

## 柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系におけるスピル オーバ不安定現象とその対策

外本, 伸治

<https://doi.org/10.11501/3086571>

---

出版情報 : 九州大学, 1991, 博士 (工学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

## 第 5 章

### 弾性振動制御系の設計法の一提案

#### 5-1 はじめに

第3章・第4章を通して、モーダルフィルタにより無限次元系の状態を推定しモーダルコントロールに基づく状態フィードバック制御系を構成する場合、スピルオーバーにより不安定化するモードが存在することをみてきた。また Balas [3] により、他の状態推定法を用いた場合にも、不安定化モードが存在する可能性が指摘されている。ただし実際には、柔軟構造物にも微小ではあるが固有の構造減衰が存在するので、スピルオーバーにより不安定化するモードも必ず不安定となるとは限らない。しかし、固有構造減衰をあらかじめ精度よく知ることは非常に困難なので、設計した状態フィードバック制御系全体の安定性を保証することはむずかしい。

一方、第2章で示したように、出力フィードバックにより制御系を構成する場合、アクチュエータに collocate したセンサの出力をフィードバックすることにより制御系全体を安定化できることが知られている（: CDVFB 制御）。ただしこの方法では、アクチュエータとセンサを collocate しなければならないし、各モードの減衰比はその collocate 位置に依存する。したがって、一般にアクチュエータの位置には拘束があることを考慮すれば、必ずしも望ましい制御効果を与えることはできない。

そこで、CDVFB 制御によりあらかじめ制御系の安定度を増大させた状態で、最適レギュレータ法などの制御効果の高いモーダルコントロールを行う LAC/HAC (Low Authority Control / High Authority Control) 制御法と呼ばれる方法が提案されている (Aubrunら [18, 19], 土屋ら [20])。CDVFB 制御 (:LAC) のフィードバックゲインの大きさが適切であれば、LAC 制御によって付加される安定度ならびに柔軟構造物のもつ固有構造減衰による安定度は、モーダルコントロール (:HAC) によって引き起こされる不安定度を上回るので制御系全体の安定性が保証され、しかも高

い制御効果をもつ制御系を実現できる。しかし、

- 1) モーダルコントロールに基づく状態フィードバック制御系は、スピルオーバーにより多くのトランケートモードを不安定化させる
- 2) 柔軟構造物のもつ固有構造減衰を精度よく知ることは困難である（特に高次モードに対して）

ので、CDVFB制御のフィードバックゲインの適切な大きさを決定することは非常にむずかしい。

そこで本章では、LAC/HAC制御法を修正した新しい設計方法を示す。この方法は制御を行う時間を通常のLAC/HAC制御により制御する時間帯とCDVFB制御だけで制御する時間帯に分けるので、TS LAC/HAC (:Time Sharing LAC/HAC)法と呼ぶことにする。TS LAC/HAC法により設計した閉回路制御系は、CDVFB制御のフィードバックゲインの大きさが適切でない場合にも安定性が保証され、しかも高い制御効果をもつ。

本章は、まずLAC/HAC制御系とLAC制御系の特性方程式を導く。次に、TS LAC/HAC法で設計した制御系の構成法を述べ、その特徴を示すために計算機シミュレーションを行う。最後に、片持はりの実験装置を用いて実際に制御系を構成し、その制御効果や有効性を確認する。

## 5-2 LAC/HAC制御系とLAC制御系の特性方程式

ここではTS LAC/HAC法に基づき制御系を設計する際に必要となる、通常のLAC/HAC制御系の特性方程式とLAC制御系の特性方程式を求める。

柔軟構造物振動制御系の運動方程式を状態方程式で表現すると(3-1)式のようなになる。通常のLAC/HAC制御系において、操作量はHACを行うための操作量とLACを行うための操作量から構成されるので、(3-3)式と(2-10)式から

$$u(t) = - [D \quad V] \hat{x}_M(t) - K_V \dot{w}_{LAC}(t) \quad (5-1)$$

となる。ここに、Mは制御モード数であり、D、Vは状態フィードバック制御系を構成する際に第3章で定義した $p \times M$ の定数行列である。また、 $\hat{x}_M(t)$ はモーダル

フィルタを用いて推定した状態量である。さらに、 $\dot{\mathbf{w}}_{LAC}(t)$ はアクチュエータに collocateされた速度センサの出力であり、 $K_V$ はフィードバックゲインである。

$$K_V = \text{diag} [K_1 \cdots K_p] \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_{LAC}(t) &= [\dot{w}(z_1, t) \cdots \dot{w}(z_p, t)]^T \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1(z_1) & \phi_2(z_1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \phi_1(z_p) & \phi_2(z_p) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{b}^T \dot{\xi}_\infty(t) \end{aligned} \quad (5-3)$$

モーダルフィルタにより状態量を推定する場合、推定状態量  $\hat{\mathbf{x}}_M(t)$  は(3-9)式で表現されるので、第3章と同様な手順により、LAC/HAC制御系の特性方程式は次式のようなになる。

$$\begin{vmatrix} sI & -I \\ \Lambda + bDE & sI + bVE + bK_V b^T \end{vmatrix} = 0 \quad (5-4)$$

またCDVFB制御系は、(5-1)式の操作量において状態フィードバック制御のゲインDとVを零行列に置き換えた場合に相当するので、特性方程式は(5-4)式で  $D = V = 0$  とすればよい。

### 5-3 TS LAC/HAC制御系の設計

ここでは、TS LAC/HAC法 の概念と設計法を述べる。図5-1は、TS LAC/HAC制御系のブロック線図である。通常のLAC/HAC制御系と異なり、TS LAC/HAC制御系はHAC回路を開閉する機構をもつので、LAC制御系にもLAC/HAC制御系にもなる。センサ出力から状態を推定し、目的を達成するために、LAC制御がLAC/HAC制御よりも効果的であると判断すれば図中のスイッチを開いてLAC制御となり、LAC/HAC制御

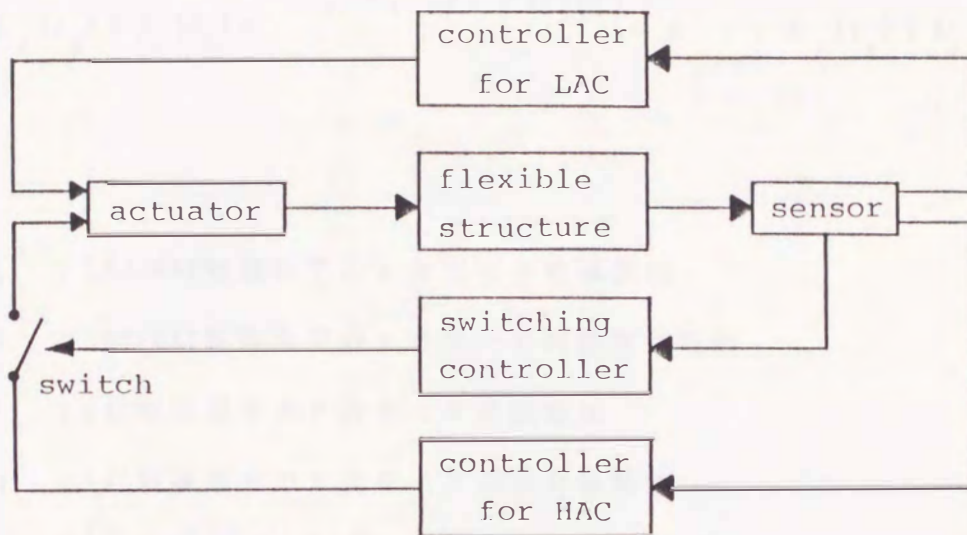


図 5 - 1 TS LAC/HAC制御系のブロック線図

がLAC制御よりも効果的であると判断すれば図中のスイッチを閉じてLAC/HAC制御系となる。

さて、TS LAC/HAC法の設計方法を示すために、ここでは次の制御目的を考える。

“柔軟構造物のある点の振幅をできる限り早く抑制する”

振幅を抑制する点 $y_s$ において発生しうる振幅の上限は

$$w_{\max}(y_s, t) = \sum_{r=1}^{\infty} |\phi_r(y_s)| A_r(t) \quad (5-5)$$

と表現できる。これは点 $y_s$ の変位を表す式において、規準座標 $\xi_r(t)$ をその包絡線の半幅 $A_r(t)$  ( $>0$ )で置き換えたものである。いま、時刻 $T_0$ から $T_0+t_1$ の間は図5-1のスイッチを閉じ(:LAC/HAC制御系)、時刻 $T_0+t_1$ から $T_0+t_1+t_2$ の間はスイッチを開く(:CDVFB制御系)とする。この $t_1+t_2$ の間に、点 $y_s$ の振幅の上限

が時刻  $T_0$  での振幅の上限の  $\alpha$  倍 ( $0 < \alpha < 1$ ) になる時, 次式が成立する.

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\phi_r(y_s)| A_r(T_0) e^{-\zeta_r^{LH} \omega_r^{LH} t_1 - \zeta_r^L \omega_r^L t_2} = \alpha \sum_{r=1}^{\infty} |\phi_r(y_s)| A_r(T_0) \quad (5-6)$$

ここに,

$\zeta_r^{LH}$  : LAC/HAC制御系での  $r$  次モードの減衰比

$\omega_r^{LH}$  : LAC/HAC制御系での  $r$  次モードの固有振動数

$\zeta_r^L$  : LAC制御系での  $r$  次モードの減衰比

$\omega_r^L$  : LAC制御系での  $r$  次モードの固有振動数

である.  $(\zeta_r^{LH}, \omega_r^{LH})$  と  $(\zeta_r^L, \omega_r^L)$  の値は, 制御系を実際に使用する前に, 特性方程式 (5-4) によってあらかじめ off-line で計算できる.

したがって, 制御目的を達成するには,  $\alpha$  が与えられた場合に (5-6) 式を満足し, 次の評価関数  $J$  を最小にする  $t_1 (\geq 0)$  と  $t_2 (\geq 0)$  を求めればよい.

$$J = t_1 + t_2 \quad (5-7)$$

実際には, 無限のモードを考慮することはできないので, (5-6) 式のかわりに次式を満足する  $t_1$  と  $t_2$  を計算することになる.

$$\sum_{r=1}^N |\phi_r(y_s)| A_r(T_0) e^{-\zeta_r^{LH} \omega_r^{LH} t_1 - \zeta_r^L \omega_r^L t_2} = \alpha \sum_{r=1}^N |\phi_r(y_s)| A_r(T_0) \quad (5-8)$$

しかし, (5-8) 式を満たし (5-7) 式の  $J$  を最小にする  $t_1$  と  $t_2$  を求めるにはいくつかの問題点がある. その中でも特に重要なものを以下に取り上げて, その対策を検討する.

#### (1) 規準座標の包絡線 $A_r(T_0)$ の推定

$A_r(T_0)$  は直接測定することができないので, 次のような手法で推定する. ローパスフィルタ・バンドパスフィルタ・ハイパスフィルタなどの周波数領域フィル

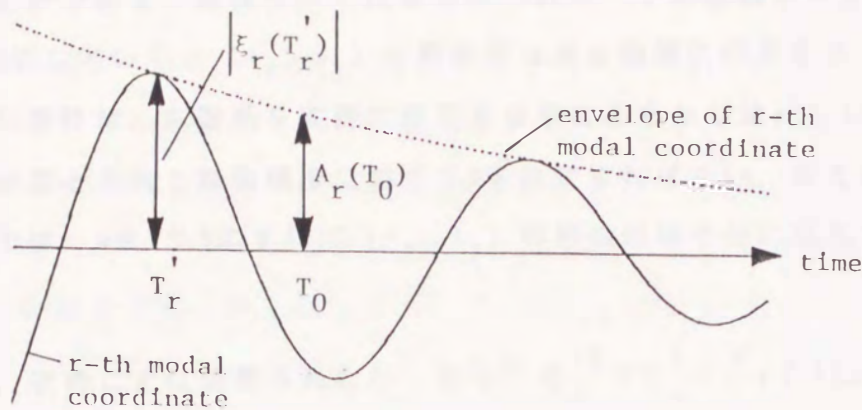


図 5 - 2  $A_r(T_0)$  の推定法

タの組み合わせもしくはモーダルフィルタを用いて、 $r$  次モードの規準座標を抽出し、半周期ごとにその最大値を調べる。いま、時刻  $T_r'$  で  $r$  次モードの振動が最大となれば、図 5 - 2 により、 $A_r(T_0)$  は次式から計算できる。

$$A_r(T_0) |\phi_r(y_s)| = |\phi_r(y_s) \xi_r(T_r')| e^{-\zeta_r \omega_r (T_0 - T_r')} \quad (5-9)$$

(2) (5-8) 式における  $N$  の決定法

$N$  は大きいほど、(5-8) 式を満たす  $t_1$  と  $t_2$  の計算精度は向上するが、次の理由により、あまり大きくできない。

(i)  $A_N(T_0)$  を精度よく推定するには、デジタル制御を行うためのサンプリング間隔が非常に短くなければならないが、短すぎるとサンプリング時間内に計算が終わらない。

(ii) 規準座標を抽出するためのフィルタの構成が複雑になる。

そこで、次のようにして  $N$  を決定する。  $(\zeta_r^{LH}, \omega_r^{LH})$ ,  $(\zeta_r^L, \omega_r^L)$ ,  $A_r(T_0)$

( $r=1, \dots, N$ ),  $\alpha$  が与えられれば, (5-8)式を満たす  $(t_1, t_2)$  の解は,  $t_1-t_2$  平面に描くことができる. 高次モードになるにつれモードの振幅が小さくなるので,  $N$  を順次増やしていくと  $(t_1, t_2)$  の解曲線はある曲線に収束する.  $(t_1, t_2)$  の解曲線の収束性は, 制御系を実際に使用する前にあらかじめ off-line で確認できるので, 必要とされる制御精度に応じて  $N$  を決定すればよい. 例えば後に示す片持りの例では,  $N$  を 4 か 5 にすれば  $(t_1, t_2)$  の解曲線は十分に収束する (5-4 節を参照).

ただし, 次のことに注意されたい. もし,  $\zeta_r^{LH} > \zeta_r^L; \forall r \in (1, \dots, N)$  ならば, 全てのモードに対し LAC/HAC 制御が LAC 制御のみより効果的なので, 常に  $t_2 = 0$  となる. これは, 通常の LAC/HAC 制御系に相当するので,  $\zeta_r^{LH} < \zeta_r^L; \exists r \in (1, \dots, N)$  となるように  $N$  を決定すべきである.

