

柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系におけるスピル オーバ不安定現象とその対策

外本, 伸治

<https://doi.org/10.11501/3086571>

出版情報：九州大学, 1991, 博士（工学）, 論文博士
バージョン：
権利関係：

柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系における
スピルオーバー不安定現象とその対策

外 本 伸 治

①

柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系における スピルオーバ不安定現象とその対策

外 本 伸 治

目 次

第 1 章	序 論	
1 - 1	柔軟宇宙構造物の弾性振動制御	1
1 - 2	従来の研究	5
1 - 3	本論文の目的と各章の構成	7
第 2 章	出力フィードバック制御系の特性方程式	
2 - 1	はじめに	9
2 - 2	閉回路制御系の記述と特性方程式	10
2 - 3	特性方程式の展開	13
2 - 4	colocation条件について	16
2 - 5	打ち切りモード次数と特性根の計算	17
2 - 6	根軌跡の一例	19
2 - 7	適用範囲の拡張	21
2 - 8	まとめ	25
第 3 章	状態フィードバック制御系の特性	
3 - 1	はじめに	26
3 - 2	状態フィードバック制御系の特性方程式とその展開	27
3 - 3	スピルオーバによる不安定化モード	31
3 - 4	スピルオーバ不安定化モードの存在定理 ($p = q = 1$)	34
3 - 5	定理を証明するための補足	35
3 - 6	まとめ	44

第4章	弾性振動制御系の制御効果の検証	
4-1	はじめに	45
4-2	実験装置	45
4-3	制御系の設計と無次元-有次元パラメータの換算	48
4-4	制御回路の構成	52
4-5	振動特性の同定	59
4-6	制御効果の同定法	72
4-7	実験結果	81
4-8	まとめ	90
第5章	弾性振動制御系の設計法の一提案	
5-1	はじめに	91
5-2	LAC/HAC制御系とLAC制御系の特性方程式	92
5-3	TS LAC/HAC制御系の設計	93
5-4	計算機シミュレーション	98
5-5	実験結果	112
5-6	まとめ	117
第6章	まとめ	118
	謝辞	121
	参考文献	122

付録 1	スピルオーバと分離定理	126
付録 2	分布定数系における可制御性と可観測性	130
付録 3	両端自由はりの固有値と固有関数	133
付録 4	フィードバック方法と剛体モードの安定性	135
付録 5	片持はりの固有値と固有関数	139
付録 6	固有関数の近似方法	141

第 1 章

序 論

1 - 1 柔軟宇宙構造物の弾性振動制御

現在計画中の宇宙基地計画や近年の人工衛星にみられるように，宇宙構造物はますます大型化の傾向にある．これらの構造物は，ロケットの打ち上げ能力や打ち上げコストの制約から，できる限り軽量であることが望まれる．その結果，構造物は非常に柔軟性が高くなるが，一方でミッションを達成するためには，姿勢や振動を高精度に制御しなければならない．したがって，それらの弾性振動を能動的に制御することが必要になる．

さて，このような柔軟構造物は無限の振動モードをもつ分布定数系であり，その運動は偏微分方程式により支配される．したがって，そのままでは取扱いが困難であるが，次のいずれかの方法により常微分方程式のように取り扱うことが可能となる．

1. 関数空間の概念に基づく方法

2. 有限次元の近似モデルをつくる方法

1. の方法は，関数空間という抽象空間を導入する応用数学的な手法である [1, 2, 3]．偏微分方程式は，半群理論または作用素論を用いて，Hilbert空間における常微分方程式や l^2 -空間での作用素微分（または積分）方程式として表現される．この方法は理論体系が整然としており，可制御性，可観測性や解の連続性，唯一性を証明するのに適している．しかし一方で，理論展開の途中には多くの仮定が設けられており，対象物の構造と数式内の各項が直接結びつかないほどに抽象化されているために，実際の構造物への応用は容易ではない．それに対し 2. の方法は，構造物の物理的な特性を考慮して有限次元のモデルをつくる工学的に取扱いが容易な方法である．有限化の際に近似誤差を伴うが，物理系との関連が深く実用的なので，実際に多くの制御系の設計において用いられる．本論文においても，2. の方法に沿って研究を進める．

