法の有効性を示そう。まず表 2.1, 表 2.2 では、平板導体が 1 枚かつ垂直入射である単純な場合における全散乱断面積の収束状況を調べる。次に図 2.3~図 2.5 では平板の枚数と入射角を変え、解の収束性、遠方界、近傍界を検討する。

表 2.1 は式 (2.35) における未知関数の展開項数  $N$  に対する数値解の収束状況を示したものである。項数  $N$  を 18 まで増やせば、両偏波共に全散乱断面積の結果は小数点以下 6~7 桁目まで収束することが分かる。厳密解は小数点以下 5 桁目までしか与えられていないが、その範囲内で SIE 法の結果は正確である。相対誤差が 0.01 % 以下、すなわち解が小数点以下 4 桁目まで合致するという基準を設ければ、 $N \geq 12$  が必要である。今の平板幅は  $8\lambda/\pi \approx 2.5\lambda$  であるから、上述の基準を言い換えれば必要項数  $N$  は平板幅  $1\lambda$  当たり 5 ということになる。

表 2.2 では前表と同様の全散乱断面積を、種々の平板幅について他の方法による結果と比較した。比較の対象は厳密解<sup>(53)</sup>, 級数展開法<sup>(61)</sup>, 高周波漸近解<sup>(54)</sup>である。参考のために、本論文の特異積分方程式 (SIE) 法およ

表 2.2: 真空中に置いた 1 枚の平板導体の垂直入射に対する全散乱断面積  $\sigma^{sc}/(4w)$  の比較.  $P = 1$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$  (括弧内の数字は連立 1 次方程式の次元)

[E 波]				
$kw$	厳密解 <sup>(53)</sup>	SIE	級数展開 <sup>(61)</sup>	漸近解 <sup>(54)</sup>
0.48	1.12162	1.12162 (4)	1.12162 (15)	—
1	0.99085	0.99085 (6)	0.99085 (15)	—
2	0.99478	0.99478 (7)	0.99478 (21)	—
4	0.99896	0.99896 (9)	0.99896 (21)	0.99880
8	0.99976	0.99976 (16)	—	0.99974
16	—	1.00002 (22)	—	1.00002
24	—	1.00000 (30)	—	1.00000

[H 波]				
$kw$	厳密解 <sup>(53)</sup>	SIE	級数展開 <sup>(61)</sup>	漸近解 <sup>(54)</sup>
0.4	0.02392	0.02392 (3)	0.02391 (21)	—
1	0.54540	0.54540 (4)	0.54545 (30)	—
2	1.18426	1.18426 (5)	1.18426 (30)	—
4	0.94244	0.94244 (9)	0.94244 (30)	0.94033
8	1.02332	1.02332 (14)	—	1.02345
16	—	0.99172 (22)	—	0.99171
24	—	1.00473 (35)	—	1.00473

び級数展開法については、小数点以下 5 桁目までの収束を達成するために必要な連立 1 次方程式の次元数を括弧中に示した<sup>2</sup>。漸近解法<sup>(54)</sup>を除く 3 種類の方法については、表に与えている範囲において数値解はほとんど一致している。ところが、連立 1 次方程式の大きさに注目すれば、SIE 法は級数展開法<sup>(61)</sup>の半分以下であるため極めて効率の高いものと言えよう。しかも、SIE 法は  $kw = 16, 24$  で高周波漸近解<sup>(54)</sup>とほぼ一致していることより、平板幅が広いときでも精度が高いことが分かる。例えば  $kw = 16$ , すなわち平板幅が約  $5\lambda$  のとき必要な次元数は 22 であるから、ここでも平板幅  $1\lambda$  当り展開項数を 5 以上をとれば十分という結論になる。

図 2.3 では更に本方法の有効性を実証するために、収束の速さを通常の方法<sup>(57)</sup>と比較している。通常の方法では基底関数として両偏波共通に階段関数を用い、試験関数としては E 波 (H 波) に対してディラックのデルタ関数 (三角形関数) を採用した。図 (a) は連立 1 次方程式の次元の逆数を横軸にとり、全散乱断面積をプロットしたものである。次元数を増すとともに両手法による結果は厳密値に収束するが、三角印で示す SIE 法の方が黒点で示す通常の方法よりも収束が速い。今の場合、平板幅は  $2\lambda$  であるが、SIE 法では 10 元程度の連立 1 次方程式を解いても十分な精度の結果が得られる。同様のことは図 (b) についても言える。すなわち式 (2.70) で定義した光学定理に関する誤差の減少の速さを比較すれば SIE 法の方がはるかに優れており、9 元の連立 1 次方程式を解いたとき両偏波に対してこの誤差は 0.01 % 以下である。一方、通常の方法では 15 元程度でも誤差はなお大きい。

図 2.4 は真空中に置いた有限平板格子による遠方散乱パターンを、最大値で規格化して両偏波について描いたものである。平板導体の幅は極めて狭い ( $0.1\lambda$ ) 場合であるから、式 (2.35) における未知関数の展開では最初