### (3) $J$ を最小とする $t_1$ と $t_2$ の決定法

(5-8)式を満たし  $J$  を最小にする  $(t_1, t_2)$  は, (5-7)の直線と (5-8)の解曲線との接点であり, その座標は数値計算により求めねばならない. デジタル制御を実現するには, サンプルング時間内に接点座標の計算が終了せねばならないが, (5-8)式は超越方程式であり, 短時間で最適な  $(t_1, t_2)$  を計算することは困難である (十分に速い計算法の確立は今後の課題である). そのような場合,  $t_1$  と  $t_2$  を次のようにして決定する方法は実用的である. (5-8)式の両辺を  $A_1(T_0)$  で割れば,

$$\sum_{r=1}^N |\phi_r(y_s)| \frac{A_r(T_0)}{A_1(T_0)} e^{-\zeta_r^{LH} \omega_r^{LH} t_1 - \zeta_r^L \omega_r^L t_2} = \alpha \sum_{r=1}^N |\phi_r(y_s)| \frac{A_r(T_0)}{A_1(T_0)} \quad (5-10)$$

となる. そこで, あらかじめ代表的な  $A_r(T_0)/A_1(T_0)$  ( $r=1, \dots, N$ ) に対する最適な  $(t_1, t_2)$  の表を作成しておく. 計算の各時点で  $A_r(T_0)/A_1(T_0)$  ( $r=1, \dots, N$ ) を求め, その表と照らし合わせるにより短時間で  $t_1$  と  $t_2$  を決定する.

一方, 振幅を十分に抑制するには

(i)  $\alpha$  を十分小さくし, LAC/HAC 制御と LAC 制御との繰り返しを 1 度だけとす



る

(ii)  $\alpha$  を小さくするかわりに, LAC/HAC制御とLAC制御を複数回繰り返すという方法が考えられる. しかし(i)の方法では,  $t_1$ と $t_2$ の値が大きくなるので時刻 $T_0 + t_1$ において不安定化モードの振幅が非常に大きくなり不適切であったり, 観測ノイズや $N+1$ 次以上のモードの影響により $A_r(T_0)$  ( $r=1, \dots, N$ )の推定が誤差をもつので, 時間 $(t_1, t_2)$ が最適な $(t_1, t_2)$ から大きくずれ制御効果が著しく低下する可能性がある. したがって, (ii)の方法が実用的であり, LAC/HAC制御とLAC制御を $n$ 回繰り返せば, 振幅の上限は $\alpha^n$ 倍になる. また,  $n$ 回の繰り返しの後は, 図5-1のスイッチを開いて閉回路制御系をLAC制御系とすれば, 安定性が保証される.

以上の方法をまとめると, TS LAC/HAC法による設計は次の手順に従う.

Step 1 LAC制御系ならびにLAC/HAC制御系をそれぞれ設計する.

Step 2 (5-4)式から $(\zeta_r^L, \omega_r^L)$ ならびに $(\zeta_r^{LH}, \omega_r^{LH})$ を計算する.  
もしくは実験により同定する.

Step 3 (5-8)式における $N$ と $\alpha$ , 繰り返し回数 $n$ を決定する.

Step 4  $A_r(T_0)/A_1(T_0)$  ( $r=1, \dots, N$ )に対して,  $J$ を最小とする $(t_1, t_2)$ の表を用意する.

Step 5 周波数領域フィルタの組み合わせもしくはモーダルフィルタを用いて, (5-9)式から $A_r(T_0)$ を推定する.

#### 5-4 計算機シミュレーション

ここでは, TS LAC/HAC法の特徴を述べるために計算機シミュレーションを行う. 制御系は,  $\gamma_s = 0.7$ の点の振動をできる限り早く抑制するように設計する. 柔軟構造物として一様な片持はりモデルを用いれば, その固有振動数, 固有関数は付録5に示すようになる.

まず, LAC/HAC制御系とLAC制御系を設計する. アクチュエータは $z_1 = 0.3$ の点に配置し( $p=1$ ), 次の2次形式の評価関数を最小にするようにHAC制御系を設計する( : 最適レギュレータ法 ).

$$J_1 = \int_0^{\infty} \int_D (x_1^T Q x_1 + u_1^T R u_1) dD dt \quad (5-11)$$

ここに

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、重み  $R$  はここでは  $R = 5$  とした。(次節で同じ制御系を実際に構成するので、使用する制御回路の容量と各モードの減衰比を考慮して  $R$  は試行錯誤により決定した。)  $y_s = 0.7$  の点に配置した変位センサと速度センサの出力からモデルフィルタを用いて1次モードの規準座標とその時間微分を推定する ( $M=1$ )。またLAC制御系は、アクチュエータと同一点にもう一つ速度センサを配置して、CDVFB制御を構成する。

計算機シミュレーションでは、弾性振動は5次までのモードで構成する。1次モードは制御モードであり、2~4次モードは剰余モードである。5次モードは非モデル化モードであり、振動特性(減衰比や固有振動数)を同定することが困難であるとする。またシミュレーションの初期条件として、物体の衝突や制御力をモデル化したインパルス加振を  $z = 0.25$  の点に与える。

計算機シミュレーションにおいては、切り換えの各時点で振動状態を保つことができるので、前節の(3)で述べた  $(t_1, t_2)$  の対応表ではなく、(5-8)式を満たし  $J$  を最小にする  $t_1$  と  $t_2$  を次の方法により数値的に計算する。

< 計算法 >  $t_1 (\geq 0)$  を変数として、降下法(ここでは黄金分割法を使用)により [41]、 $J$  を最小にする  $t_1$  の値を求める。この時  $t_2 (\geq 0)$  は、その時点の  $t_1$  に対し(5-8)式を満たす最小の値を降下法により計算する。

ただし、この方法は計算時間が長いので、実際の制御には不適である。

さて、CDVFB制御のフィードバックゲイン  $K_1$  の大きさに応じて、(1)LAC/HAC制御系の剰余モードが不安定な場合、(2)LAC/HAC制御系の非モデル化モードが不安定な場合、(3)全てのモードが安定な場合、について閉回路制御系の応答を調べる。

5 - 4 - 1 LAC/HAC制御系の剰余モードが不安定な場合

CDVFB制御のフィードバックゲインが $K_1 = 0.3$ の場合、LAC/HAC制御系の各モードの減衰比と固有振動数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\zeta_1^{LH}, \omega_1^{LH}) &= (0.0277, 3.52) & (\zeta_2^{LH}, \omega_2^{LH}) &= (0.0156, 22.0) \\
 (\zeta_3^{LH}, \omega_3^{LH}) &= (-0.00306, 61.7) & (\zeta_4^{LH}, \omega_4^{LH}) &= (0.00246, 120.9) \\
 (\zeta_5^{LH}, \omega_5^{LH}) &= (-0.000122, 199.9) & & (5-12)
 \end{aligned}$$

ただし、5次モードの減衰比ならびに固有振動数は設計者には未知であるとする。剰余モードである3次モードが不安定なので、通常のLAC/HAC制御系では不安定となる(図5-3を参照)。

一方、LAC制御系の減衰比と固有振動数は

$$\begin{aligned}
 (\zeta_1^L, \omega_1^L) &= (0.00318, 3.52) & (\zeta_2^L, \omega_2^L) &= (0.00754, 22.0) \\
 (\zeta_3^L, \omega_3^L) &= (0.00556, 61.7) & (\zeta_4^L, \omega_4^L) &= (0.000934, 120.9) \\
 (\zeta_5^L, \omega_5^L) &= (0.000134, 199.9) & & (5-13)
 \end{aligned}$$

である。図5-4はLAC制御(:CDVFB制御)だけを行う場合の $y_s = 0.7$ の点における振動応答である。CDVFBに基づくLAC制御系は安定であるが、振動を抑えるのに非常に長い時間を要することに注意されたい。

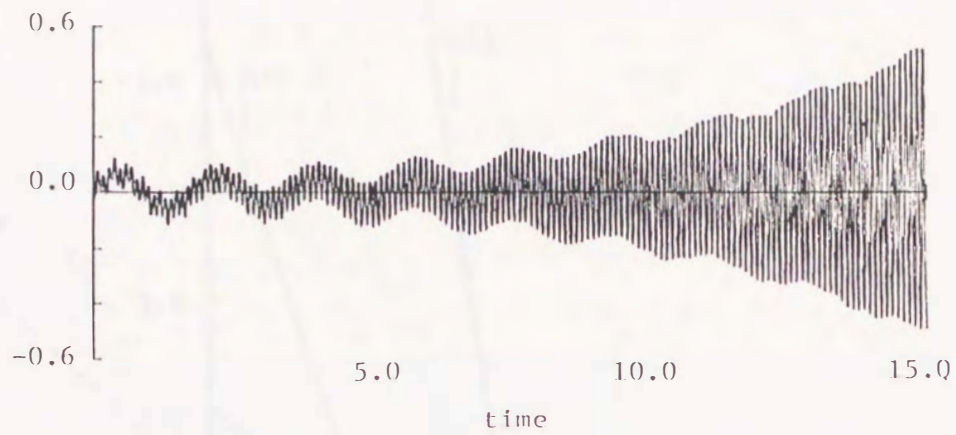


図 5 - 3 LAC/HAC制御系の剰余モードが不安定な場合の応答

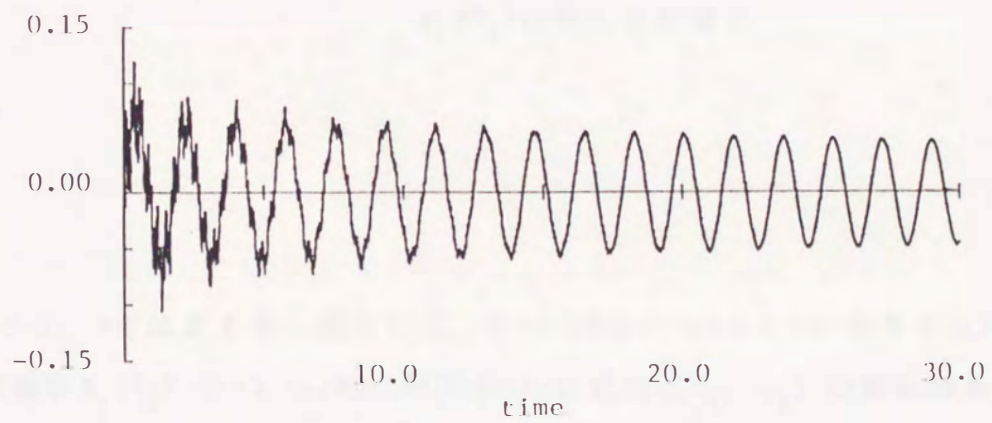


図 5 - 4 LAC制御系の応答

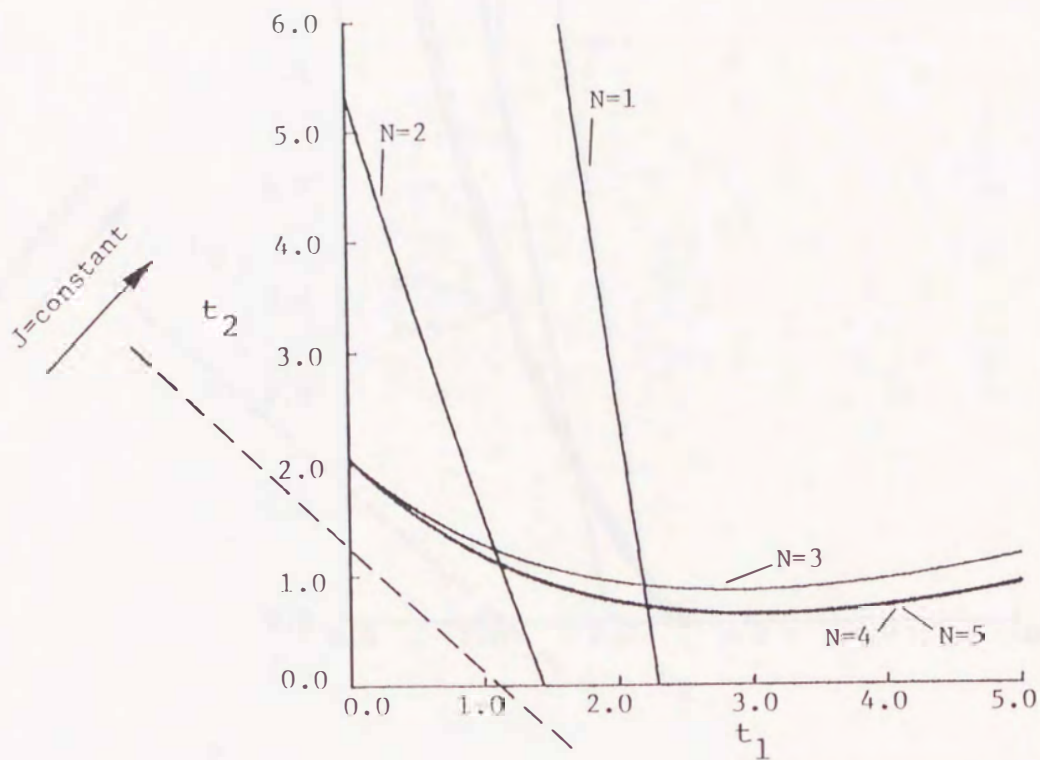


図 5 - 5 (5-8) 式の  $N$  に対する  $(t_1, t_2)$  の解曲線  
 (その 1 :  $z = 0.25$  をインパルス加振した時の  $A_r(T_0)$  に対して計算)

次に、 $N$  と  $\alpha$ 、 $n$  を決定する。例として、 $z = 0.25$  または  $z = 1.0$  の点をインパルス加振した直後の  $A_r(T_0)$  ( $r = 1, \dots, N$ ) に対する (5-8) 式の  $(t_1, t_2)$  の解曲線をそれぞれ図 5 - 5 と図 5 - 6 に示す。これらの図より、 $N = 4$  とすれば解曲線は十分に収束することがわかる。ただしここでは、次節の実験との対応のために、 $N = 3$  とする。また、 $\alpha = 0.8$ 、LAC/HAC 制御と LAC 制御との繰り返し回数を  $n = 7$  とすれば、振幅の上限は  $(0.8)^7 \approx 0.21$  倍に抑制できる。