有限次元の近似モデルは以下の過程により作成される。変数分離法の一つであるモード展開法により、偏微分方程式は各モードの運動を支配する連立の常微分方程式として表現される。ただし、柔軟宇宙構造物は無数の振動モードをもつので、そのままでは無数の連立常微分方程式となる。そこで、考慮モードが有限となるように、モードを打ち切らねばならない（：モードのトランケーション）。この時、考慮されるモードをモデル化モード、無視されるモードを非モデル化モードと呼ぶ。モードのトランケーション規範としてはいくつかあるが（Hughesら [4]）、一般に高周波モードが非モデル化モードとして扱われることが多い。その根拠として、高周波モードほど振幅が小さく外乱とみなせること、さらに制御系によって励起されにくいことがあげられる。なお、高周波モード以外のモードが非モデル化モードとして扱われる場合にも、モード次数の再番号付けをすることにより、高周波モードが無視される場合と同様に扱うことができる。

その結果、柔軟宇宙構造物の運動方程式は有限個の連立常微分方程式により表現できるが、制御系の設計段階では、次の理由によりモデルをさらに低次元化せねばならない。

○ on-board制御の必要性

柔軟宇宙構造物に搭載されるコンピュータは、小型・軽量でなければならず、しかも非常に短時間で計算を終えねばならない。したがって、モデルの次元は小さいほど望ましい。

○ 同定の困難性

高周波モードに対する状態量の推定やシステムパラメータの同定は容易ではなく、できても精度が悪い。

低次元化の結果、制御の対象となるモードを制御モード（controlled mode）、低次元化の際に無視されるモードを剰余モード（residual mode）という。また本論文では、非モデル化モードと剰余モードをあわせてトランケートモードと呼ぶ。図1-1に無限個のモードの分類を示し、図1-2に偏微分方程式から低次元化モデルを構築するまでの過程を模式的に示す。

制御系は、制御モードだけを考慮して設計されるが、実際にはトランケートモードが閉回路制御系に影響を及ぼす。トランケートモードの信号がセンサ出力に及ぼす影響を観測スピルオーバーといい、アクチュエータがトランケートモードに

及ぼす影響を制御スピルオーバという。

柔軟宇宙構造物の弾性振動を能動的に制御しようとする場合、スピルオーバにより閉回路制御系が不安定になることがある（スピルオーバ不安定現象）。したがって、スピルオーバ不安定現象をおこさないでしかも優れた制御性能をもつ振動制御系を設計することが必要である。以下に、柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系を設計する際に考慮しておくべき事項を示す。

- ・柔軟宇宙構造物のシステムパラメータ（構造減衰，固有値など）を地上での実験により同定することは困難である（重力，支持点，空気などの影響のため）。したがって，それらの誤差に対してロバストな制御系が要求される。
- ・構造物には，固有値が近接したモードが存在する。
- ・柔軟宇宙構造物は，複数個のアクチュエータとセンサを備える多入力-多出力系であることが多い。