<sup>2</sup>SIE 法では E 波, H 波についてそれぞれ  $N+1, N$  である。

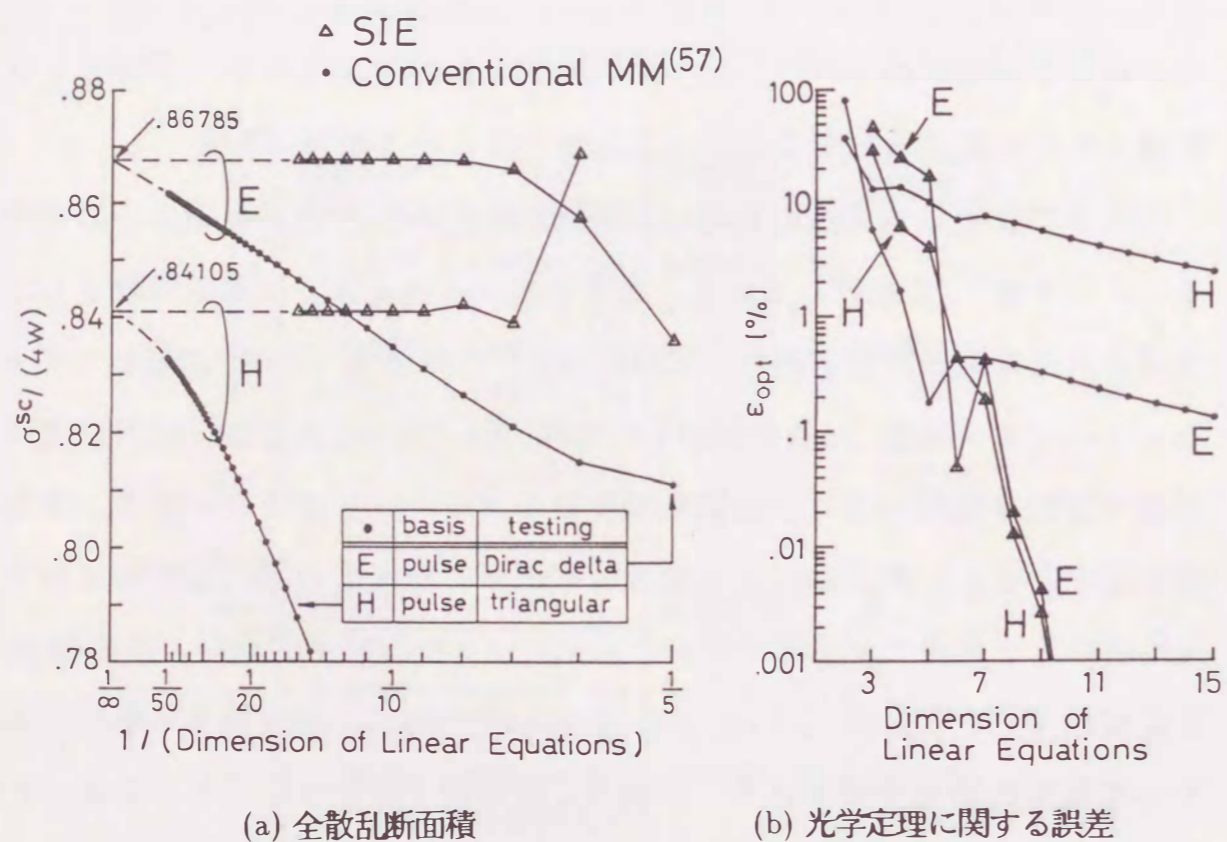


図 2.3: 真空中の1枚の平板導体による散乱における数値解の収束.  $P = 1, 2w = 2\lambda, \theta_0 = 90^\circ, \phi_0 = 60^\circ$

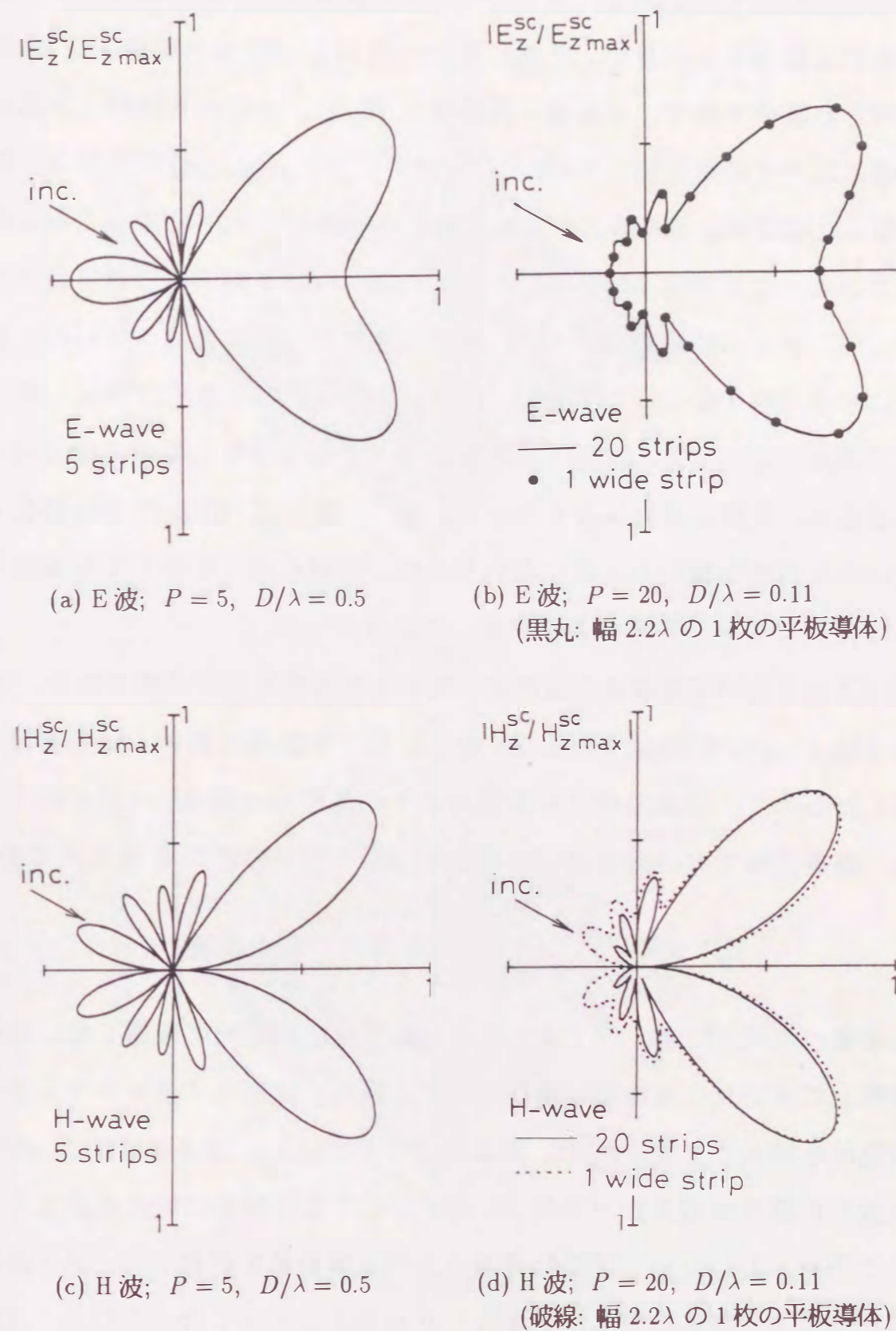


図 2.4: 有限平板格子に関する規格化遠方散乱パターン.  $\theta_0 = 90^\circ, \phi_0 = 60^\circ$ . 実線に対しては  $2w/\lambda = 0.1$

の2項を取れば十分である。図(a), (c)は平板導体が5枚の場合で、平板幅・周期比は0.2と小さい。それに対して図(b), (d)は平板導体を20枚に増やした場合であり、平板幅・周期比は10/11, すなわち間隙は平板導体の幅に比べて非常に狭い(0.01 $\lambda$ )。なお、図(a), (b), (c)の実線は、積分方程式に低周波近似を導入した解析法による結果<sup>(28)</sup>に一致することを確認している。ここでは20枚の場合(b), (d)について別の観点から検討してみよう。すなわち比較のために、格子間隙の部分を導体でつないだ1枚の広い平板導体(幅2.2 $\lambda$ )の散乱パターンを本論文の方法で計算し、黒丸および点線で記入した。図(b)はE波の場合で電流は平板導体の軸方向に流れるため、実線と黒丸はよく合っている。しかし図(d)はH波の場合で電流は平板導体を横切る方向に流れるため、間隙がたとえ狭くても電流の乱れは大きくなり、実線と点線の違いが顕著となる。

図2.5は2枚の平板導体の近傍界に関する実測結果との比較である。導波系は幅1 $\lambda$ の平板導体2枚を2 $\lambda$ 離して同一平面内に置き、線電流源で励振したもので、観測領域は平板導体のすぐ後方、一辺5 $\lambda$ の正方形内である。数値計算では、入射波は平面波ではなく、等方性のE波の円筒波

$$E_z^{inc} \propto e^{-jk_0 R} / \sqrt{R} \quad (R: \text{波源からの距離}) \quad (2.71)$$