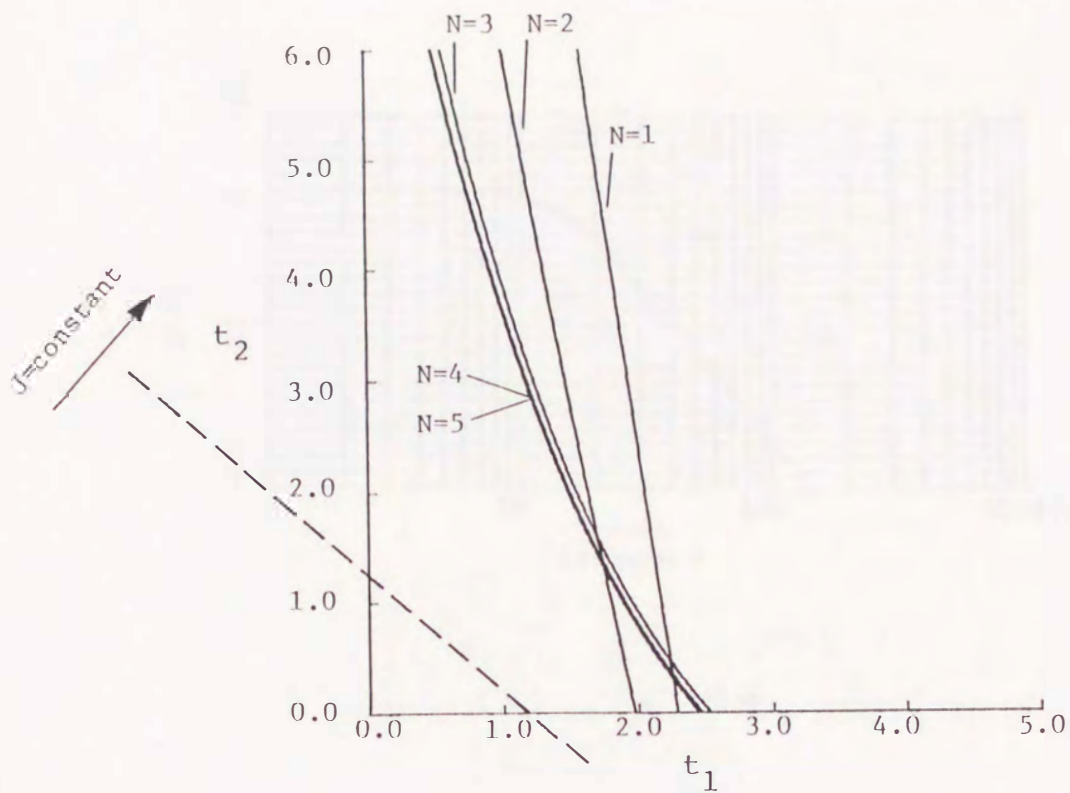
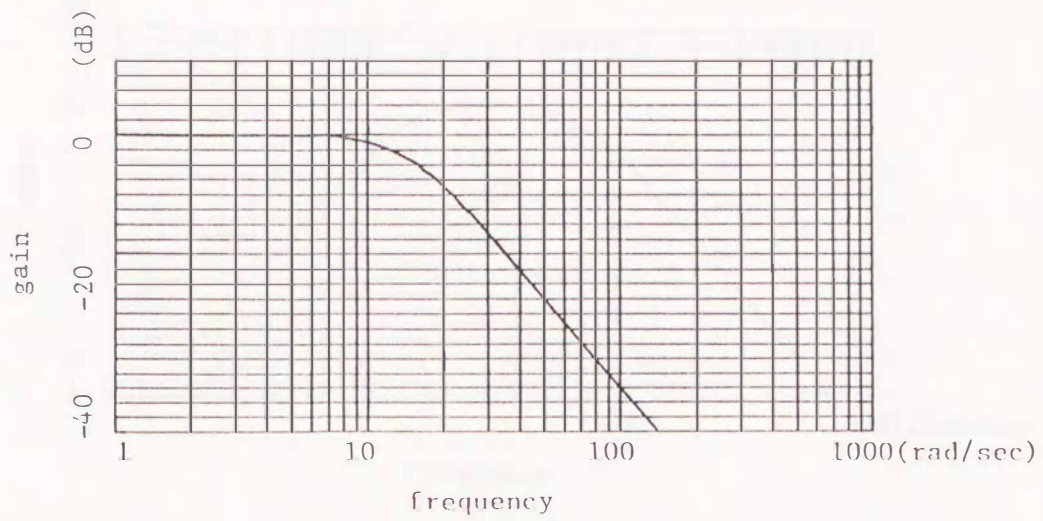
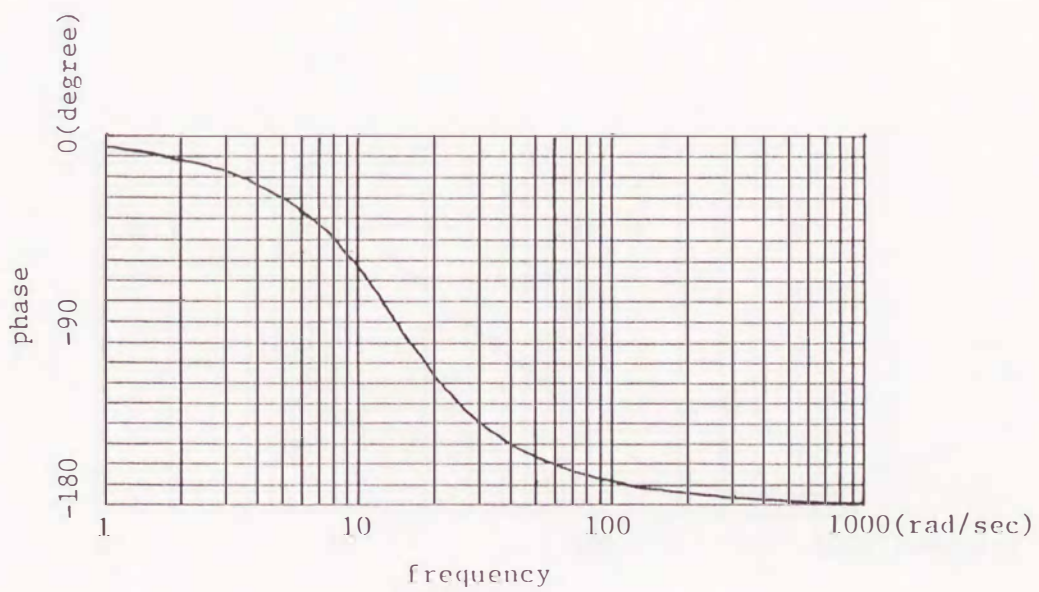


図 5 - 6 (5-8) 式の  $N$  に対する  $(t_1, t_2)$  の解曲線  
 (その 2 :  $z = 1.0$  をインパルス加振した時の  
 $A_r(T_0)$  に対して計算)

各モードの規準座標は、周波数領域のフィルタを組み合わせで抽出する。次節の実験で用いるフィルタを考慮し、1次モードを抽出するにはcut-off周波数が9.6(:無次元)のローパスフィルタを使用する。また、2次モードはcut-off周波数が9.6と48.1のバンドパスフィルタを用い、3次モードはcut-off周波数が48.1のハイパスフィルタを用いる。いずれもcut-off周波数を越える信号は、40dB/decの割合で減衰する。シミュレーション計算に用いた各フィルタの周波数特性を図5-7に示す。なお、5-4-2節、5-4-3節においても同じ周波数領域のフィルタを使用する。

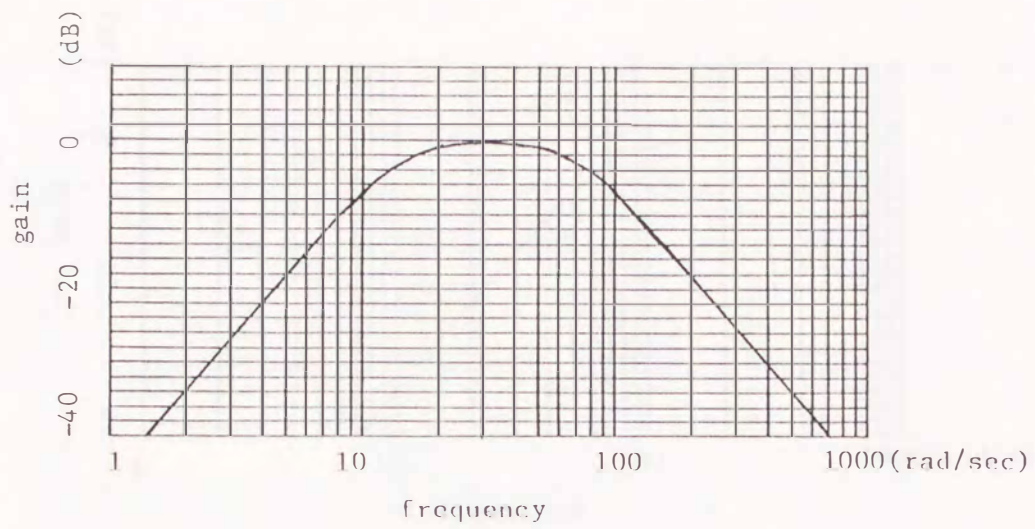


( a ) ゲイン特性

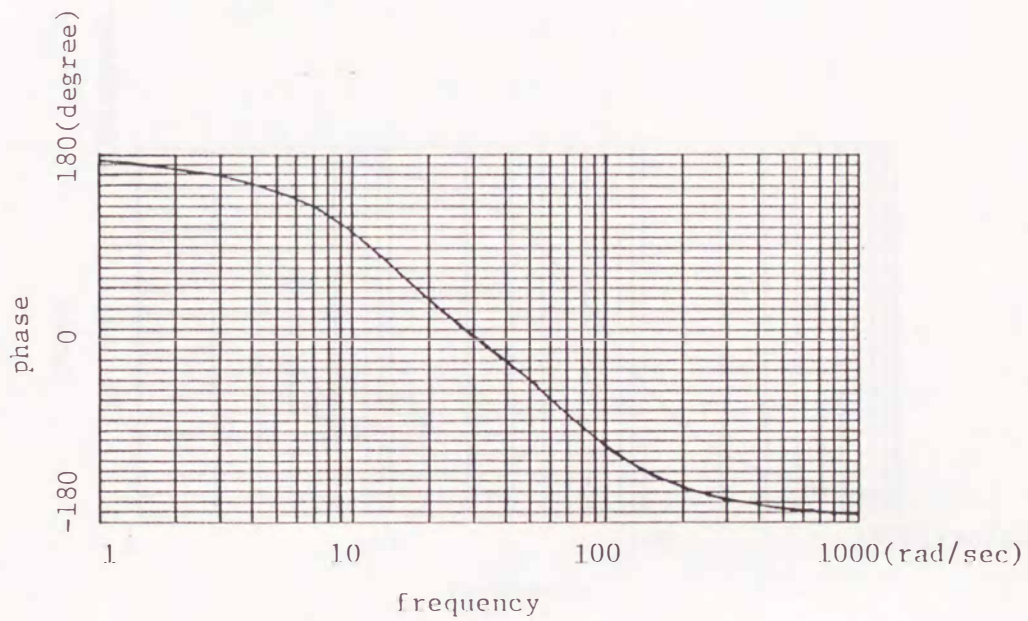


( b ) 位相特性

図 5 - 7 - 1 ローパスフィルタの特性



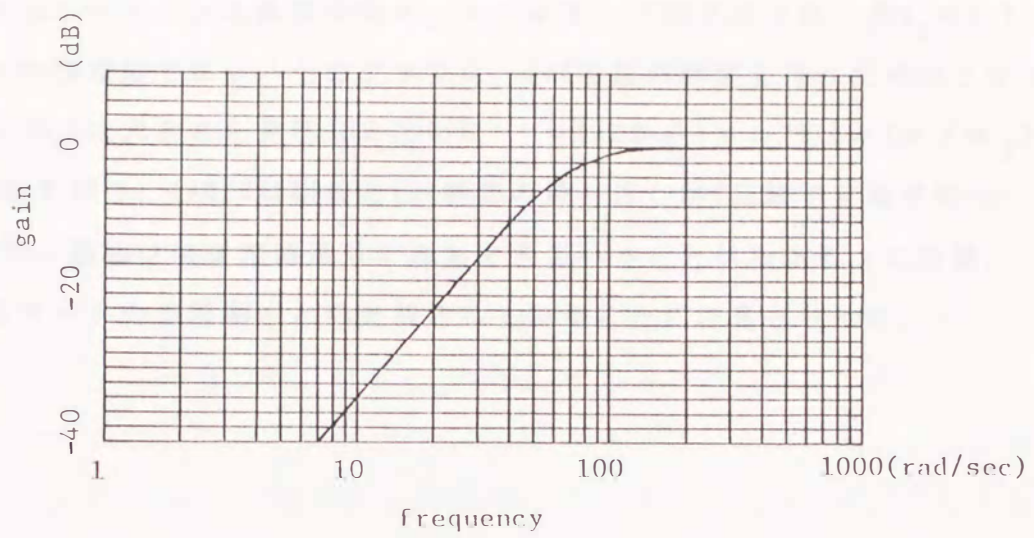
( a ) ゲイン特性



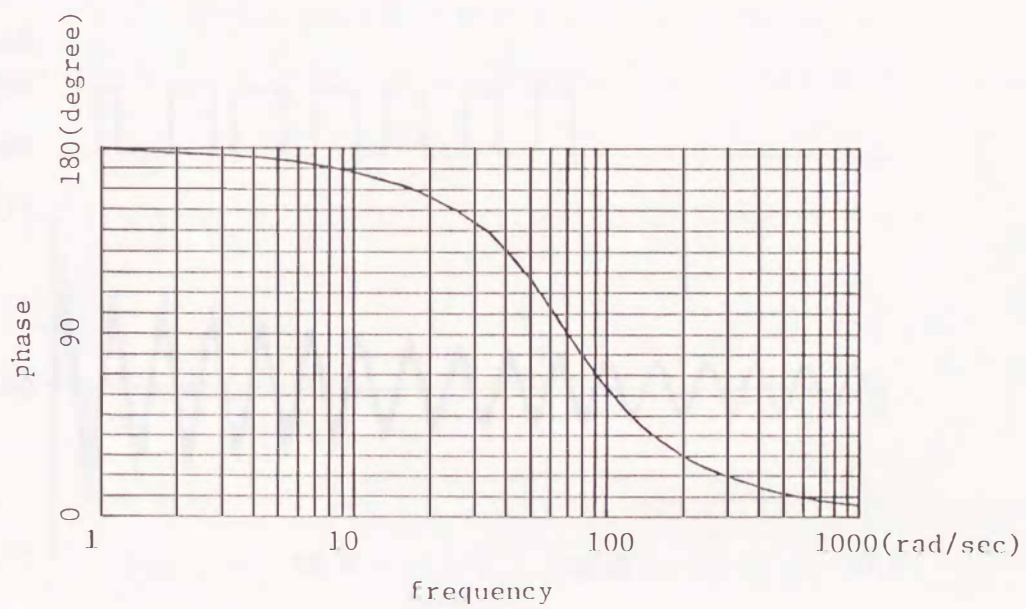
( b ) 位相特性

図 5 - 7 - 2 バンドパスフィルタの特性





( a ) ゲイン特性



( b ) 位相特性

図 5 - 7 - 3 ハイパスフィルタの特性

計算機シミュレーションの結果を図5-8に示す。下のグラフは、点 $y_s = 0.7$ における変位の時間履歴であり、上のグラフは、HAC回路の開閉を行うためのコマンドである。 $A_1(T_0)$ の大きさを見積もるために、 $t = 0.0$ から $t = 1.79 (= 2\pi / \omega_1)$ の間はLAC制御を行う。LAC/HAC制御とLAC制御の繰り返し7回終了する時刻 $t = 20.29$ において、振幅はほぼ理論通りに抑制できていることがわかる。この間、 $A_r(T_0)$ は $r$ 次モードの半周期ごとに更新されていることに注意されたい。