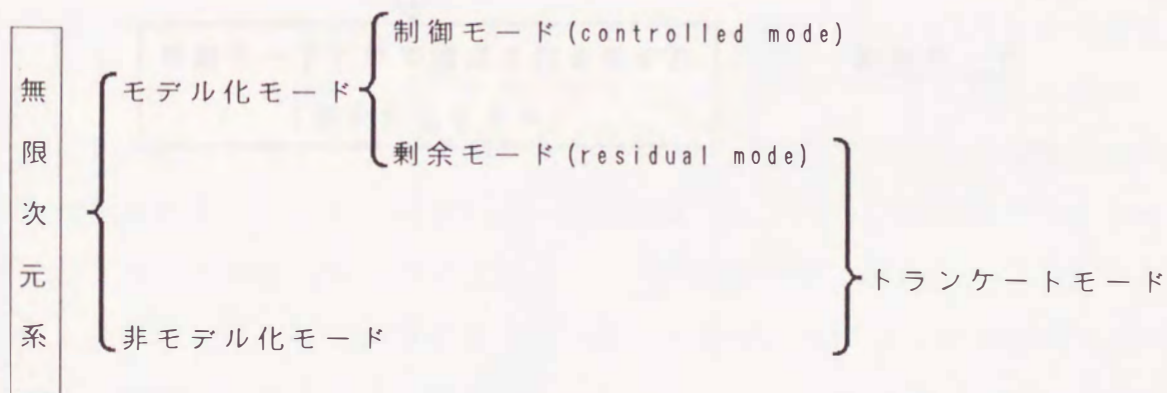


図 1 - 1 無限個の振動モードの分類

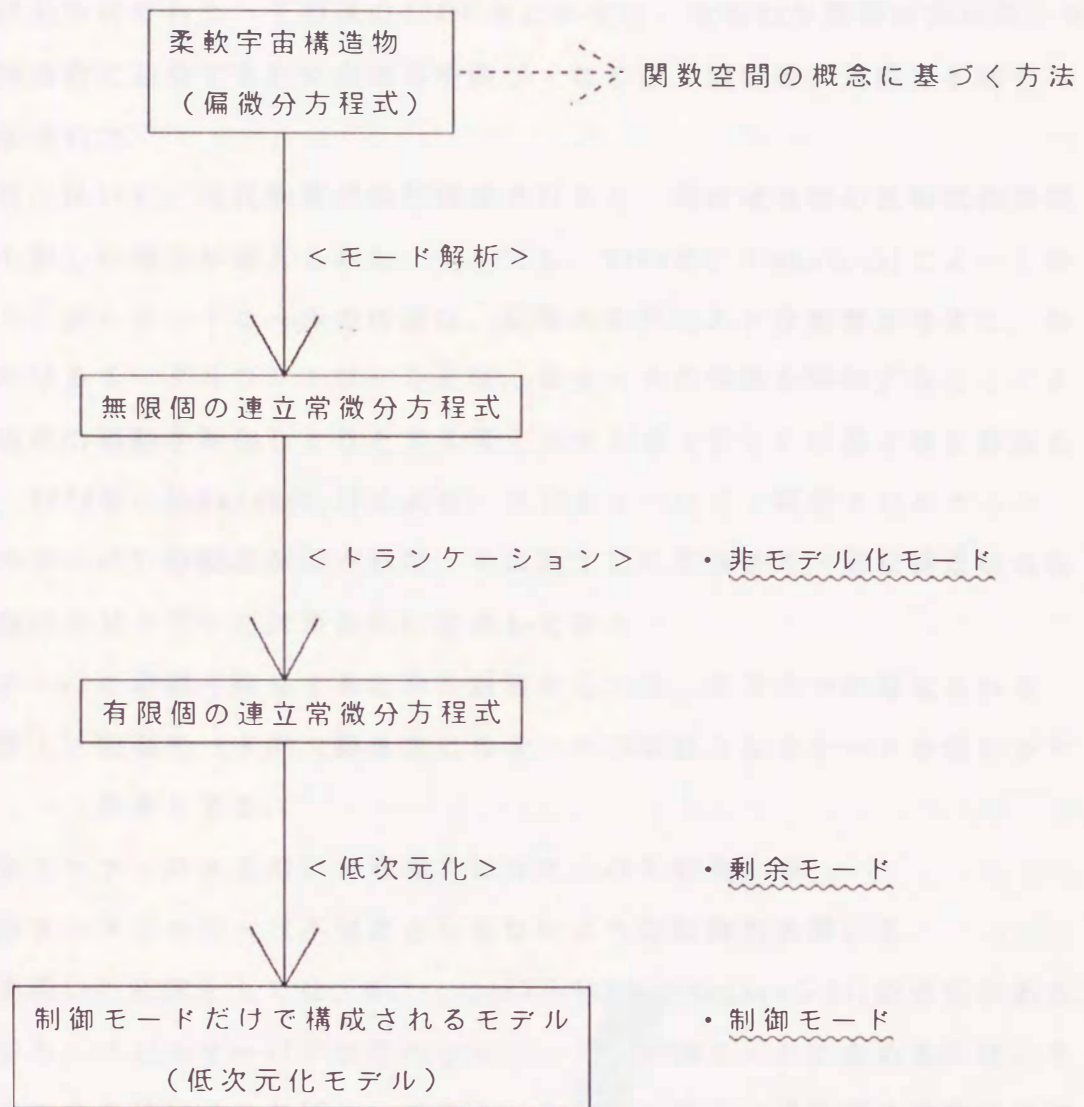


図 1 - 2 近似モデルをつくる過程

柔軟構造物の振動問題として、150年以上前から曲げ・ねじり・縦振動などについて基礎研究が行われた。その後の100年ほどの間は、古典的な基礎研究結果を任意形状の構造物に適用するための試みや曲げ・ねじり・縦振動が連成する場合への拡張がなされた。

1960年代にはいり、現代制御理論が確立されると、柔軟構造物の振動制御問題に対しても新しい概念が導入された。なかでも、1968年にSimonら[5]によって確立されたモーダルコントロールの理論は、以降の研究に大きな影響を与えた。振動制御におけるモーダルコントロールとは、各モードの振動を制御することにより、任意の点の振動を制御しようとする考え方である（詳しくは第3章を参照されたい）。1978年にはBalas[6,7]により、スピルオーバ（：観測スピルオーバ、制御スピルオーバ）の概念が示された。その後今日に至るまで、柔軟構造物の振動制御問題はスピルオーバ対策と共に発展してきた。

スピルオーバの影響を除去するための対策としては、次の三つが考えられる。

<対策1> 制御モードの次数をスピルオーバ不安定となるモードを含むまで大きくする。