として扱い、式(2.23), (2.24)における定積分は数値的に評価した。実験は近接して置いた2枚の広い導体の平行平板間に励振モノポールアンテナと散乱体を挿入して行った<sup>(72)</sup>。周波数は9 GHz ( $\lambda = 33.3$  mm)としたが、平行板の距離を半波長以下の約15 mmとして電界を常に板に垂直となるように保つことにより、完全なE波の2次元導波系を実現した。計算結果と測定結果は、散乱体を含む平面 $x=0$ に至るまでよく合っている。本解析法を用いて近傍界が正確に計算できることから、電流密度についても精度よく求められていることが推測される。

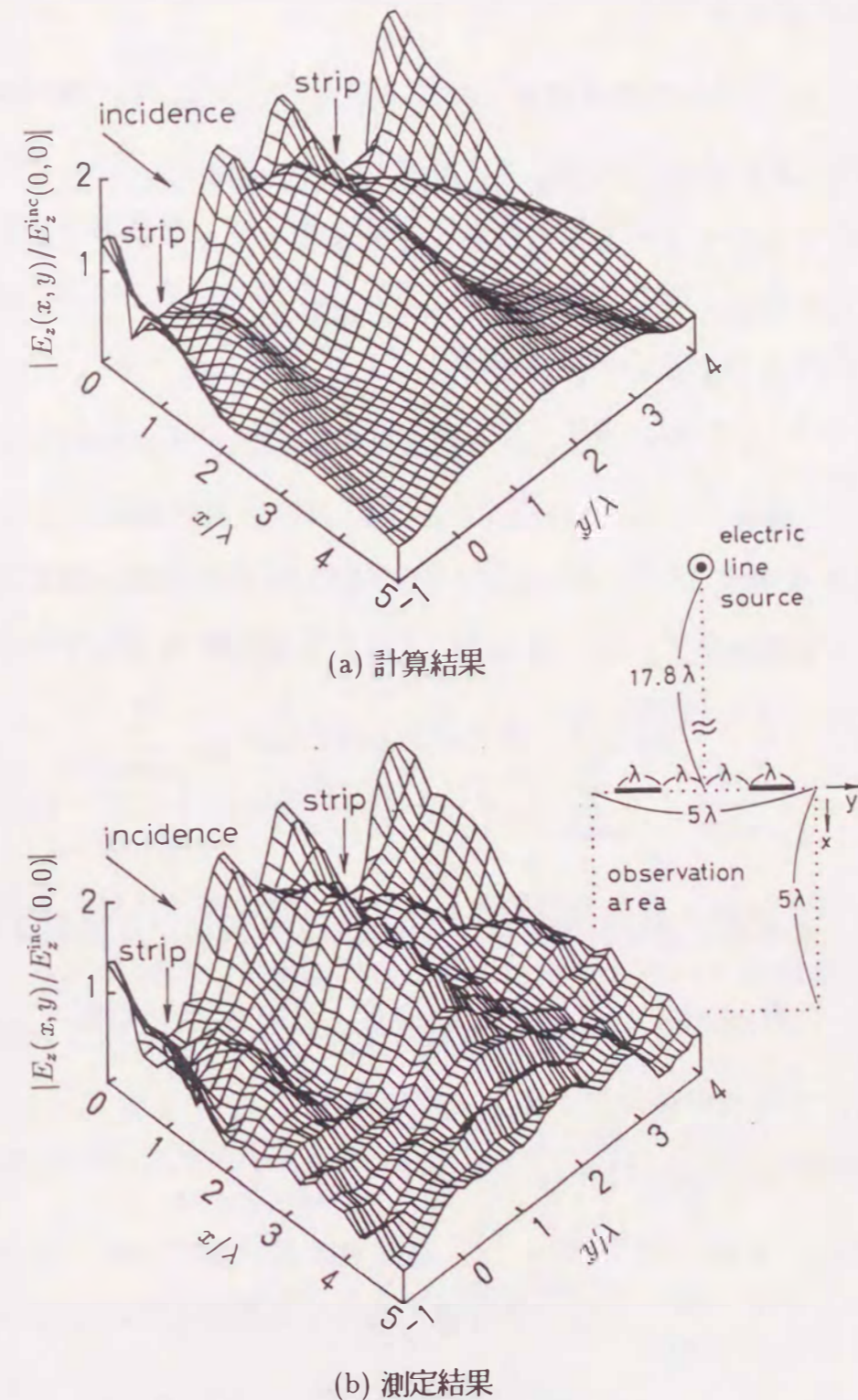


図2.5: 空気中の2枚の平板導体(幅1 $\lambda$ , 間隔2 $\lambda$ )の前方領域における近傍界。励振は平板導体を含む面から17.8 $\lambda$ 離れた線電流源により行う

## 2.5 無限平板格子への応用

## 2.5.1 特異積分方程式

図 2.1(c) に掲げた無限平板格子による散乱<sup>(30)</sup>に関して、無限個の散乱体が周期的に配列されていることを考慮に入れ、2.2 節、2.4.1 項における式表現に変形を施しながら特異積分方程式を導こう。平板導体の幅、周期は有限格子の場合と同じであるから、散乱体の形状を表す式は、式 (2.57) で導体の番号  $p$  の付け方のみを変更して、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_p(s) &= 0, & y_p(s) &= pD + ws \\ \hat{t}_p(s) &= \hat{y}, & \hat{n}_p(s) &= \hat{x} \end{aligned} \right\} (-1 < s < 1; p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.72)$$

空間内のベクトルポテンシャルを表す式 (2.11), (2.13), (2.17), (2.18) に含まれる有限和  $\sum_{q=1}^P$  は、無限和  $\sum_{q=-\infty}^{\infty}$  に修正する必要がある。これにより、例えば式 (2.13) は

$$\mathbf{\Pi}^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = -\frac{\zeta_0 w}{4k_0} e^{-j\gamma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_q(t)) H_0^{(2)}(k_T \sqrt{x^2 + (y - y_q(t))^2}) dt \quad (2.73)$$

となる。上式の電流密度の部分に、入射角と配列周期から定まる周期条件

$$\tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_q(t)) = e^{-jq\beta_0 D} \tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_0(t)) \quad (\beta_0 = k_T \sin \phi_0) \quad (2.74)$$

を代入し、無限和の部分にポアソンの和公式<sup>(73)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-jq\beta_0 D} H_0^{(2)}(k_T \sqrt{x^2 + (y - y_q(t))^2}) &= \frac{2}{D} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{0l}} e^{-j[\alpha_{0l}|x| + \beta_l(y - wt)]} \\ \alpha_{0l} &= (k_0^2 - \beta_l^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad (\text{Re } \alpha_{0l} \geq 0, \text{Im } \alpha_{0l} \leq 0) \\ \beta_l &= \beta_0 + 2l\pi/D \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