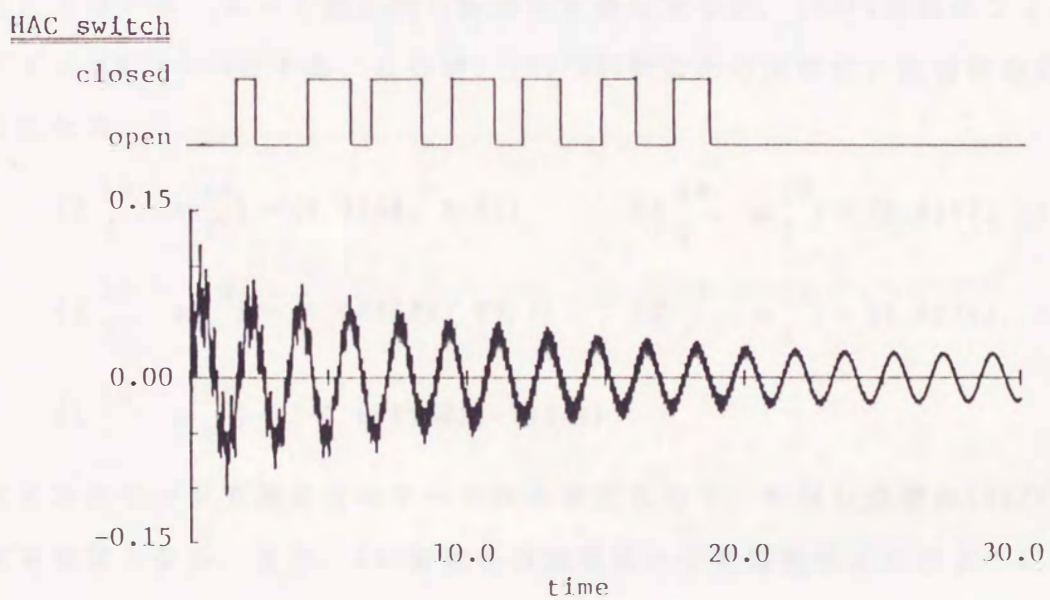


図5-8 TS LAC/HAC法により設計した制御系の応答1  
 (LAC/HAC制御系の剰余モードが不安定な場合)

#### 5-4-2 LAC/HAC制御系の非モデル化モードが不安定な場合

5-4-1節のようにLAC/HAC制御系の剰余モードが不安定な場合においても、その減衰比が同定できれば、設計者は剰余モードがスピルオーバー不安定とならないようなCDVFB制御のフィードバックゲイン $K_1$ を見積もることもできる。しかし、非モデル化モードについては減衰比の同定が困難なので、全てのモードを安定にするために必要な $K_1$ を見積もることはできない。十分大きな $K_1$ を用いれば全てのモードは安定となるが、非常に大きなフィードバックゲインを用いることは現実的ではないし、しかもLAC/HAC制御系は実質的にCDVFB制御系に非常に近くなり制御の効率は低下する。したがって、実際に設計したLAC/HAC制御系は、制御モードと剰余モードは安定であるが、非モデル化モードの安定性は保証できないことが多い。そこで、LAC/HAC制御系の非モデル化モードが不安定となる場合に、TS LAC/HAC法により設計した閉回路制御系の安定性を調べる。

ここでは、5-4-1節と同じ制御系を構成するが、CDVFB制御のフィードバックゲインは $K_1 = 0.5$ とする。この時、LAC/HAC制御系の減衰比と固有振動数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\zeta_1^{LH}, \omega_1^{LH}) &= (0.0298, 3.52) & (\zeta_2^{LH}, \omega_2^{LH}) &= (0.0207, 22.0) \\
 (\zeta_3^{LH}, \omega_3^{LH}) &= (0.000644, 61.7) & (\zeta_4^{LH}, \omega_4^{LH}) &= (0.00308, 120.9) \\
 (\zeta_5^{LH}, \omega_5^{LH}) &= (-0.0000322, 199.9) & & (5-14)
 \end{aligned}$$

非モデル化モードである5次モードが不安定なので、やはり通常のLAC/HAC制御系では不安定となる。また、LAC制御系の減衰比と固有振動数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\zeta_1^L, \omega_1^L) &= (0.00530, 3.52) & (\zeta_2^L, \omega_2^L) &= (0.0126, 22.0) \\
 (\zeta_3^L, \omega_3^L) &= (0.00927, 61.7) & (\zeta_4^L, \omega_4^L) &= (0.00156, 120.9) \\
 (\zeta_5^L, \omega_5^L) &= (0.000223, 199.9) & & (5-15)
 \end{aligned}$$

$N=3$ ,  $\alpha=0.8$ とし、閉回路制御系が発散しないことを示すために、LAC/HAC制御とLAC制御の繰り返しの回数は $n=20$ とする。また、1次モードから3次モード

までの振動を抽出する周波数領域のフィルタは5-4-1節と同様に構成する。

計算機シミュレーションにおける $\gamma_s = 0.7$ の応答を図5-9に示す。時刻 $t = 37.07$ においてLAC/HAC制御とLAC制御の繰り返しが20回終了するが、閉回路制御系の応答が発散しないことがわかる。

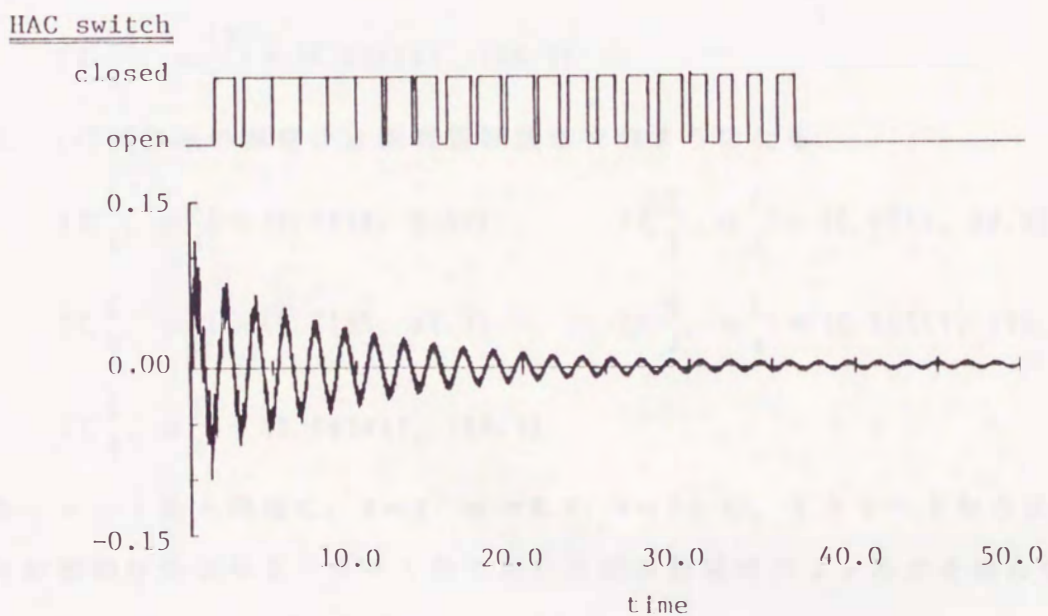


図5-9 TS LAC/HAC法により設計した制御系の応答2  
(LAC/HAC制御系の非モデル化モードが不安定な場合)

5-4-3 LAC/HAC制御系の全てのモードが安定な場合

通常のLAC/HAC制御で閉回路制御系が安定であれば、TS LAC/HAC法によりLAC制御の時間をつくることは制御効果を低下させる。しかし、設計した閉回路制御系の非モデル化モードが安定なのか不安定なのかをあらかじめ判定することは容易ではない。そこで本節では、通常のLAC/HAC制御系で安定化できる場合にTS LAC/HAC法を適用する時の制御効果の低下について調べる。

5-4-1節と同じ制御系を構成するが、CDVFB制御のフィードバックゲインを $K_1 = 1.0$ とする。この時、LAC/HAC制御系の減衰比と固有振動数は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\zeta_1^{LH}, \omega_1^{LH}) &= (0.0351, 3.52) & (\zeta_2^{LH}, \omega_2^{LH}) &= (0.0333, 22.0) \\ (\zeta_3^{LH}, \omega_3^{LH}) &= (0.00991, 61.7) & (\zeta_4^{LH}, \omega_4^{LH}) &= (0.00464, 120.9) \\ (\zeta_5^{LH}, \omega_5^{LH}) &= (0.000191, 199.9) & & \end{aligned} \quad (5-16)$$

また、LAC制御系の減衰比と固有振動数は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\zeta_1^L, \omega_1^L) &= (0.0106, 3.52) & (\zeta_2^L, \omega_2^L) &= (0.0251, 22.0) \\ (\zeta_3^L, \omega_3^L) &= (0.0185, 61.7) & (\zeta_4^L, \omega_4^L) &= (0.00311, 120.9) \\ (\zeta_5^L, \omega_5^L) &= (0.000447, 199.9) & & \end{aligned} \quad (5-17)$$

5-4-1節と同様に、 $N=3$ 、 $\alpha=0.8$ 、 $n=7$ とし、1次モードから3次モードまでの振動はやはり5-4-1節で用いた周波数領域のフィルタを組み合わせで抽出する。

計算機シミュレーションの結果を図5-10に示す。時刻 $t=1.79$ からLAC/HAC制御とLAC制御の繰り返しが行われる時刻 $t=10.43$ までの間、HAC回路は常に閉じたままであり、閉回路制御系はLAC/HAC制御系となる。 $\zeta_r^L > \zeta_r^{LH} > 0$ なるモードはLAC制御がLAC/HAC制御より効果的であるが、そのようなモードは高次モードに多く振幅に及ぼす影響は小さく、しかもLAC/HAC制御でも減衰することを考慮すれば、繰り返しの回数 $n$ を増やしてもTS LAC/HACを行うほとんどの時間帯でLAC/

HAC制御が採用される。したがって、 $a^n$ が十分小さくなるように $a$ と $n$ を設定すれば、通常のLAC/HAC制御系と比較してもTS LAC/HAC制御系の制御効果の低下は少ない。

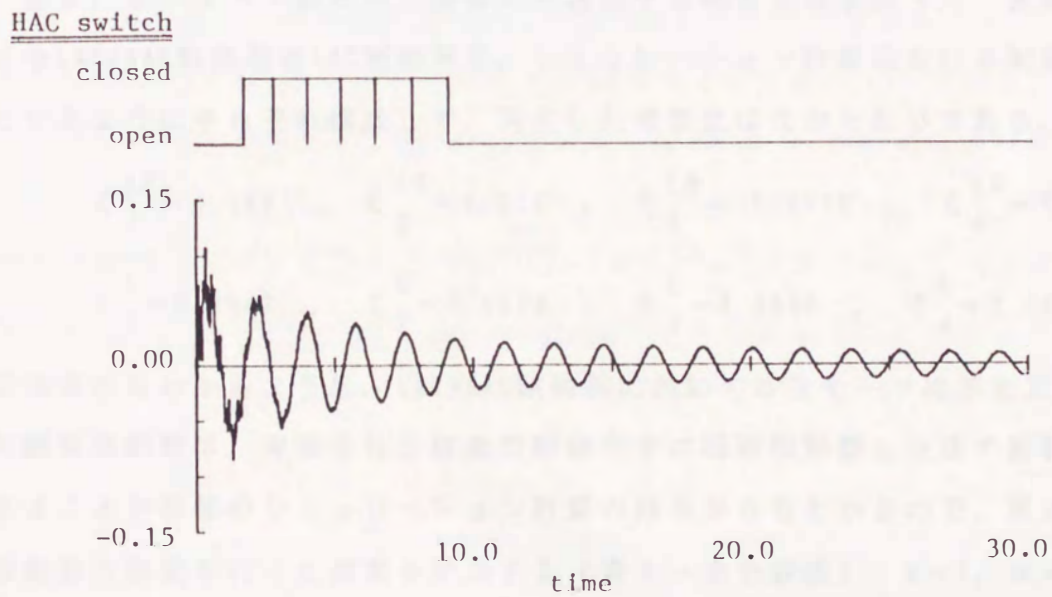


図5-10 TS LAC/HAC法により設計した制御系の応答3  
(全てのモードが安定の場合)

## 5-5 実験結果

5-4節でTS LAC/HAC法により設計した制御系の特徴を計算機シミュレーションで調べたので、ここではそのような制御系の有効性を実験により確認する。

実験装置は、第4章で制御効果を検証するのに用いた一様な片持はりの実験装置を使用し、HACコントローラとLACコントローラは、アナログコンピュータ上に構成する。各モードの減衰比は、はりの固有構造減衰が存在し、しかも空気抵抗による減衰も無視できないので、(5-4)式から求めた計算値ではなく、LAC/HAC制御系とLAC制御系をそれぞれ構成した状態で実験により同定した[23, 37]。同定の方法は、4-6節に述べたとおりである。

実験は2種類の場合に行った。

まず、5-4-1節と同じ制御系を構成する場合を取り扱った。実験装置におけるLAC/HAC制御系とLAC制御系を、シミュレーション計算における制御系と同じになるようにそれぞれ構成して、同定した減衰比は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \zeta_1^{LH} = 0.032 \quad , \quad \zeta_2^{LH} = 0.012 \quad , \quad \zeta_3^{LH} = -0.0018 \quad , \quad \zeta_4^{LH} = 0.0045 \\ \zeta_1^L = 0.0049 \quad , \quad \zeta_2^L = 0.0083 \quad , \quad \zeta_3^L = 0.0059 \quad , \quad \zeta_4^L = 0.0036 \end{aligned} \quad (5-18)$$

この式からわかるように、LAC/HAC制御系において3次モードは不安定である。また固有振動数は、実験を行う程度の制御力では固有振動数に及ぼす影響は無視できることが前節のシミュレーション計算の結果からもわかるので、第4章で固有振動数の同定を行った結果を使用する(表4-2を参照)。 $N=3$ 、 $\alpha=0.8$ 、 $n=7$ とし、1次モードから3次モードまでの振動は周波数領域のフィルタ(1次モードはcut-off周波数が14.1 rad/sec付近のローパスフィルタ、2次モードはcut-off周波数が14.1 rad/secと70.7 rad/sec付近のバンドパスフィルタ、3次モードはcut-off周波数が70.7 rad/sec付近のハイパスフィルタ)を用いて抽出した。各フィルタの出力は、100Hzのサンプリング速度でA/D変換し、 $r$ 次モードの半周期ごとに $A_r(T_0)$  ( $r=1, 2, 3$ )を更新した。時刻 $T_0$ における最適な $(t_1, t_2)$ の値は、その時点における $A_2(T_0)/A_1(T_0)$ と $A_3(T_0)/A_1(T_0)$ の値を用いて、5-3節で述べた対応表を参照する方法で決定した。そのために、 $A_2(T_0)/A_1(T_0)$ と $A_3(T_0)/A_1$

( $T_0$ )はともに0.02~0.50までを0.02ごとに变化させた場合に対する最適な( $t_1$ ,  $t_2$ )の対応表を準備した。図5-11は、実験結果を示す。振動は期待どおりに抑制できることがわかる。

次に、制御力の大きさを変えて実験を行った。(5-11)式において制御力の重みを $R=1$ とし、CDVFB制御のフィードバックゲインを $K_1=0.8$ とした場合に上述の実験と同様にTS LAC/HAC法を用いて制御系を構成した。アクチュエータ位置やセンサ位置は上述の実験と同じである。LAC/HAC制御系とLAC制御系をそれぞれ構成して減衰比を同定した結果を以下に示す。

$$\begin{aligned} \zeta_1^{LH} = 0.066 \quad , \quad \zeta_2^{LH} = 0.040 \quad , \quad \zeta_3^{LH} = -0.0025 \quad , \quad \zeta_4^{LH} = 0.0079 \\ \zeta_1^L = 0.011 \quad , \quad \zeta_2^L = 0.022 \quad , \quad \zeta_3^L = 0.017 \quad , \quad \zeta_4^L = 0.0045 \end{aligned} \quad (5-19)$$