<対策2> フィルタを用いて観測スピルオーバを除去する。

<対策3> スピルオーバ不安定とならないような制御則を用いる。

対策1を用いた研究としては、Meirovitchら[8,9]やHughesら[4]の研究がある。しかしながら、スピルオーバ不安定となるモードを制御モードに含めるには、その次数をどこまで増加させればよいのかという問題が残る（固有構造減衰比の同定が容易ではないことを考慮すれば、第3章に示すように、制御系の安定性を保証するためには全てのモードを制御モードに含めねばならない）。しかも、1-1節で述べたon-board制御の必要性や同定の困難性に基づく低次元化の要求とこの対策1は相反するものである。

対策2に関連して、観測スピルオーバが完全に除去できればトランケートモードの極は動かないので、スピルオーバ不安定現象は発生しないことが示されている（Balas[7], Chaitら[10]）。そこで観測スピルオーバを除去するために、Balas[6]やJohnson Jr.[11]は周波数領域のフィルタを用い、Meirovitchら[9,12,

13]は空間領域のフィルタであるモーダルフィルタを用いた。しかし、ある周波数領域の信号を完全に遮断できるような理想的な周波数領域フィルタは存在しないし、モーダルフィルタを構成する際に必要な分布センサ（：全ての点での変位または速度などを測定できるようなセンサ）の実現は容易ではないので、観測スピルオーバを完全に除去することはできない。