を適用すれば、導体番号  $q$  に関する総和からモード番号  $l$  に関する総和

$$\mathbf{\Pi}^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = k_0^{-2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\rho}_l e^{-j\alpha_{0l}|x|} \Psi_l(y, z) \quad (2.76)$$

へと変換される。但し

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_l &= -\frac{k_0 w \zeta_0}{2\alpha_{0l} D} \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_0(t)) e^{j\beta_l w t} dt \\ \Psi_l(y, z) &= \exp[-j(\beta_l y + \gamma z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

である。式 (2.76) の右辺の各項は振幅  $\boldsymbol{\rho}_l$ 、波数ベクトル  $\pm \hat{x}\alpha_{0l} + \hat{y}\beta_l + \hat{z}\gamma$  なる平面波の形をもち、これを「第  $l$  次の格子モード」と呼ぶことにする。また、式 (2.77) で定義した関数  $\Psi_l$  を「第  $l$  次のモード関数」と名付ける。式 (2.76), (2.77) より、ただひとつの平板導体上の電流密度  $\tilde{\mathbf{J}}(\hat{y}y_0(t))$  を用いて任意の点における電磁界が求められることが分かる。

同様にして電磁界を表す式 (2.23), (2.24) に含まれる有限和も無限和に修正した上で、境界条件 (2.26) を用いれば、式 (2.27) で番号  $p, q$  の範囲を整数全体に広げた連立積分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 K_u^{(pq)}(s, t) F_u^{(q)}(t) dt &= G_u^{(p)}(s) \\ (-1 < s < 1; p &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; u = z, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

が得られる。但し、その中に含まれる各関数の表現は式 (2.59)~(2.64) と同じである。式 (2.78) の両辺に  $e^{-jp\beta_0 D}$  を乗じ、その未知関数  $F_u^{(q)}(t)$  と非斉次関数  $G_u^{(p)}(s)$  に式 (2.74) と同様の周期条件

$$\left. \begin{aligned} F_u^{(q)}(t) &= e^{-jq\beta_0 D} F_u^{(0)}(t) \\ G_u^{(p)}(s) &= e^{-jp\beta_0 D} G_u^{(0)}(s) \end{aligned} \right\} (u = z, y) \quad (2.79)$$

を代入する。更に、核関数の無限和  $\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-jq\beta_0 D} K_u^{(pq)}(s, t)$  の部分にポアソンの和公式 (2.75) を適用すれば、積分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{j}{\alpha_{0l} D} e^{-j\beta_l w(s-t)} F_z^{(0)}(t) dt &= G_z^{(0)}(s) \\ \int_{-1}^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{0l} w}{\beta_l D} e^{-j\beta_l w(s-t)} F_y^{(0)}(t) dt &= G_y^{(0)}(s) \end{aligned} \right\} (-1 < s < 1) \quad (2.80)$$

と変形される。これは平板導体の番号  $p$  を含まないことより、どの平板導体の境界条件に着目しても、同一の積分方程式が得られることが確認された。すなわち、例えば座標原点を含む1周期内のみを考察の対象とすればよい。このことは無限の周期構造に関する境界値問題の特徴である。

式(2.80)から特異積分方程式を導くために、左辺から  $l=0$  の項を分離した上で、新しい関数、記号を

$$\left. \begin{aligned} F_u(t) &= e^{j\beta_0 w t} F_u^{(0)}(t) \\ \xi_u &= e^{j\beta_0 w s} G_u^{(0)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (u = z, y) \quad (2.81)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{z0} \\ \xi_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma^2/k_0^2 & -\beta_0\gamma/k_0^2 \\ 0 & -2\alpha_{00}^2 D/k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{z0} \\ \rho_{y0} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{zl} &= 1/(j\alpha_{0l}D) \\ \zeta_{yl} &= j\alpha_{0l}/\beta_l \end{aligned} \right\}, \quad l \neq 0 \quad (2.83)$$

$$\Delta = \pi w/D \quad (2.84)$$

で定義する。式(2.81)の第2式では変数  $s$  に関する依存性が打ち消されていることが容易に確かめられる。これより積分方程式(2.80)は

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \zeta_{zl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_z(t) dt &= -\xi_z - \xi_{z0} \\ \int_{-1}^1 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \zeta_{yl} e^{j2l(t-s)\Delta} F_y(t) dt &= \frac{j\pi}{\Delta} \xi_y - \xi_{y0} \end{aligned} \right\} \quad (-1 < s < 1) \quad (2.85)$$

となる。伝搬定数が  $|l| \rightarrow \infty$  のとき漸近的に  $\alpha_{0l} \sim -j2|l|\pi/D$ ,  $\beta_l \sim 2l\pi/D$  と振る舞うことを考慮して、記号

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}_{zl} &= \zeta_{zl} - 1/(2|l|\pi) \\ \tilde{\zeta}_{yl} &= \zeta_{yl} - \text{sgn}(l) \end{aligned} \right\}, \quad l \neq 0 \quad (2.86)$$

を導入すれば、式(2.85)は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_u(s, t) F_u(t) dt = G_u(s) \quad (-1 < s < 1; u = z, y) \quad (2.87)$$

と変形される。ここに核関数  $K_u(s, t)$ , 非斉次関数  $G_u(s)$  は

$$\left. \begin{aligned} K_z(s, t) &= - \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2|l|} e^{j2l(t-s)\Delta} = \log[2 \sin(|s-t|\Delta)] \\ K_y(s, t) &= -j\Delta \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \text{sgn}(l) e^{j2l(t-s)\Delta} = \Delta \cot[(t-s)\Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

$$G_u(s) = \xi_u + C_u \left( \xi_{u0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}_{ul} F_{ul} e^{-j2ls\Delta} \right) \quad (u = z, y) \quad (2.89)$$

で与えられる。但し、式(2.88)の右辺は無限和に関する公式<sup>(74)</sup>を用いて得た。また、式(2.89)に含まれる定数  $C_u$ , 未知関数のモーメント  $F_{ul}$  は

$$C_z = 1, \quad C_y = j\Delta/\pi \quad (2.90)$$

$$F_{ul} = \int_{-1}^1 F_u(t) e^{j2lt\Delta} dt \quad (u = z, y) \quad (2.91)$$

である。式(2.88)において  $s \rightarrow t$  のときの特異性を考慮して主要項を分離すれば、式(2.32)で記号  $\Sigma_{q=1}^P$ ,  $\delta_{pq}$ , 並びに上添字を除いた形の特異積分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [\log|s-t| + \tilde{K}_z(s, t)] F_z(t) dt &= G_z(s) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t-s} + \tilde{K}_y(s, t) \right] F_y(t) dt &= G_y(s) \end{aligned} \right\} \quad (-1 < s < 1) \quad (2.92)$$

が得られる。但し核関数  $\tilde{K}_u(s, t)$  は、式(2.33), (2.34)で上添字  $(pq)$ , 記号  $\delta_{pq}$  を取り除いた形で定義される。