LAC/HAC制御系のみで制御する場合の $y_s = 0.7$ の点の応答を図5-12(:実験データ)に、CDVFB制御系のみで制御する場合の応答を図5-13(:実験データ)に示す。 $N=3$ ,  $\alpha=0.8$ とし、ここではLAC/HAC制御とLAC制御の繰り返しの回数を $n=10$ とする。この時、 $\alpha^n \approx 0.11$ である。 $A_r(T_0)$  ( $r=1, 2, 3$ )は上述の実験と同じ周波数領域フィルタを用いて抽出した。また、A/D変換のサンプリング速度は100 Hzとし、 $A_r(T_0)/A_1(T_0)$   $r=2, 3$ をともに0.02~0.50を0.02ごとに变化させた場合の最適な( $t_1$ ,  $t_2$ )の対応表を用いた。実験結果を図5-14に示す。



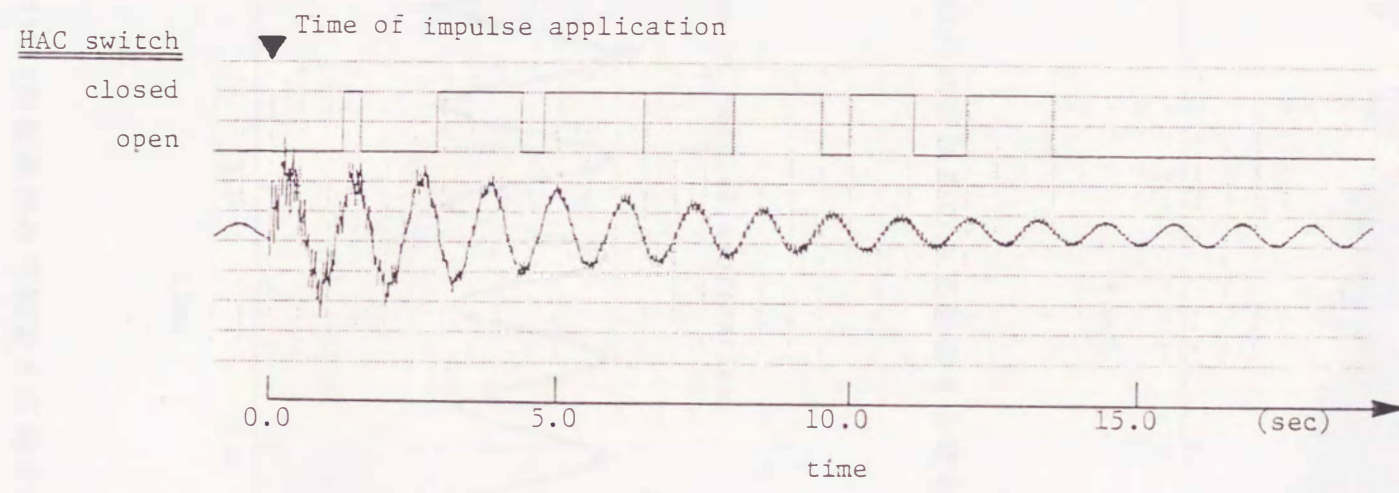


図 5 - 1 1 TS LAC/HAC法により設計した制御系の実験結果 1  
( $R=5$ ,  $K_1=0.3$ の場合)

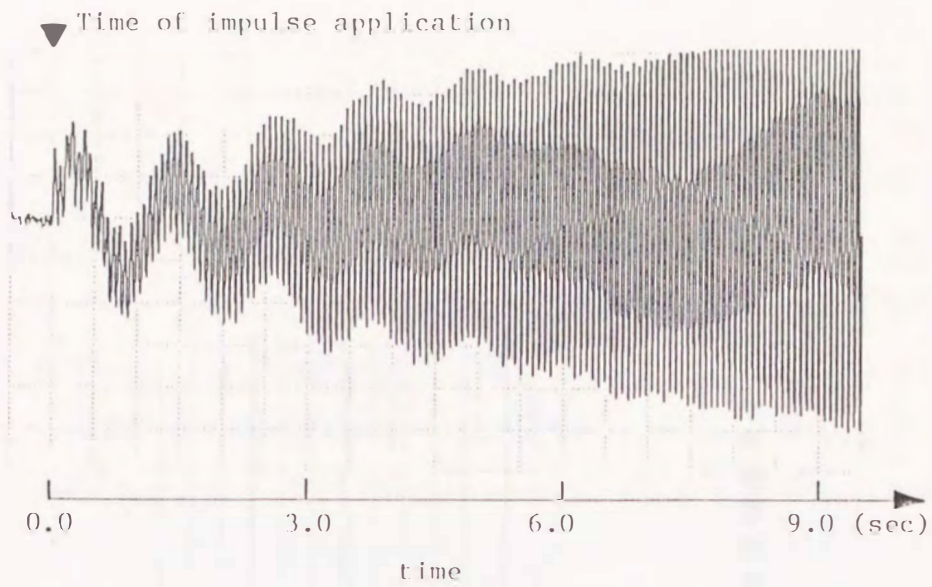


図 5 - 1 2 LAC/HAC制御系のみで制御する場合の応答 ( : 実験 2 )

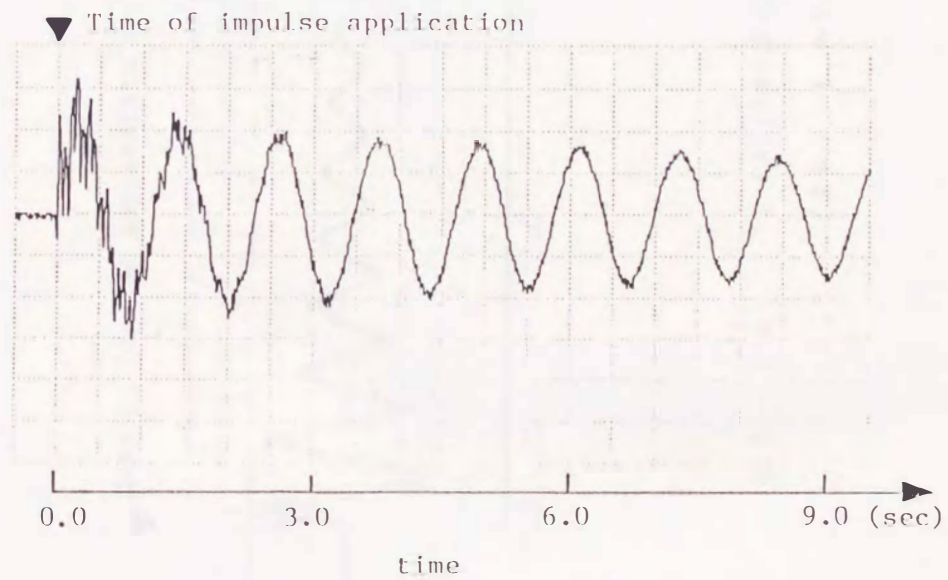


図 5 - 1 3 CDVFB制御系のみで制御する場合の応答 ( : 実験 2 )

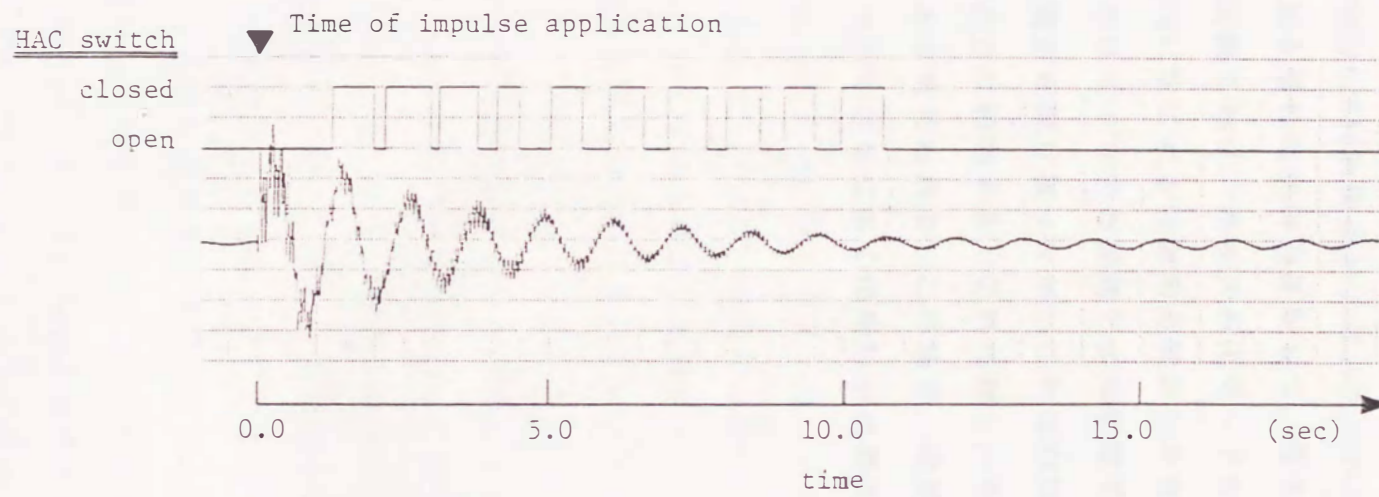


図 5 - 1 4 TS LAC/HAC法により設計した制御系の実験結果 2  
( $R=1, K_1=0.8$ の場合)

本章では、TS LAC/HACと呼ぶLAC/HAC法を修正した新しい制御系設計法を提案した。簡単な片持はりの制御問題を例にとり、TS LAC/HAC法の特徴とその実現方法を計算機シミュレーションと実験によって示した。TS LAC/HAC法によって設計された制御系は、通常のLAC/HAC制御系がスピルオーバーによって不安定となる場合にも安定性を保ち、しかも優れた制御効果をもつ。各モードの固有構造減衰を精度よく同定することが困難であり、非モデル化モードの減衰比が不明であることを考慮すると、TS LAC/HAC法による制御系の設計は非常に有効である。

また、本章においてはスイッチの開閉により制御系はLAC/HAC制御系とLAC制御系のどちらかになる場合を取り扱ったが、これはHAC制御のフィードバック量に0か1の係数をかけることに相当する。これに対し、その係数を0から1の間で連続的に変化させることも考えられる。この場合、効果的な制御を行うためには、その係数の決定法についてさらに多くの検討が必要であり、実現方法も複雑になると考えられる。

## 第 6 章

### ま と め

本論文は、無限の振動モードをもつ柔軟宇宙構造物に対する弾性振動制御系の安定性について検討した結果をまとめたものである。Simonら [5]によりモーダルコントロールの理論が確立されて以来、多くの研究においてモーダルコントロールの概念が用いられている。ところが本研究において、これまであまり注目されなかった非モデル化モードや剰余モードの特性根の挙動を調べ、その安定性について検討した結果、柔軟構造物に対してモーダルコントロールの概念に基づく状態フィードバック制御系を設計する場合には、スピルオーバにより必ず不安定化するモードが存在することが証明できた。したがって、柔軟宇宙構造物に対しても安定性を保証できる制御系が必要となる。しかも、地上においてパラメータ同定実験を行うことが困難なので、制御系はパラメータ誤差（特に固有減衰比の影響が大きい）に対してロバストでなければならない。そこで、そのような制御系の設計法について検討した結果、柔軟宇宙構造物に対しても閉回路制御系の安定性を保証でき、しかも固有減衰比の誤差にロバストな制御系を設計する方法を提案できた。

弾性振動制御系は、設計法の観点から、出力フィードバック制御系とモーダルコントロールの概念に基づく状態フィードバック制御系に大別できる。柔軟宇宙構造物を状態フィードバックにより制御する場合、スピルオーバのために必ずしもうまく制御できるとは限らない。そこでまず第2章では、出力フィードバック制御系の各モードの特性根の挙動を調べる方法について検討した。複数個のアクチュエータとセンサを備える閉回路制御系の特性方程式を導出し、その特性方程式を数学的に取り扱い易い形に展開した。得られた展開式を用いれば、摂動法の適用が容易になり、設計パラメータと閉回路制御系の安定性との関係が分かり易くなる（Gevarter [34]の拡張）。さらに、安定性のための十分条件の一つとして知られているcollocation条件の数式上の表現が明らかになる。また、無限次元の振動制御系に対する特性根を数値的に計算する方法についても示した。

第3章では、柔軟宇宙構造物を状態フィードバックにより制御する場合の各モードの特性根の挙動について調べた。システムの状態量は、代表的な状態推定法の一つであるモーダルフィルタを用いる方法により推定した。閉回路制御系の特性方程式を展開し、摂動法を適用することにより、各モードの安定化/不安定化を判定する式を導出してトランケートモードの安定性を調べた。その結果、アクチュエータとセンサが共に1個でnon-colocateする場合には、両者をどのように配置しても、スピルオーバー不安定となるモードが必ず存在することを数学的に証明した。

第4章では、第3章で証明した定理を確認するために、片持はりの実験装置を用いて、センサ出力から各モードの規準座標を抽出し減衰比を同定した。制御を行う場合の減衰比の増分として制御効果の定量的な評価を行い、数学モデルに基づく理論値と比較した。実験結果は理論値とほぼ一致し、定理を裏付けることができた。また、第3章で導出した安定判別式の有効性もあわせて確認した。さらに、第3章において数学的な証明ができなかった複数個のセンサを用いて状態推定を行う場合にも減衰比の同定を行い、不安定化モードの存在性について検討した。

第3章・第4章から、柔軟宇宙構造物に対しても閉回路制御系の安定性を保証できる制御系の設計法が必要となる。そこで第5章では、通常のLAC/HAC法を修正したTS LAC/HAC法という設計方法を提案し、その特徴と構成方法を計算機シミュレーションと実験によって示した。TS LAC/HAC法によって設計された制御系は、通常のLAC/HAC制御系がスピルオーバー不安定となる場合にも安定性を保ち、固有減衰比の誤差に対してロバストである。しかも、LAC制御(:CDVFB制御)より優れた制御効果が期待できる。

以上のように、本論文では柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系の安定性について検討し、無限次元の振動系に対しても安定性を保証できる制御系の設計法を示すことにより当初の目的は達成できた。むしろ実際の宇宙構造物は、その柔軟性の程度により必ずしも柔軟体としての取扱いをしなくてもうまく制御できることも多い。しかし今後、宇宙構造物の柔軟性は増大することが予想されるので、本論文の結果は重要になると思われる。最後に、残されたいくつかの課題を列挙して稿を終えることにする。

### (1) 第 3 章の定理の拡張

定理で数学的に証明できたのは，アクチュエータとセンサが共に 1 個の場合だけである．実際の宇宙構造物では，複数個のセンサが使用され，アクチュエータも複数個使用されることがあることを考慮すれば，定理の拡張が望まれる．計算機シミュレーションの結果や実験結果からは，複数個のアクチュエータと複数個のセンサを備えた制御系についても不安定化モードの存在が予想されるが，不安定化モードの存在を数学的に証明することは容易ではない．