対策3の考え方に基づいた研究としては、DVFB(Direct Velocity Feedback)制御法を用いたBalas[6,14]やArbelら[15]の研究、IMSC(Independent Modal Space Control)法を用いたMeirovitchら[8,9,12,13,16]の研究、MESS(Model Error Sensitivity Suppression)法を用いたSesak[17]の研究、LAC/HAC(Low Authority Control/High Authority Control)法を用いたAubrunら[18,19]や土屋ら[20]の研究などがある。DVFB制御法は、閉回路制御系の安定性を保証できるが、アクチュエータとセンサをcolocateしなければならないという拘束があり、しかも各モードの減衰比はcolocationの位置で決まってしまうために優れた制振性能を達成することは困難である。IMSC法を行うには、分布アクチュエータと分布センサが必要であるがいずれも実現が困難であり、また第3章に示すように、点に作用するポイントアクチュエータ/ポイントセンサを複数個用いて分布アクチュエータ/分布センサの代わりに用いても、制御スピルオーバ/観測スピルオーバは除去できない。MESS法では、制御モード以外にいくつかの剰余モードについては安定性を保証できるが、残りの多くのトランケートモードの安定性は依然として保証できない。またLAC/HAC法は、DVFB制御に基づくLACとモーダルコントロールに基づくHACの組み合わせなので、その安定性はLACとHACのゲイン比ならびに構造物の固有減衰比に依存する。すなわち、DVFB制御により付加される安定度と固有構造減衰比による安定度がモーダルコントロールを行う際にスピルオーバにより引き起こされる不安定度より大きいようなゲイン比であれば、LAC/HAC制御系は安定となる。しかし、高周波モードの構造減衰比の同定は困難なので、閉回路制御系が安定であるために必要なゲイン比を決定することは容易ではない(第5章を参照されたい)。

以上のように、対策1~3を用いて柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系を設計しても、スピルオーバの影響を完全に除去することはできない。

1-3 本論文の目的と各章の構成

これまでに、観測スピルオーバと制御スピルオーバが共に存在する場合には、分離定理が成立しなくなるために、特性根の位置が設計した位置から動くことが Balas [7] や Chaitら [10] により示されている（付録1を参照）。しかし、その場合の特性根の挙動を調べた研究は少なく（特に非モデル化モードに対して）、どのような条件下でどのモードがスピルオーバ不安定となるかを解析的に示した研究はない。さらに、柔軟宇宙構造物に対してスピルオーバ不安定現象を起こさないような弾性振動制御系を設計する手法は確立されていない。

そこで本論文は、次の二つの目的のために行ってきた研究をまとめたものである。

第一の目的は、無限の振動モードをもつ柔軟宇宙構造物の弾性振動制御系について各モードの特性根の挙動を調べ、閉回路制御系の安定性について検討することである。そのために、閉回路制御系の行列式特性方程式を数学的に取り扱い易い形に展開し、各パラメータやトランケーション次数が特性根の位置に及ぼす影響を調べる。特に、これまであまり注目されなかった非モデル化モードを含むトランケートモードの安定性について検討する。その結果として、無限の振動モードをもつ柔軟構造物の閉回路振動制御系については、安定性が保証できないモードが存在することを数学的に証明する。

そこで第二の目的は、柔軟宇宙構造物に対してもスピルオーバ不安定現象を起こさない制御系の設計手法を提案することである。柔軟宇宙構造物は地上実験によるシステムパラメータの同定ができないので、あらかじめそれらの大きさを精度よく推定することは困難である。特に、固有構造減衰比は閉回路制御系の安定性に大きな影響を及ぼすので、固有構造減衰比の誤差に対してロバストな制御系を設計することが必要となる。本論文では、柔軟宇宙構造物に対しても閉回路制御系の安定性を保証でき、かつ優れた制御性能をもつ制御系の設計方法を示す。さらに、そのような制御系を実際に構成する方法を述べ、その有効性について検討する。

本論文は、以下の6章から構成されている。

第1章は序論であり，柔軟宇宙構造物の弾性振動制御を行う場合の問題点とそれに対する従来の研究・現状を概観し，本論文の目的と各章の構成について概説する。

第2章では，出力フィードバックにより制御される無限次元系の行列式特性方程式を導出し，各パラメータが閉回路制御系の安定性に及ぼす影響を調べやすい形に特性方程式を展開する。また，無限次元系に対して特性根の位置を推定する方法を述べる。なお，ここで示す特性方程式の展開法は，以降の章においても基本となる。