### 2.5.2 数値解析法

第2.3項におけるモーメント法の適用に関して、変更点を述べよう。

未知関数  $F_u(t)$  を近似する際には、式(2.35)の両辺において上添字  $(p)$  を取り除いた形

$$F_u(t) \approx \sum_{n=0}^N \frac{f_{un} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (u = z, y) \quad (2.93)$$



を採用する. 無限格子の問題では有限格子のときと異なり, 式 (2.93) の  $u = y$  に対する式における総和の下限は  $n = 0$  のままである. これは関数  $F_y(t)$  が式 (2.81) のように位相項  $e^{j\beta_0 wt}$  を乗じて定義してあり, 従って  $f_{y0} = 0$  とはならないためである. 式 (2.91), (2.93), (A.11) を用いれば, 未知関数のモーメント  $F_{ul}$  が展開係数  $\{f_{um}\}$  により

$$F_{ul} \approx \pi \sum_{m=0}^N f_{um} j^m J_m(2l\Delta) \quad (u = z, y) \quad (2.94)$$

と表される. 但し  $J_m(\cdot)$  は  $m$  次の第1種ベッセル関数である. 式 (2.59), (2.60), (2.77), (2.91), (2.94) を用いて, 未知モード展開係数  $\rho_l$  と未知モーメント  $\{F_{ul}\}$  の間の関係式が

$$\begin{pmatrix} F_{zl} \\ F_{yl} \end{pmatrix} = j\alpha_{0l} D \begin{pmatrix} 1 - \gamma^2/k_0^2 & -\beta_l \gamma/k_0^2 \\ 0 & 2\beta_l/k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{zl} \\ \rho_{yl} \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

と求められる. 式 (2.94), (2.95) より展開係数  $\rho_l$  を電流密度の展開係数  $\{f_{um}\}$  で表すことができる. よって係数  $\{f_{um}\}$  の満たすべき連立1次方程式を導くことが, 解析における最後の目標となる.

核関数  $\tilde{K}_u(s, t)$  については, 式 (2.33), (2.34), (2.88) を参照し, その  $s - t = 0$  を中心とするべき級数展開を調べれば, 対数関数項が除去されていることが分かる. 従って式 (2.36) の右辺のような分解は行わなくてもよい. また, 無限格子の場合には式 (2.36) の左辺で用いたような微分演算子  $\mathcal{D}_y$  の導入も不要である. 以上により, 核関数を式 (2.41) と類似した形で次のように近似する.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_z(s, t) &\approx \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \kappa_{zmn} T_m(s) T_n(t) \\ \tilde{K}_y(s, t) &\approx \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^N \kappa_{ymn} U_{m-1}(s) T_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

但し, 展開係数  $\kappa_{ymn}$  は式 (A.14)~(A.17) を用いて2重級数で表現できる.

非斉次関数  $G_u(s)$  は式 (2.48) の両辺で上添字 ( $p$ ) を取り除いた形

$$\left. \begin{aligned} G_z(s) &\approx \sum_{m=0}^N g_{zm} T_m(s) \\ G_y(s) &\approx \sum_{m=1}^N g_{ym} U_{m-1}(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

で近似する. 但し, 展開係数  $\{g_{um}\}$  は式 (2.49), (2.50) のように数値的に評価するのではなく, 次のように解析的に求める. まず式 (2.94) を式 (2.89) に代入し, これを展開式 (2.48) に等しいと置く. 次に式 (A.5), (A.6) で与えられたチェビシェフ多項式系の直交性を用いて係数  $g_{um}$  を積分表示し, 積分公式 (A.11), (A.12) を適用すれば

$$g_{um} = \xi_u (\delta_{m0} \delta_{uz} + \delta_{m1} \delta_{uy}) + \sum_{n=0}^N \eta_{umn} f_{un} \quad (u = z, y) \quad (2.98)$$

の形を得る. 但し  $\eta_{umn}$  は, その中の無限級数を  $l = \pm L$  で打ち切れれば

$$\eta_{umn} = \begin{pmatrix} \pi \delta_{m0} \delta_{n0} \\ j\Delta \delta_{m1} \delta_{n0} \\ j\Delta^2 \delta_{m1} \delta_{n1} \end{pmatrix} \zeta_{u0} + j^{n-m} \sum_{\substack{l=-L \\ l \neq 0}}^L \begin{pmatrix} \pi(2 - \delta_{m0}) \\ -m/l \\ -m/l \end{pmatrix} \tilde{\zeta}_{ul} J_m(2l\Delta) J_n(2l\Delta) \quad (2.99)$$

(上から  $u = z$ ;  $u = y, \phi_0 \neq 0$ ;  $u = y, \phi_0 = 0$ )

となる. 但し,  $\zeta_{y0}$  は次のように定義される.

$$\zeta_{z0} = 1/(j\alpha_{00} D) \quad (2.100)$$

$$\zeta_{y0} = \begin{cases} j\alpha_{00}/\beta_0, & \phi_0 \neq 0 \\ -\alpha_{00} D/(2\pi), & \phi_0 = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

試験関数として式 (2.51), (2.52) を導いたときに使った関数系と同じものを採用すれば, 未知係数  $\{f_{un}\}$  に関する連立1次方程式が

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^N k_{zmn} f_{zn} &= \xi_z \delta_{m0} \quad (m = 0, 1, \dots, N) \\ \sum_{n=0}^N k_{ymn} f_{yn} &= \xi_y \delta_{m1} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

と求められる。しかし左辺の係数  $k_{umn}$  は、式 (2.53), (2.54) と異なり

$$\left. \begin{aligned} k_{zmn} &= \delta_{mn} \tilde{\lambda}_n + \kappa_{zmn} / (2 - \delta_{n0}) - \eta_{zmn} \\ k_{ymn} &= \delta_{mn} + \kappa_{ymn} / (2 - \delta_{n0}) - \eta_{ymn} \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

となる。ここで記号  $\tilde{\lambda}_n$  は式 (A.13) で定義している。式 (2.102) のうち下側の組は、 $N + 1$  個の未知数  $\{f_{yn}\}$  に対して  $N$  個の線形方程式を表しており、条件式が 1 個足りない。よってこれを可解とするために、端点条件を表す式 (2.22) に式 (2.81) を代入した形

$$\int_{-1}^1 F_y(t) e^{-j\beta_0 w t} dt = 0 \quad (2.104)$$

を付け加える。これは具体的には、式 (2.91), (2.94) を参照して

$$\sum_{n=0}^N j^{-n} J_n(\beta_0 w) f_{yn} = 0 \quad (2.105)$$

と表される。

次項での数値計算のために電力分布の表示式を求めておく。入射波および反射・透過波の電力は、1 周期分の長方形柱領域  $-D/2 < y < D/2$ ,  $0 < z < 1$  において、その断面を通過するポインティング電力を面積分することにより、それぞれ次のように得られる。