### (2) TS LAC/HAC法の実現に関する検討課題

TS LAC/HAC法により制御系を設計するには，5 - 3 節で指摘した (1) ~ (3) の困難点を克服せねばならない．本論文で示した方法を用いればいずれも解決できるが，その方法は必ずしも最良ではない．より優れた方法を用いれば，制御コンピュータの負担軽減や制御効果の一層の向上が期待できる．

## 謝 辞

本研究は，九州大学大学院工学研究科応用力学専攻の後藤 昇弘 教授のご指導の下に行われたものである。研究を進めるにあたり，終始ご指導ご助言をいただきました後藤 教授に心より感謝の意を表します。

また，佐賀大学理工学部の瀬戸 邦聰 教授を始めといたします佐賀大学理工学部機械系の諸先生方には，研究を進めることを暖かく見守っていただくと共に多くの励ましをいただきました。感謝いたします。佐賀大学理工学部の古庄 康裕 教授には，第3章の定理の数学的証明に関しまして貴重なご助言をいただきましたことに感謝いたします。

さらに，九州大学大学院工学研究科応用力学専攻の角 誠之助 教授，生産機械工学専攻の毛利 彰 教授，造船学専攻の福地 信義 教授には，本論文全般にわたり貴重なご助言をいただきました。感謝いたします。

最後に，九州大学工学部航空工学科第5講座航空機機装・誘導研究室の皆様には，実験を行うにあたりご協力をいただきましたことに感謝いたします。



## 参 考 文 献

1. Curtain,R.F and Pritchard,A.J., Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Lecture Note in Control and Information Sciences, Ed. by Balakrishnan,A.V. and Thoma,M., Springer-Verlag, New York (1978)
2. ElJai,A. and Pritchard,A.J., Sensors and Controls in the Analysis of Distributed Systems, Halsted Press, New York (1988)
3. Lions,J.L., 訳 (黒田, 牧野), 偏微分方程式と最適制御, 東京図書 (1973)
4. Hughes,P.C. and Skelton,R.E., "Modal Truncation for Flexible Spacecraft," Journal of Guidance and Control, Vol.4, No.3 (1981) pp.291-297
5. Simon,J.D. and Mitter,S.K., "A Theory of Modal Control," Information and Control 13, (1968) pp.316-353
6. Balas,M.J., "Active Control of Flexible Systems," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.25, No.3 (1978) pp.415-436
7. Balas,M.J., "Feedback Control of Flexible Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, AC-23, No.4 (1978) pp.673-679
8. Meirovitch,L. and Öz,H., "Modal-Space Control of Large Flexible Spacecraft Possessing Ignorable Coordinates," Journal of Guidance and Control, Vol.3, No.6 (1980) pp.569-577
9. Meirovitch,L. and Baruh,H., "Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.5, No.1 (1982) pp.60-66
10. Chait,Y. and Radcliffe,C.J., "Control of Flexible Structures with Spillover Using an Augmented Observer," Journal of

- Guidance, Control, and Dynamics, Vol.12, No.2 (1989) pp.155-161
11. Johnson, Jr. C.R., "Adaptive Modal Control of Large Flexible Spacecraft," Journal of Guidance and Control, Vol.3, No.4 (1980)
  12. Meirovitch, L., Baruh, H., Montgomery, R.C. and Williams, J.P., "Nonlinear Natural Control of an Experimental Beam," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.7, No.4 (1984) pp.437-442
  13. Meirovitch, L. and Baruh, H., "The Implementation of Modal Filters for Control of Structures," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.8, No.6 (1985) pp.707-716
  14. Balas, M.J., "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," Journal of Guidance and Control, Vol.2 (1979) pp.252-253
  15. Arbel, A. and Gupta, N.K., "Robust Colocated Control for Large Flexible Space Structures," Journal of Guidance and Control, Vol.4, No.5 (1981) pp.480-486
  16. Meirovitch, L. and Silverberg, L.M., "Globally Optimal Control of Self-Adjoint Distributed Systems," Optimal Control Applications and Methods, Vol.4 (1983) pp.365-386
  17. Sesak, J.R., "Suppressed Mode Damping for Model Error Sensitivity Suppression Flexible Spacecraft Controllers," AIAA 80-1710 (1980)
  18. Aubrun, J.N. "Theory of the Control of Structures by Low Authority Controllers," Journal of Guidance and Control, Vol.3, No.5 (1980) pp.444-451
  19. Aubrun, J.N., Ratner, M.J. and Lyons, M.G., "Structural Control for a Circular Plate," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.7, No.5 (1984) pp.535-545
  20. 土屋, 柏瀬, 真鍋, "柔軟衛星の姿勢制御," 計測と制御, Vol.24, No.5 (1985) pp.410-416

21. Goto, N. and Hokamoto, S., "Root Locus Method for Active Control of Flexible Systems," Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol.30, No.89 (1987) pp.150-161
22. 外本, 後藤, "柔軟構造物制御系の特性方程式と安定化条件について," システム制御情報学会論文誌, Vol.2, No.10 (1989) pp.343-349
23. Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Company, New York, 1967
24. 角野, 三井, "非保存力を受ける周辺固定部分球形殻の弾性安定解析 I," 日本建築学会論文報告集, 第331号 (1983) pp.10-16
25. Lancaster, P., Theory of Matrices, Academic Press, New York, 1969
26. 木田, 山口, 上野, 平子, "大型宇宙構造物の D V F B 制御 — 安定性に関する考察およびその地上実験結果 — " 計測自動制御学会論文集, Vol.25, No.12 (1989) pp.1324-1330
27. 外本, 後藤, "弾性振動制御のための根軌跡法(2)," 九州大学工学集報, 第59巻, 第6号 (1986), pp.825-831
28. Goto, N. and Hokamoto, S., "On the Root Locus Method Applied to Flexural Vibration Control Systems," The Institute of Space and Astronautical Science Report SP No.5, (1987) pp.187-200
29. 外本, 後藤, "モーダルフィルタを備える柔軟宇宙構造物のスピルオーバー不安定に関する一考察," システム制御情報学会論文誌, Vol.3, No.12 (1990) pp.414-421
30. Hokamoto, S. and Goto, N., "Spillover Instability of a Flexible Structure Equipped with a Modal Filter," Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol.50, No.4 (1990) pp.363-376
31. Meirovitch, L., Baruh, H. and Oz, H., "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.6, No.4 (1983) pp.302-310
32. 太田, 青木, 開沼, "スピルオーバー除去のためのモーダルフィルタ

- の構成, "計測と制御, 25巻, 11号, (1986) pp.1015-1022
33. 児玉, 須田, システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, 1981
  34. Gevarter, W.B., "Basic Relations for Control of Flexible Vehicles," AIAA Journal, Vol.8, No.4, (1970) pp.666-672
  35. Schäfer, B.E. and Holzach, H., "Experimental Research on Flexible Beam Modal Control," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.8, No.5 (1985) pp.597-604
  36. Dugundji, J., "Simple Expressions for Higher Vibration Modes of Uniform Euler Beams," AIAA Journal, Vol.26, No.8, (1988) pp.1013-1014
  37. 外本, 後藤, "柔軟宇宙構造物振動制御系の制御効果の検証について," 機械力学講演会論文集, No.900-44, Vol.B (1990) pp.278-280
  38. 木村, 後藤, 岡, 福田, 土屋, 井上, "柔軟宇宙構造物を模した弾性梁の振動制御に関する基礎実験," 九州大学工学集報, 第61巻, 第3号 (1988), pp.301-308
  39. スタウト著, カウフマン編, 加藤訳, 演算増幅器回路 — 回路設計ハンドブック, マグロウヒル, 1983
  40. Finlayson, B.A. and Scriven, L.E., "The Method of Weighted Residuals - A Review," Applied Mechanics Reviews, 1966
  41. 今野, 山下, 非線形計画法, 日科技連, 1978
  42. Bishop, R.E.D. and Johnson, D.C., The Mechanics of Vibrations, Cambridge University Press, London, 1960
  43. 桜井, スプライン関数入門, 東京電機大学出版局, 1981

ここでは、観測スピルオーバー／制御スピルオーバーとコントロールモード／トランケートモードの特性根の関係を述べ、分離定理 (separation principle) について説明する。そのために、まず閉回路制御系の状態方程式を制御モードに関連した量とトランケートモードに関連した量に分けて表現する。

閉回路制御系の状態方程式は、第3章で示したように

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (\text{A1-1})$$

である。いまM次までのモードを制御モードとし、添字Mにより制御モードに関連した量であることを、添字Uによりトランケートモードに関連した量であることを表す。この時

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_M^T & \boldsymbol{\xi}_U^T & \dot{\boldsymbol{\xi}}_M^T & \dot{\boldsymbol{\xi}}_U^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{A1-2})$$

$$\boldsymbol{\xi}_M = [\xi_1(t) \ \cdots \ \xi_M(t)]^T \quad (\text{A1-3})$$

$$\boldsymbol{\xi}_U = [\xi_{M+1}(t) \ \xi_{M+2}(t) \ \cdots]^T \quad (\text{A1-4})$$

であり、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ に関連して

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_U \end{bmatrix} \quad (\text{A1-5})$$

$$\Lambda_M = \text{diag}(\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_M)$$

$$\Lambda_U = \text{diag}(\lambda_{M+1} \ \lambda_{M+2} \ \cdots)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_M \\ \mathbf{b}_U \end{bmatrix} \quad (\text{A1-6})$$

$$[\mathbf{b}_M]_{ij} = \phi_i(z_j) \quad i=1, \dots, M; \ j=1, \dots, p$$

$$[\mathbf{b}_U]_{ij} = \phi_i(z_j) \quad i=M+1, M+2, \dots; \ j=1, \dots, p$$

である。

よって、状態方程式 (A1-1) を制御モードとトランケートモードに関連する量に分けて表現すれば、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & \Lambda_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_M \\ B_U \end{bmatrix} u \quad (\text{A1-7})$$

となる。ここに、添字  $i=M, U$  の時に

$$x_i = [\xi_i^T \quad \dot{\xi}_i^T]^T \quad (\text{A1-8})$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Lambda_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1-9})$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix} \quad (\text{A1-10})$$

である。操作量は、(3-3)式のように

$$u(t) = -[D \quad V] \hat{x}_M = G \hat{x}_M(t) \quad (\text{A1-11})$$

と表す。また状態量は、第3章で示したように、ポイントセンサの出力を固有関数で補間するモーダルフィルタを用いて推定するとすれば、次のように表現される。

$$\hat{x}_M = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} x \quad (\text{A1-12})$$

ただし、(3-7)式より

$$[\Phi_M]_{ij} = \phi_j(y_i) \quad i=1, \dots, M; j=1, \dots, M$$

$$[\Phi_U]_{ij} = \phi_j(y_i) \quad i=1, \dots, M; j=M+1, M+2, \dots$$

と表記する時、推定行列  $E$  は

$$E = \Phi_M^{-1} [\Phi_M \quad \Phi_U] = [I \quad \Phi_M^{-1} \Phi_U] \quad (\text{A1-13})$$

となる。よって、(A1-12)式と(A1-13)式より

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_M &= \begin{bmatrix} I & \Phi_M^{-1} \Phi_U & 0 \\ 0 & I & \Phi_M^{-1} \Phi_U \end{bmatrix} x \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 & \Phi_M^{-1} \Phi_U & 0 \\ 0 & I & 0 & \Phi_M^{-1} \Phi_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \\
&= [I \quad C_U] \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \tag{A1-14}
\end{aligned}$$

と表現する。\$C\_U = 0\$ の時は \$\widehat{x}\_M = x\_M\$ となり、観測スピルオーバーが除去されることを意味する。(A1-11)式と(A1-14)式を(A1-7)式に代入すれば、状態方程式を制御モードとトランケートモードに分けて表現することができる

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_U \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_M & 0 \\ 0 & A_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_M \\ B_U \end{bmatrix} G [I \quad C_U] \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_M + B_M G & B_M G C_U \\ B_U G & A_U + B_U G C_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \tag{A1-15}
\end{aligned}$$

となる。制御スピルオーバーは、アクチュエータがトランケートモードに及ぼす影響であるから、上式中で \$B\_U G\$ により表現されている。

制御系の設計段階において、制御モードの特性根は行列 \$\{A\_M + B\_M G\}\$ の特性根となり、トランケートモードの特性根は制御力により影響を受けない（すなわち行列 \$A\_U\$ の特性根のまま）として設計される。これに対し、制御スピルオーバーが除去できる場合、すなわち \$B\_U G = 0\$ の場合、(A1-15)式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M + B_M G & B_M G C_U \\ 0 & A_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \tag{A1-16}$$

となる。また、観測スピルオーバーが除去できる場合、すなわち \$C\_U = 0\$ の場合、(A1-15)式は

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{x}_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_M + B_M G & 0 \\ B_U G & A_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ x_U \end{pmatrix} \quad (A1-17)$$

となる。(A1-16), (A1-17)式は共にブロック三角行列の形をしているので, 特性根は行列  $\{A_M + B_M G\}$  と行列  $A_U$  の特性根に一致する (: 分離定理). すなわち, 制御スピルオーバーと観測スピルオーバーのいずれか一方でも除去できれば, 設計どおりの特性をもつ制御系を構成できる. しかし, 制御スピルオーバーと観測スピルオーバーが共に存在する場合には, 特性根の位置は (A1-15) 式から計算され, 設計した位置とは異なる.