第3章では，状態フィードバックにより制御される無限次元系の特性根の挙動について調べる。特に，モーダルフィルタにより状態推定を行う場合のトランケートモードの安定性について検討し，状態フィードバック制御系では安定性を保証できないモードが必ず存在するというスピルオーバー不安定化モードの存在定理を示す。

第4章では，第3章の定理を裏付けるために，実験装置を用いて制御効果の検証実験を行う。さらに，第3章のスピルオーバー不安定化モードの存在定理において取り扱えなかった場合にも，実験データをもとに定理の自然な拡張が予測されることを示す。

第5章では，第3章と第4章での結果をふまえて，無限次元系に対しても安定性を保証でき，かつ優れた制御性能をもつ制御系の設計方法を示す。シミュレーション計算と実験により，制御系の特徴と構成方法を検討し，その有効性を示す。

第6章は本論文の結論であり，各章の内容を総括し今後の課題などについて述べる。

第 2 章

出力フィードバック制御系の特性方程式

2-1 はじめに

柔軟構造物に対する能動振動制御系は，設計法の観点から，出力フィードバック制御系とモーダルコントロールの概念に基づく状態フィードバック制御系に大別できる．出力フィードバック制御系が出力量そのものから操作量を決定するのに対し，状態フィードバック制御系は，出力量からシステムの状態量を推定し，それに基づき操作量を計算する．振動系の状態が完全に推定できれば，状態（出力を含む）を制御でき，しかも多変数制御に適した状態フィードバック制御系が出力フィードバック制御系より優れている．しかし，第3章に示すように，柔軟構造物を状態フィードバックにより制御する場合には，状態の推定が不完全なためにスピルオーバーによる不安定現象が発生することがある．

そこで本章では，無限次元の柔軟振動系を出力フィードバックにより制御する場合の振動制御特性を調べる方法について検討する．まず，複数個のアクチュエータとセンサを備える閉回路制御系の行列式特性方程式を導出し，各パラメータが閉回路制御系の安定性に及ぼす影響を調べやすい形に特性方程式を展開する．次にその展開式を用いて，安定性のための十分条件の一つとして知られている collocation 条件の数学的表現について考える．さらに，無限次元の振動制御系について根軌跡を描く方法を述べる．また議論の適用範囲を拡張するために，多次元の横振動が生じる場合，固有値が重複する場合，アクチュエータ/センサがある有限領域に作用する場合，の取扱い方法を示す．なお，本章で示す特性方程式の展開法は，第3章以降においても理論展開の基本である．

本章の内容は，日本航空宇宙学会の Transactions に掲載されたもの [21]，システム制御情報学会論文誌に掲載されたもの [22] に基づいている．

2-2 閉回路制御系の記述と特性方程式

柔軟構造物は分布定数系であり，その運動は次のような偏微分方程式により支配される [23]．ただし，柔軟構造物の固有構造減衰は微小なので無視しているが，これは固有減衰をあらかじめ精度よく同定することは困難なので，固有減衰を 0 として安全側で制御系を設計することを考慮したものである．

$$L[w(z, t)] + m(z) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} = f(z, t) \quad (2-1)$$

境界条件：

$$B_i[w(\partial D, t)] = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad \partial D: \text{境界} \quad (2-2)$$

ここに

L ：線形自己随伴微分作用素

$w(z, t)$ ：領域 D 内の点 z の時刻 t における振動変位

$m(z)$ ：分布質量

$f(z, t)$ ：分布制御力

B_i ：線形微分作用素

である．ただし，(2-1) の方程式系では取り扱えない柔軟構造物の振動問題も数多くあることを付け加える．例えば，[24] などである．

(2-1) 式における振動変位 $w(z, t)$ は展開定理：

$$w(z, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(z) \xi_r(t) \quad (2-3)$$