- 入射電力:

$$P^{\text{inc}} = (D/\zeta_0) \sin \theta_0 \cos \phi_0 \quad (2.106)$$

- 入射電力で規格化した第  $l$  次モードの反射電力:

$$\left. \begin{aligned} P_{r,l}^e &= \frac{\alpha_{0l} \sin \theta_0}{k_0 \cos \phi_0} |\rho_{zl}|^2 & (\text{E 波}) \\ P_{r,l}^h &= \frac{\alpha_{0l}^3}{k_0^3 \sin^3 \theta_0 \cos \phi_0} |\rho_{yl}|^2 & (\text{H 波}) \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

- 入射電力で規格化した第  $l$  次モードの透過電力:

$$\left. \begin{aligned} P_{t,l}^e &= P_{r,l}^e \Big|_{\rho_{zl} \rightarrow \rho_{zl} + \cot \theta_0 \tan \phi_0} & (\text{E 波}) \\ P_{t,l}^h &= P_{r,l}^h \Big|_{\rho_{yl} \rightarrow \rho_{yl} + \sec \phi_0} & (\text{H 波}) \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

以上により算出した散乱波の電力は、次の電力保存則を満足している。

$$\sum_{\nu=r,t} \sum_{\text{propag.} l} P_{\nu,l}^{\sigma} = 1 \quad (\sigma = e, h) \quad (2.109)$$

但し 2 番目の総和は、 $l$  がすべての伝搬モードの次数にわたること、すなわち不等式  $\text{Re} \alpha_{0l} > 0$  を満たすすべての整数値  $l$  をとることを意味する。

### 2.5.3 数値解の精度

特異積分方程式法が無限平板格子に対しても有効であることを、図 2.6～図 2.8 を用いて示そう。ここでは厳密解を参照しながら、未知関数の展開項数に対する透過・反射電力の誤差の減少の状況を調べる。

図 2.6 は式 (2.35) における未知関数の展開項数  $N$  をパラメータとし、式 (2.99) で計算に取り入れた最高次のモード番号  $L$  を横軸に取ったときの、特異積分方程式 (SIE) 法と通常の積分方程式 (CIE: Conventional Integral Equations) 法との収束状況の比較である。なお、CIE 法とは通常の積分方程式 (2.85) の核関数を分解することなくそのままモーメント法を適用する方法であり、その手順については付録 B に与えている。平板幅・周期比が  $1/2$ 、かつ垂直入射の場合であるから、ウィーナー・ホッフ法による厳密解<sup>(3)</sup>が参照できる。透過波の全電力の厳密解、数値解をそれぞれ  $P_t^{\text{exact}}$ ,  $P_t$  としたとき、相対誤差を

$$\varepsilon^{\text{rel}} = \frac{|P_t^{\text{exact}} - P_t|}{P_t^{\text{exact}}} \quad (2.110)$$

で定義する。図 (a), (b) が E 波の場合、図 (c), (d) が H 波の場合である。オーバーシュートによる誤差の局所的な増加を除けば、すべての折線においてモード数  $L$  が増えるにつれて誤差は減少し、次第に安定していくことが分かる。また、図 (b), (d) においては、図 (a), (c) に比べて周波数が高いので、誤差を同程度とするためには項数  $N$  をより大きくとる必要が

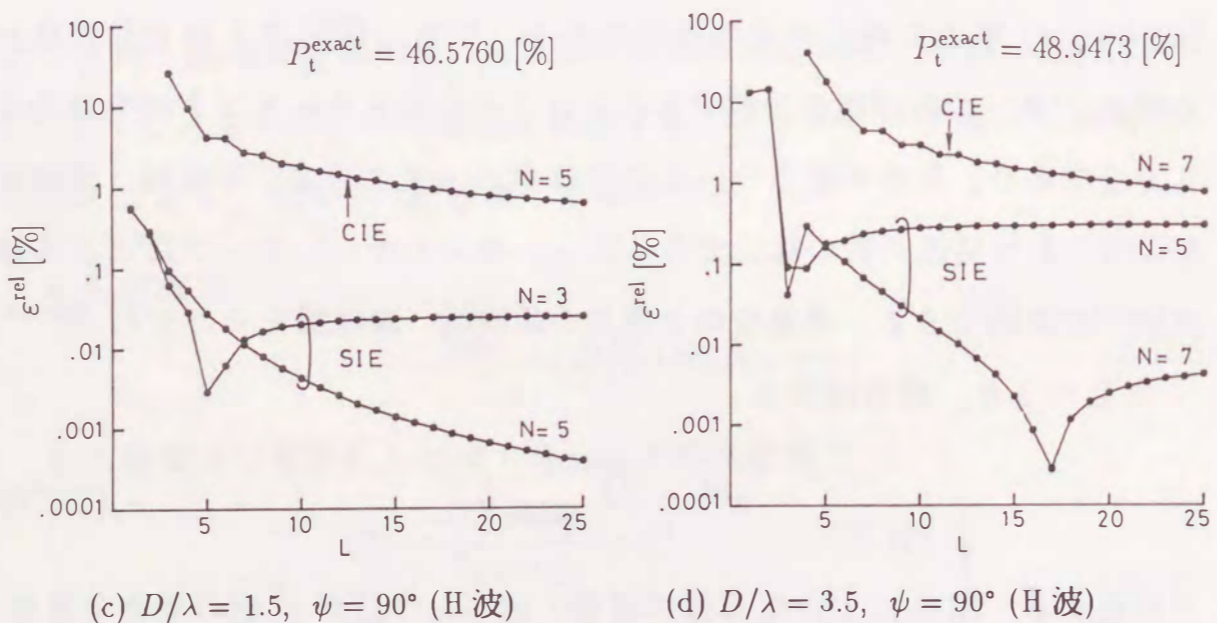
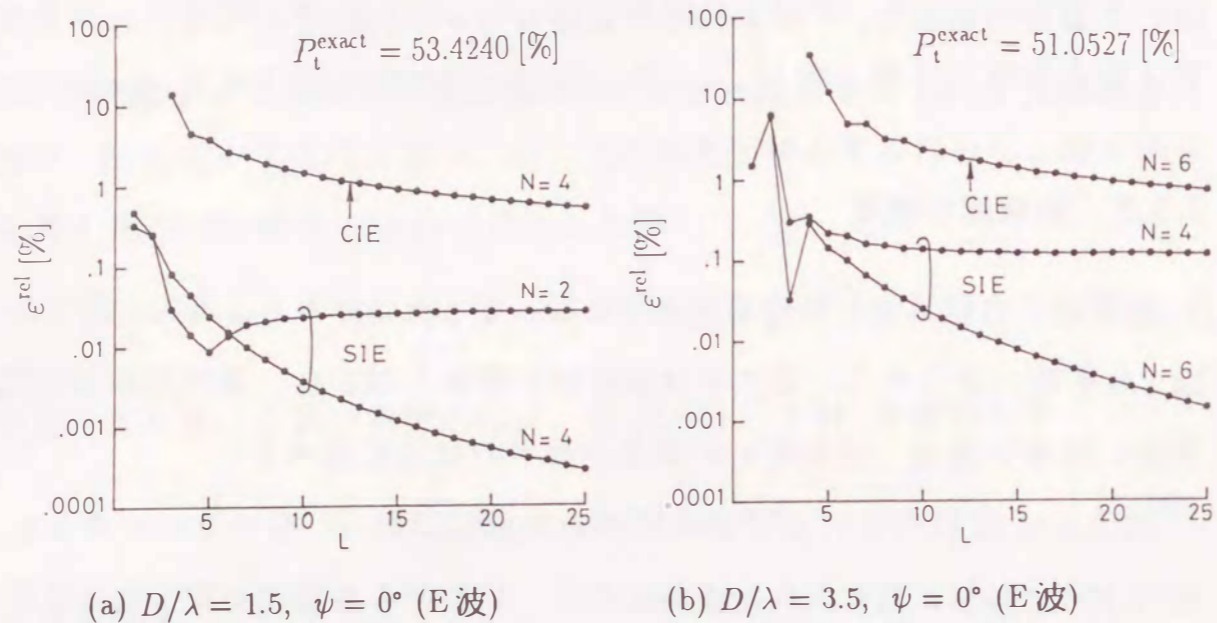