## 付録2 分布定数系における可制御性と可観測性

ここでは、分布定数系における可制御性と可観測性の定義を示し、弾性振動制御系に対する可制御性/可観測性の条件を述べる [2]。

有限の自由度をもつ集中定数系では

可制御性：ある制御によって、有限の時間内に任意の初期状態から任意の終端状態に移すことができ場合にその系を可制御であるという。

可観測性：出力を有限の時間測定することによって、任意の初期時刻における状態が正確に決定できる場合にその系を可観測であるという。

これに対して、分布定数系においては、可制御性と可観測性の概念は次のように定義される。ただし、 $E$  は状態空間とし、制御力  $u$  は  $L^2$ -空間で定義されるとする。また、添字  $f$  は終端時刻を表し、 $\|\cdot\|$  は状態空間で定義されるノルムである。

### 定義 A 2 - 1 完全可制御 (exact controllability)

任意の終端状態に対して、有限時間  $T$  の間に任意の初期状態から終端状態に移す制御が存在する場合に、その系を  $[0, T]$  において完全可制御であるという。すなわち  $\forall x_f \in E$  に対し  $x(T) = x_f$  となる  $u \in L^2$  が存在することである。

### 定義 A 2 - 2 弱可制御 (weak controllability)

任意の終端状態  $x_f$  に対して、有限時間  $T$  の間に、任意の初期状態から終端状態の近傍に移す制御が存在する場合に、その系を  $[0, T]$  において弱可制御であるという。すなわち、 $\forall x_f \in E, \forall \varepsilon > 0$  に対し

$$\|x(T) - x_f\| \leq \varepsilon$$

となる  $u \in L^2$  が存在することである。

### 定義 A 2 - 3 完全可観測 (exact observability)

時間  $[0, T]$  における観測量から任意の初期状態を決定できる場合に、観測

方程式を含めたその系を  $[0, T]$  において完全可観測であるという。

定義 A 2 - 4 弱可観測 (weak observability)

観測空間において  $0$  が観測されるのは初期状態が  $\{0\}$  の場合だけであれば、観測方程式を含めたその系を弱可観測であるという。

上述の弱可制御性/弱可観測性の定義を弾性振動制御系に適用する。ただし、 $a_r$  を  $r$  次モードの固有値の重複度とし、対応する固有関数を  $\phi_{rs}$  ( $r=1, 2, \dots; s=1, \dots, a_r$ ) とする。

アクチュエータ数を  $p$ 、 $a$  番目のアクチュエータの作用領域を  $\eta_a(z)$  で表す時、可制御性の条件は次のようになる。

$$(1) \quad p \geq \sup_r (a_r)$$

(2) 全てのモード次数  $r$  に対して

$$\text{rank}(\Phi_r^a) = a_r$$

ここに、

$$[\Phi_r^a]_{ij} = \int_D \eta_i(z) \phi_{rj}(z) dz \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, a_r \end{array}$$

である。

また、センサ数を  $q$ 、 $i$  番目のセンサの作用領域を  $\gamma_i(z)$  で表す時、可観測性の条件は次のようになる。

$$(1) \quad q \geq \sup_r (a_r)$$

(2) 全てのモード次数  $r$  に対して

$$\text{rank}(\Phi_r^s) = a_r$$

ここに、

$$[\Phi_r^s]_{ij} = \int_D \gamma_i(z) \phi_{rj}(z) dz \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, a_r \end{array}$$

である。

したがって、例えば、固有値の重複度が全て1であり、アクチュエータ/センサが一点に作用するポイントアクチュエータ/ポイントセンサである場合、1個のアクチュエータと1個のセンサを任意のモードのnode以外の点に配置すれば、可制御性・可観測性の条件は満たされる。

付録3 両端自由はりの固有値と固有関数

ここでは、長さ1の一樣な両端自由はりの横振動に対する固有値と固有関数を示す。両端自由はりは固有値0の剛体モードを二つ（並進運動と回転運動）もつので、2-7-2節に従って、固有値と固有関数の次数を再番号付けせねばならない。この時、固有関数は次のように表現できる（Bishopら[42]ら）。

$$\phi_1(z) = 1.0 \quad (A3-1)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{12} (z-0.5) \quad (A3-2)$$

$$\phi_r(z) = \cosh \beta_r z + \cos \beta_r z - \frac{\sinh \beta_r + \sin \beta_r}{\cosh \beta_r - \cos \beta_r} (\sinh \beta_r z + \sin \beta_r z)$$

$$r=3, 4, \dots \quad (A3-3)$$

1次モードは並進運動、2次モードは回転運動を意味する。ここに、 $0 \leq z \leq 1$ であり、 $\beta_r^4 = \lambda_r$ （：固有値）である。 $\beta_r$ の値をいくつか示すと

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 4.732, \quad \beta_4 = 7.853 \\ \beta_5 = 10.996, \quad \beta_6 = 14.137, \quad \dots \end{aligned} \quad (A3-4)$$

である。また固有関数(A3-1~3)は、正規直交性の条件

$$\int_0^1 \phi_r(z) \phi_s(z) dz = \delta_{rs} \quad (A3-5)$$

$$\int_0^1 \phi_s(z) \frac{d^4}{dz^4} [\phi_r(z)] dD = \lambda_r \delta_{rs} \quad (A3-6)$$

$\delta_{rs}$  : Kronecker のデルタ

を満たすように正規化されている。(A3-5,6)は、第2章の(2-4.5)式を長さ1の一樣なはりに対して書き直したものである。

図A3-1~図A3-10に1次モードから10次モードまでの正規化された固有関数の概形を示す。

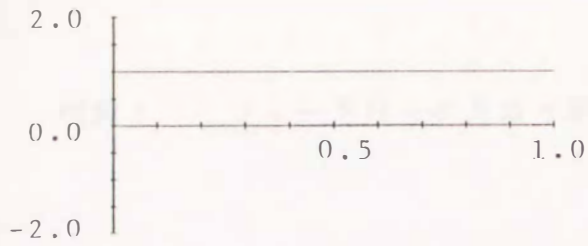


図 A 3 - 1 両端自由はりの固有関数  
(1次モード)

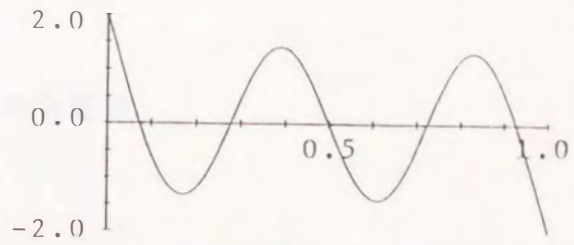


図 A 3 - 6 両端自由はりの固有関数  
(6次モード)

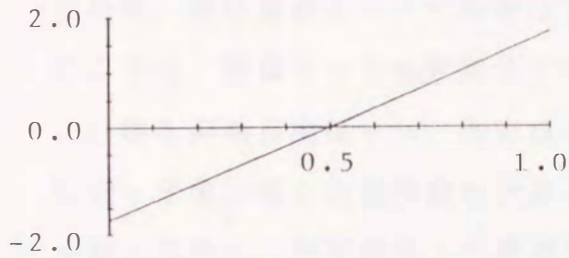


図 A 3 - 2 両端自由はりの固有関数  
(2次モード)

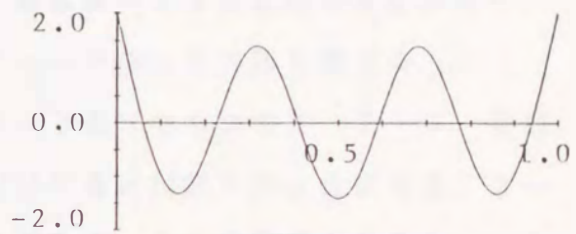


図 A 3 - 7 両端自由はりの固有関数  
(7次モード)

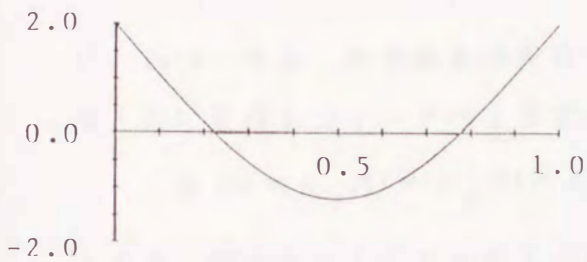


図 A 3 - 3 両端自由はりの固有関数  
(3次モード)

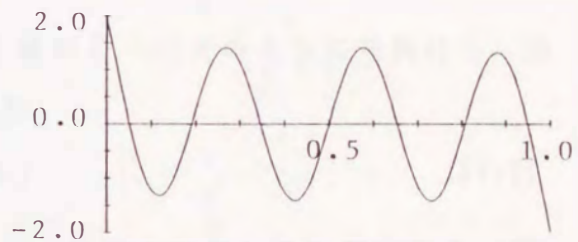


図 A 3 - 8 両端自由はりの固有関数  
(8次モード)

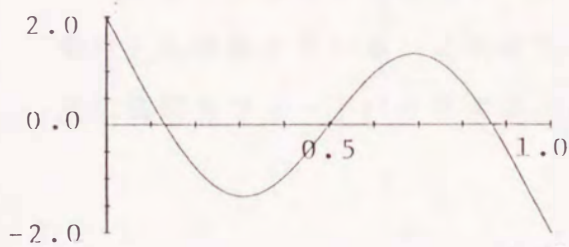


図 A 3 - 4 両端自由はりの固有関数  
(4次モード)

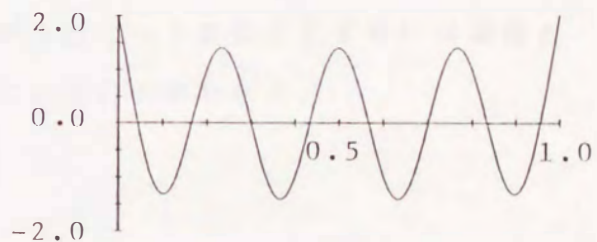


図 A 3 - 9 両端自由はりの固有関数  
(9次モード)

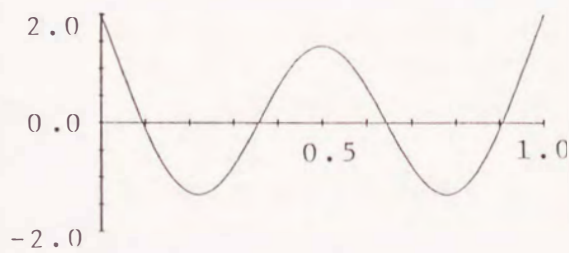


図 A 3 - 5 両端自由はりの固有関数  
(5次モード)

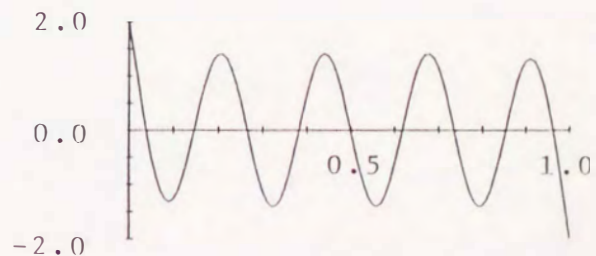


図 A 3 - 10 両端自由はりの固有関数  
(10次モード)

2-6節においては、一様な両端自由はりの振動を制御するために、2組の collocateされたアクチュエータ/センサ対を用い速度フィードバックを行った。この時、弾性振動モードの制御はできるが、剛体モードは安定化できなかった。ここでは、剛体モードを安定化するためのフィードバック方法を考える。

一様な両端自由はりは、固有値0の剛体モードを二つもつので、2-7-2節に従って固有値と固有関数の次数を再番号付けすると付録3のようになる。2-6節と同様に、可制御性・可観測性の条件を満たすように2組のアクチュエータとセンサを

$$z_1 = 0.0 \quad , \quad z_2 = 0.4 \quad (A4-1)$$

に collocateする。補償要素行列  $G(s)$  は、第2章の(2-23)式のように対角化し、速度と共に変位もフィードバックする。すなわち、

$$g(s) = g_1(s) = g_2(s) = K(1 + Ts) \quad (A4-2)$$

とする。図A4-1に  $T$  を変えて剛体モードの根軌跡を計算した結果を示す。速度フィードバックのみを行う場合は、 $T \rightarrow \infty$  とした場合に相当する。二つの剛体モードの一方は再び実軸上に降り、他方は虚軸上の零点（：本来は3次モードの零点）に向かっている。これより、固有値が0のモードを安定化するには速度と共に変位もフィードバックすることが必要であることがわかる。

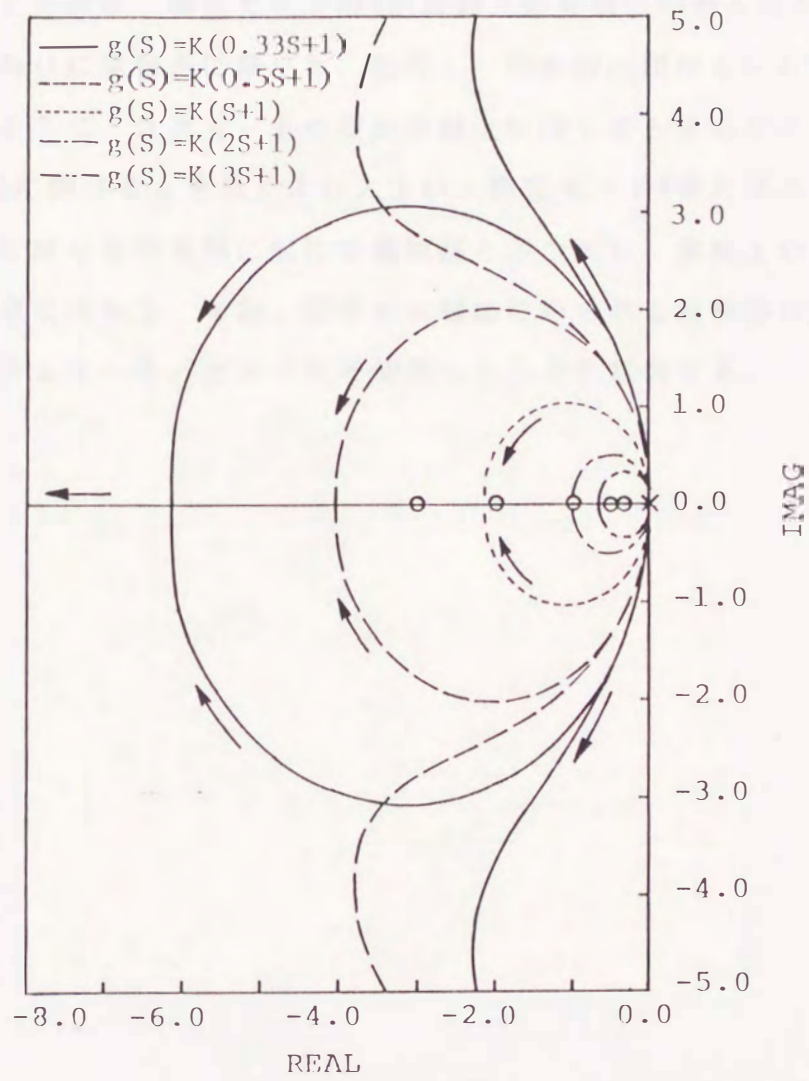


図 A 4 - 1 変位フィードバックが剛体モードの根軌跡に及ぼす影響

図 A 4 - 2 には、速度のみをフィードバックした場合と  $T = 0.2$  として変位も共にフィードバックした場合の 5 次までモードの根軌跡を示す。この図において、剛体モードの片方 (:A) は虚軸上の零点 ( : 本来は 3 次モードの零点) に向かい、他方 (:B) は再び実軸上に戻る。剛体モードの A が虚軸上の零点に向かったために、3 次モードの根が代わりに実軸上に降りる。ただし、図中の  $\triangle$  印が  $K = 4.5$  の時の特性根の位置を表すように、3 次モードの根が実軸上に降りるときのゲイン  $K$  は剛体モードの B が実軸に降りるときの  $K$  より大きい。剛体モード B または 3 次モードの根軌跡は、実軸に降りる時実軸に対称な根軌跡とぶつかり、実軸上の二重零点 ( $-5 \pm j0$ ) と無限遠点に向かう。なお、図中の斜線部にみられる根軌跡の特異な形状は、2 組のアクチュエータ / センサ対を使用したことに起因する。