によりモード展開できる．（多次元の横振動が発生する場合には，2-7-1 節の方法を参照されたい．）ここに

$\phi_r(z)$ ： r 次モードの固有関数

$\xi_r(t)$ ： r 次モードの規準座標

であり，固有関数は次の正規直交性の条件を満たす．

$$\int_D m(z) \phi_r(z) \phi_s(z) dD = \delta_{rs} \quad (2-4)$$

$$\int_D \phi_s(z) L[\phi_r(z)] dD = \lambda_r \delta_{rs} \quad (2-5)$$

δ_{rs} : Kronecker のデルタ

$\lambda_r (\geq 0)$: r 次モードの固有値

固有値が重複する場合には、2-7-2節の方法を適用すればよい。

(2-3)式を(2-1)式に代入して、正規直交性の条件式(2-4, 5)を考慮すると、運動方程式は次のように無限個の常微分方程式で表現できる。

$$\ddot{\xi}_r(t) + \lambda_r \xi_r(t) = \int_D \phi_r(z) f(z, t) dz \quad (2-6)$$

$r=1, 2, \dots$

(2-3)と(2-6)式をラプラス変換して、分布制御量に対する振動変位 $w(z, t)$ のラプラス変換を求めると次のようになる。

$$W(z, s) = \int_D \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(y) \phi_r(z)}{s^2 + \lambda_r} F(z, s) dz \quad (2-7)$$

ここに、 s はラプラス変換のパラメータであり、 $F(z, s)$ は $f(z, t)$ のラプラス変換を表す。

ここで、出力フィードバック制御系として、 p 個のアクチュエータと q 個のセンサを備える図2-1の閉回路制御系を考える。各アクチュエータと各センサはそれぞれ点に作用するポイントアクチュエータとポイントセンサであり、次のベクトルによりそれらの作用点を表す。

$$\mathbf{a}(z) = [\delta(z-z_1) \quad \dots \quad \delta(z-z_p)]^T \quad (2-8)$$

$$\mathbf{b}(z) = [\delta(z-y_1) \quad \dots \quad \delta(z-y_q)]^T \quad (2-9)$$

ここに、 $\delta(z)$ は Dirac のデルタ関数である。(アクチュエータ/センサがある有限領域に作用する場合には、2-7-3節のようにすれば以下の議論を適用できる。) センサ出力より、分布制御量のラプラス変換は

$$F(z, s) = -\mathbf{a}^T(z) \mathbf{G}(s) \int_D \mathbf{b}(y) W(y, s) dy \quad (2-10)$$

となる。ここに、 \mathbf{G} は $p \times q$ の補償要素行列であり、その (i, j) 要素は $[\mathbf{G}]_{ij} = g_{ij}$ である。ただし、 g_{ij} は i 番目のアクチュエータと j 番目のセンサの動特性

を含む補償要素であり，(2-10)式の右辺のマイナスの符号は負のフィードバックを行うことを意味する。

(2-10)式を(2-7)式に代入することにより，図2-1の閉回路制御系の特性方程式を次のように導出できる。

$$\det \left\{ I + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + \lambda_r} \Phi_r G(s) \right\} = 0 \quad (2-11)$$

ここに， I は $q \times q$ の単位行列であり， $q \times p$ の行列である Φ_r の (i, j) 要素は $\phi_r(y_i) \phi_r(z_j)$ である。