図 2.6: 無限平板格子における透過波の全電力の収束.  $2w/D = 0.5, \theta_0 = 90^\circ, \phi_0 = 0^\circ$

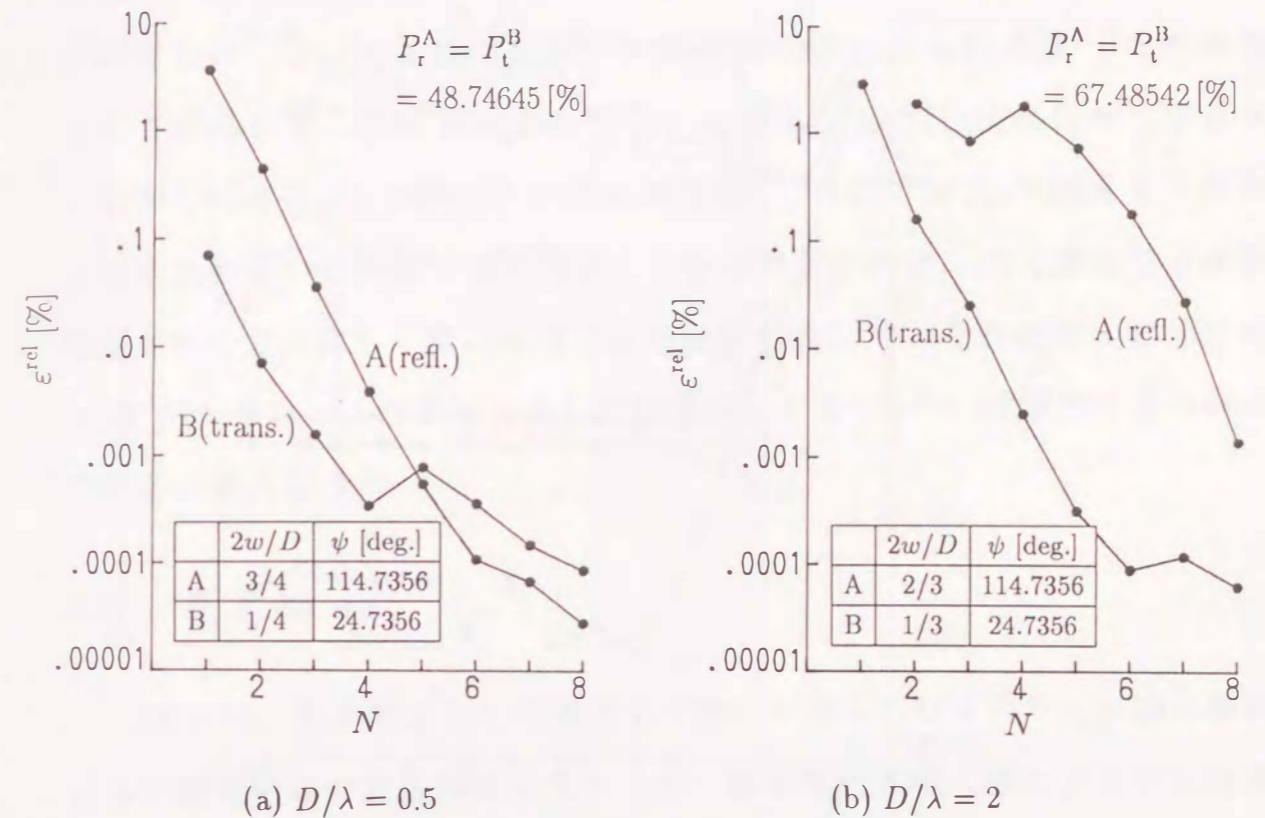


図 2.7: 無限平板格子において、平板導体・間隙の部分とを互いに入れ換えた構造に対する透過波・反射波の全電力の収束.  $\theta_0 = 60^\circ, \phi_0 = 35.2644^\circ$

ある. 同じ展開項数  $N$  に対する SIE 法と CIE 法の誤差を比較すると, 前者の方が 3 桁程度小さいことが分かる. モード数  $L$  についてはなるべく大きい値を選ぶことが望ましいが, 必要以上に大きくしても計算時間が長くなるだけで不経済である. 従って図 2.8 を除き, これ以後の図では打ち切り項数の間の関係を  $L = 3N$  と固定して数値計算を行う.

図 2.7 には平板導体の部分と間隙の部分とを互いに入れ換えた構造 A, B に対して, 偏波角  $\psi$  が互いに  $90^\circ$  だけ異なるときの電力分布の収束状況を示した. 電磁界の双対性により, 構造 A における反射電力の全体  $P_r^A$  は構造 B における透過電力の全体  $P_t^B$  に等しい. ここではスペクトル領域法 (SDA: Spectral Domain Approach) によって得られた外挿値<sup>(19)</sup>を厳密解として採用した. 本図における  $\phi_0$  と  $\psi$  の値が中途半端なものとなって