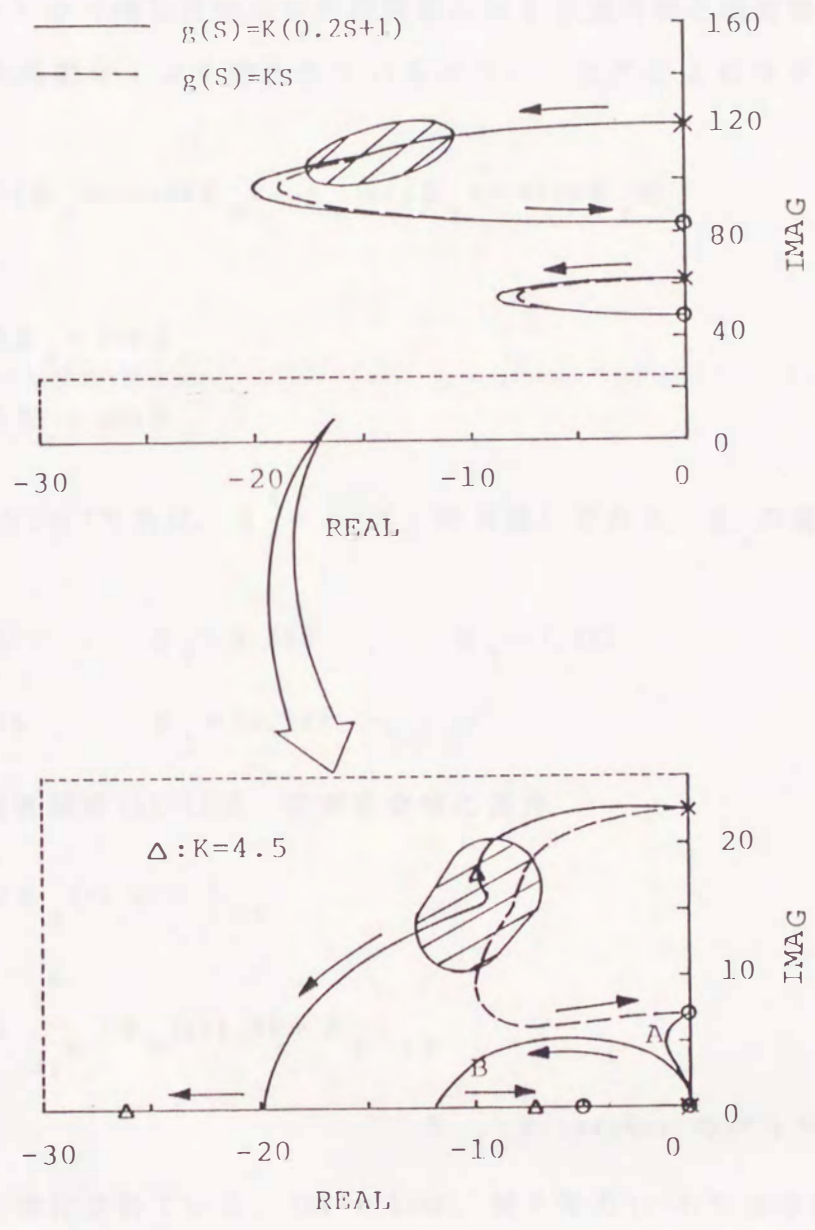


図 A 4 - 2 両端自由はりを（速度 + 変位）フィードバックにより制御する場合の根軌跡

付録5 片持はりの固有値と固有関数

ここでは、長さ1の一樣な片持はりの横振動に対する固有値と固有関数を示す。  
 $r$ 次モードの固有関数は、よく知られているように、次式により与えられる  
 (Bishopら [42]) .

$$\phi_r(x) = \cos \beta_r x - \cosh \beta_r x - a_r (\sin \beta_r x - \sinh \beta_r x) \quad (\text{A5-1})$$

ここに

$$a_r = \frac{\sinh \beta_r - \sin \beta_r}{\cosh \beta_r + \cos \beta_r} \quad (\text{A5-2})$$

である。また、 $0 \leq z \leq 1$ であり、 $\beta_r^4 = \lambda_r$  (: 固有値) である。 $\beta_r$ の値をいくつか示すと

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.875 & , & & \beta_2 &= 4.693 & , & & \beta_3 &= 7.855 \\ \beta_4 &= 10.996 & , & & \beta_5 &= 14.137 & , & & \dots & \end{aligned} \quad (\text{A5-3})$$

である。ただし固有関数 (A5-1) は、正規直交性の条件

$$\int_0^1 \phi_r(z) \phi_s(z) dz = \delta_{rs} \quad (\text{A5-4})$$

$$\int_0^1 \phi_s(z) \frac{d^4}{dz^4} [\phi_r(z)] dz = \lambda_r \delta_{rs} \quad (\text{A5-5})$$

$\delta_{rs}$  : Kronecker のデルタ

を満たすように正規化されている。(A5-4, 5) は、第2章の(2-4, 5)式を長さ1の一樣なはりに対して書き直したものである。

図A5-1 ~ 図A5-10に1次モードから10次モードまでの正規化された固有関数の概形を示す。

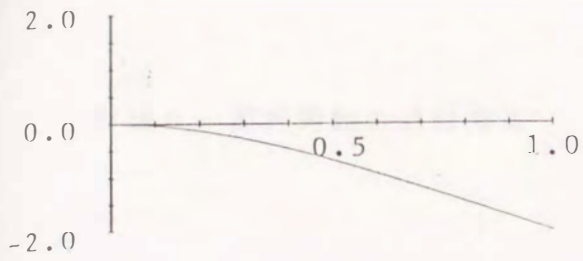


図 A 4 - 1 片持はりの固有関数  
(1次モード)

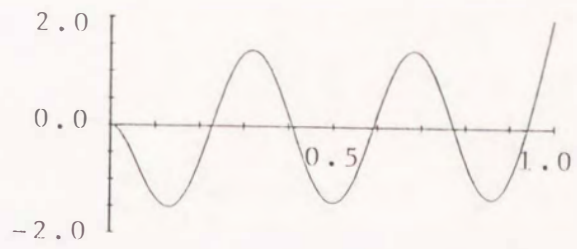


図 A 4 - 6 片持はりの固有関数  
(6次モード)

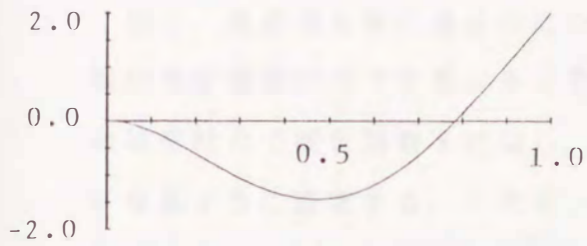


図 A 4 - 2 片持はりの固有関数  
(2次モード)

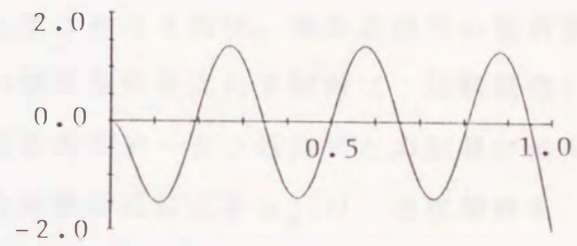


図 A 4 - 7 片持はりの固有関数  
(7次モード)

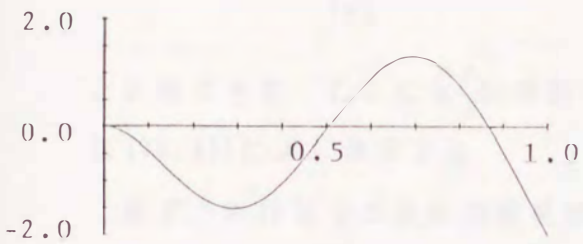


図 A 4 - 3 片持はりの固有関数  
(3次モード)

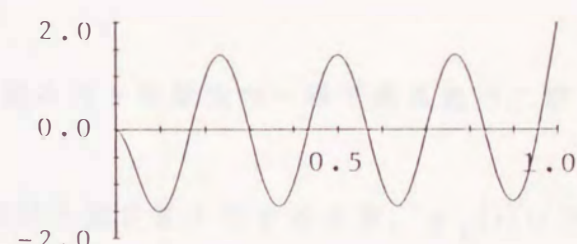


図 A 4 - 8 片持はりの固有関数  
(8次モード)

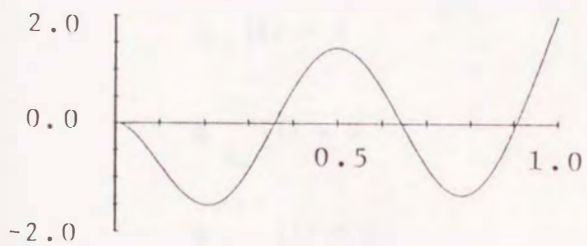


図 A 4 - 4 片持はりの固有関数  
(4次モード)

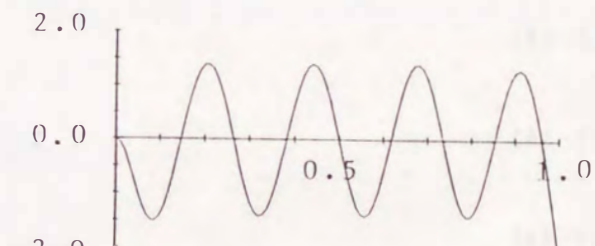


図 A 4 - 9 片持はりの固有関数  
(9次モード)

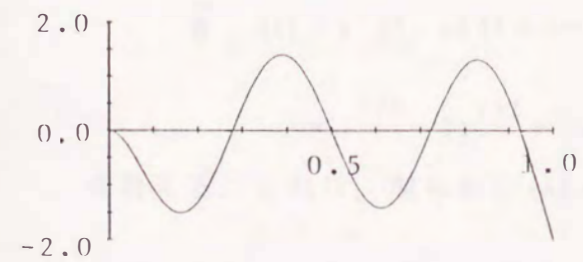


図 A 4 - 5 片持はりの固有関数  
(5次モード)

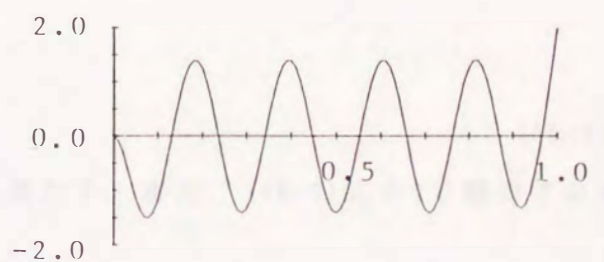


図 A 4 - 10 片持はりの固有関数  
(10次モード)

付録6 固有関数の近似方法

ここでは、各モードを共振させた状態で測定した数点の振動変位データを用いて、固有関数を同定する方法を考える。

仮に、測定点を単に滑らかにつなぐことだけを考えれば、境界近傍での固有関数の同定精度が低下する。そこで、全ての境界条件を満たす関数（：比較関数）の線形結合で固有関数を近似し、その係数を測定データと近似式との誤差が最小になるように決定する。r次モードの固有関数の近似式を $\psi_r(z)$ 、比較関数を $g_i(z)$ とし、n(r)個の比較関数の線形結合として固有関数を近似すれば、

$$\psi_r(z) = \sum_{i=1}^{n(r)} a_i^r g_i(z) \quad (\text{A6-1})$$

と表現できる。ここに $a_i^r$ は係数であり、重み付き残差法の一つである最小二乗法[40, 43]により決定する。

まず、片持はりの比較関数を求める。はりの長さを1とするとき、 $g_i(z)$ は次の式を満たさねばならない。

$$g_i(0) = 0 \quad (\text{A6-2})$$

$$g_i'(0) = 0 \quad (\text{A6-3})$$

$$g_i(1) = 0 \quad (\text{A6-4})$$

$$g_i''(1) = 0 \quad (\text{A6-5})$$

ここに、'は $d/dz$ を意味する。

さて、比較関数の候補として、

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i''(z) &= z^i (1-z)(2-z-z^2) \\ &= z^{i+3} - 3z^{i+1} + 2z^i \end{aligned} \quad (\text{A6-6})$$

を考える。これは、明らかに(A6-4)式を満たす。また、(A6-6)式をzで微分すれば

$$\tilde{g}_i^{\dots}(z) = (i+3)z^{i+2} - 3(i+1)z^i + 2iz^{i-1} \quad (\text{A6-7})$$

なので、(A6-5)式も満たす。さらに、

$$\tilde{g}_i^{\cdot}(z) = \frac{1}{i+4}z^{i+4} - \frac{3}{i+2}z^{i+2} + \frac{2}{i+1}z^{i+1} + C_0 \quad (\text{A6-8})$$

$$\tilde{g}_i^{\cdot\cdot}(z) = \frac{1}{(i+4)(i+5)}z^{i+5} - \frac{3}{(i+2)(i+3)}z^{i+3} + \frac{2}{(i+1)(i+2)}z + C_0z + C_1 \quad (\text{A6-9})$$

なので、 $C_0 = C_1 = 0$ の時、関数 $\tilde{g}_i^{\cdot\cdot}(z)$ は比較関数となる。

$$\therefore \tilde{g}_i^{\cdot\cdot}(z) = \frac{1}{(i+4)(i+5)}z^{i+5} - \frac{3}{(i+2)(i+3)}z^{i+3} + \frac{2}{(i+1)(i+2)}z \quad (\text{A6-10})$$

この時、

$$\Psi_r(z) = [g_1(z) \cdots g_{n(r)}(z)] \begin{pmatrix} a_1^r \\ \vdots \\ a_{n(r)}^r \end{pmatrix} \quad (\text{A6-11})$$

と表現される。

いま、 $r$ 次モードの共振状態において、次の $k(r)$ 個のデータを得たとする。

$$(\text{位置} : z = z_j, \text{振動変位} : w = w_j) \quad j=1, \dots, k(r)$$

この時、各測定点におけるデータと固有関数の近似式との誤差は

$$\varepsilon_j^r = [g_1(z_j) \cdots g_{n(r)}(z_j)] \begin{pmatrix} a_1^r \\ \vdots \\ a_{n(r)}^r \end{pmatrix} - w_j^r \quad (\text{A6-12})$$

となる。そこで、係数 $a_i^r$ ;  $i=1, \dots, n(r)$ は

$$E_r = \sum_{j=1}^{k(r)} (\varepsilon_j^r)^2 \quad (\text{A6-13})$$

が最小になるように選ぶ(最小二乗近似)。

(A6-12)式より, 誤差  $\varepsilon_j^r$ ;  $j=1, \dots, k(r)$  が全て 0 となるとき,

$$\begin{pmatrix} g_1(z_1) & \dots & g_{n(r)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(z_{k(r)}) & \dots & g_{n(r)}(z_{k(r)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^r \\ \vdots \\ a_{n(r)}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^r \\ \vdots \\ w_{k(r)}^r \end{pmatrix} \quad (\text{A6-14})$$

である. これを

$$G_r \mathbf{a}_r = \mathbf{w}_r \quad (\text{A6-15})$$

と表現する. ただし,  $G_r$  は  $k(r) \times n(r)$  の行列,  $\mathbf{a}_r$  は  $n(r) \times 1$  のベクトル,  $\mathbf{w}_r$  は  $k(r) \times 1$  のベクトルである. 一般に,

近似の次数:  $n(r) \leq$  データ数:  $k(r)$

なので,

$$(G_r^T G_r) \mathbf{a}_r = G_r^T \mathbf{w}_r \quad (\text{A5-16})$$

により正規方程式に変換し, 連立方程式の解として  $a_i^r$ ;  $i=1, \dots, n(r)$  を決定すれば, 二乗誤差  $E_r$  は最小となる.

第 4 章の固有関数の同定実験で用いたデータ数  $k(r)$  と近似の次数  $n(r)$  を示す.

モード次数	1 次	2 次	3 次	4 次
データ数: $k(r)$	12	12	16	23
近似次数: $n(r)$	5	5	8	11



Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