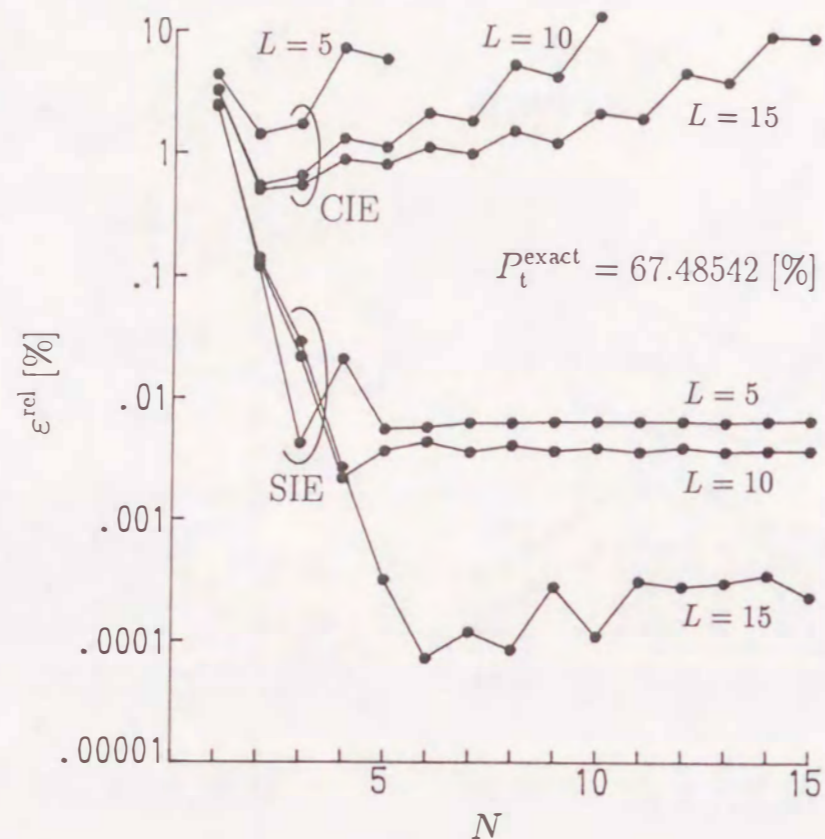


図 2.8: 無限平板格子における透過波の全電力の収束 (SIE), 並びに相対収束 (CIE).  $2w/D = 1/3$ ,  $D/\lambda = 2$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $\phi_0 = 35.2644^\circ$ ,  $\psi = 24.7356^\circ$

いるのは, 入射角, 偏波角の定義が文献 (19) とは異なるためである. 誤差をある一定値以下にするためには, 平板幅が広い構造 A の方が大きい展開項数  $N$  を必要とする<sup>3</sup>. 具体的には, 相対誤差を 0.1 % 以下にするためには, 項数  $N$  を  $10w/\lambda$  以上, すなわち平板幅  $1\lambda$  当り 5 以上を選べば十分である. 例えば図 (b) の A では  $2w/\lambda = 4/3$  であるから, 項数は  $N > 20/3$  すなわち 7 以上とすればよい. このとき, 電力保存則に関する誤差, すなわち式 (2.109) の両辺の差の絶対値は 0.01 % 以下になった.

図 2.8 は計算に取り入れた高次モード数  $L$  をパラメータとし, 展開項数  $N$  を横軸にとったときの, 特異積分方程式法 (SIE) と通常の積分方程

<sup>3</sup>図 (a) で  $N \geq 5$  における A と B の逆転, および図 (b) で  $N \geq 6$  における B の横這いは, 数値計算を有効数字 7 桁の単精度で行ったことによる丸め誤差の影響である. つまり, 電力値 [%] の小数点以下 4 桁目には常に誤差が残ってしまう. しかし, これは実用上はほとんど問題にならないほど小さいものである.

式法 (CIE) との収束状況の比較である. パラメータは図 2.7(b) の A の場合に等しい. ここでもスペクトル領域法 (SDA) による外挿値<sup>(19)</sup>を厳密解として採用した. 付録 B に示したように CIE 法は SIE 法に比べてはるかに簡便ではあるが, 項数  $N$  がある臨界値 (この図では 3) を越えると誤差は増え始める. これは「相対収束」と呼ばれるもので, 既に導波管不連続問題に対しては詳しく検討されてきた現象である<sup>(75)</sup>. それに対して SIE 法は  $N$  が大きいところでは安定した数値を与えるため<sup>4</sup>, 信頼性の高い解法であると言えよう.

## 2.6 まとめ

本章では, 基本問題として真空中に置いた滑らかなストリップ導体群による平面電磁波の散乱問題を取り上げ, 特異積分方程式法による解法理論を展開した. 次にこの解析内容を, 有限枚・無限枚の平板導体を平面上に周期的に並べた回折格子に対する表現に帰着させ, 数値解の精度を調べた.

本手法は, 解析的な観点からは, 次のような特長をもつ.

1. 核関数を単に特異部分と有界部分とに分解するだけでなく, 更に後者を対数的部分と代数的部分とに分解し, 多項式近似の対象を十分滑らかな代数的部分のみに限定している.
2. 未知関数を有限項の多項式で近似する際に, 導体の端点近傍での電流密度の振舞いを正確に表現するような荷重関数を導入している.
3. 解くべき連立 1 次方程式は数値的スキームの確立した第 2 種の形式をもっているため, 安定な数値解を与える.

また, 具体的な導体平板格子に対して数値計算を実行し, 以下のことを明らかにした.

<sup>4</sup>SIE に関して  $L = 15$ ,  $N \geq 11$  のデータでわずかな変動が見られるのは, 前の脚注と同じ理由による.

1. 有限格子に関して全散乱断面積の数値解の収束性を調べた結果、未知関数の展開項数を平板幅・波長比の5倍以上にとれば、厳密解との相対誤差、光学定理に関する誤差共に0.01%以下となることが判明した。また、遠方界については他の手法による結果と、近傍界については測定結果とそれぞれ比較することにより、本方法が散乱体の遠方・近傍の両方において正確な結果を与えることを示した。
2. 無限格子に関して散乱電力の数値解の収束性を調べた結果、未知関数の展開項数を平板幅・波長比の5倍以上にとれば、厳密解との相対誤差が0.1%以下、電力保存則に関する誤差が0.01%以下となることが判明した。また、本方法では相対収束の現象が発生しないことを示した。

このようにして、特異積分方程式法が高い精度および効率をもつことが実証された。

次章以降では、本章で展開した手法を適用して、有限および無限の導体平板格子が層状の誘電体領域を含んだ場合の特性について数値解析を実行する。

## 第3章

### 有限平板格子の導波モード励振特性

#### 3.1 まえがき

本章では、誘電体スラブの片面に置いた有限平板格子による導波モードの励振問題<sup>(31),(32)</sup>を特異積分方程式法により精密に数値解析し、その導波モード励振特性を解明する。第3.2節では、簡単のために導波系の構造と電磁界が共に平板導体の軸方向に一様であると仮定して、問題の定式化を行う。入射波はE偏波またはH偏波した平面波とする。第3.3節では積分方程式を、3.4節では特異積分方程式をそれぞれ求めるが、これらは誘電体の影響を取り入れて2.4節の結果を一般化した形となっている。この特異積分方程式は2.2節に掲げたものと形式的に同一であるので、モーメント法による数値解析も既に2.3節で述べたこととほとんど同じ内容になる。そこで数値解析に関する記述の繰り返しを避け、若干の変更点のみを3.4節の最後に示すことにしよう。第3.5節では導波モードの励振効率、遠方放射界などの具体的な物理量の式表現を記述する。第3.6節では数値計算を行い、その結果を物理的に検討する。特に、励振効率特性の構造パラメータへの依存性に関しては詳細な計算を行い、それに基づいて励振素子を設計するための効果的なアルゴリズムを構築する。更にこのアルゴリズムの有効性を、具体的に素子を設計することによって示す。第3.7節には本章で得られた結果をまとめている。