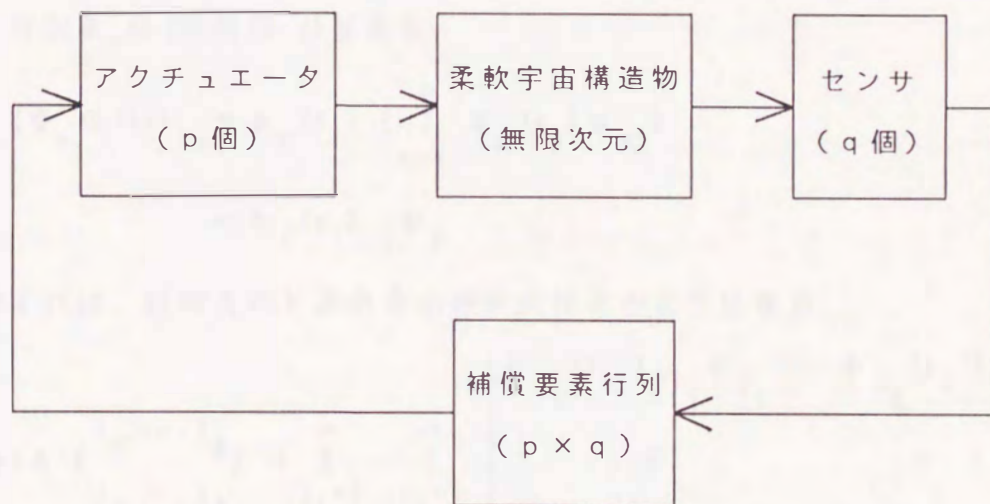


図2-1 出力フィードバックを行う閉回路制御系のブロック線図

2-3 特性方程式の展開

行列式特性方程式(2-11)の各要素はパラメータが結合した無限個の級数和であり、そのままでは各パラメータが安定性に及ぼす影響を予測することは困難である。そこで、関連するパラメータをまとめるように(2-11)式を展開する。

いま、行列 A を

$$A = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + \lambda_r} \Phi_r G(s) \quad (2-12)$$

とおく。この時 A は $q \times q$ の行列なので、特性多項式の関係 [25] を用いれば、

$$\det(I + A) = 1 + \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q} \det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} \right\} \quad (2-13)$$

となる。ここに $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q}$ は、 $1 \sim q$ までの数字の中から k 個の数字を選

び ${}^q C_k$ 個の和をとることを意味する。 i_1, \dots, i_k は選んだ k 個の数字を表し、 $i_1 < \dots$

$< i_k$ である。また、 $\det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix}$ は行列 A の k 次の小行列式である。したが

って、行列 $\Phi_r G(s)$ の (i, j) 要素を

$$\begin{aligned} [\Phi_r G(s)]_{ij} &= \phi_r(y_i) \left\{ \sum_{a=1}^p \phi_r(z_a) g_{aj} \right\} \\ &= \phi_r(y_i) \psi_{jr} \end{aligned} \quad (2-14)$$

と表現すれば、行列 A の k 次の主小行列式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} &= \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_k=1}^{\infty} \begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) \cdot \psi_{j_1} & \dots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \cdot \psi_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) \cdot \psi_{j_1} & \dots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \cdot \psi_{j_k} \end{vmatrix} \\ &\times \prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{j_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=1}^{\infty} \begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \end{vmatrix} \\
&\quad \times [i_1 \psi_{j_1} \cdots i_k \psi_{j_k}] \prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{j_n}} \quad (2-15)
\end{aligned}$$

ただし、 $\sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=1}^{\infty}$ により、 $\prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{j_n}}$ をもつ項は $k!$ 個存在するので、

それらの係数の和は

$$\begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \end{vmatrix} \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \{ \text{sgn} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} [\psi_{j_1} \cdots \psi_{j_k}] \} \quad (2-16)$$

となる。ここに、 $\sum_{(j_1, \dots, j_k)}$ は (j_1, \dots, j_k) のすべての順列について和をとること

を表し、 $\text{sgn} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix}$ は (j_1, \dots, j_k) が (i_1, \dots, i_k) の偶順列の時は $+1$ であり、奇

順列の時は -1 となる。したがって、行列式の定義より、(2-16)式は

$$\begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{j_1} & \cdots & \psi_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{j_1} & \cdots & \psi_{j_k} \end{vmatrix} \quad (2-17)$$

と表現できる。さらに(2-17)式の右側の行列式に対して、同様な演算を繰り返せば、

$$\begin{vmatrix} i_1 \psi_{j_1} & \cdots & i_1 \psi_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ i_k \psi_{j_1} & \cdots & i_k \psi_{j_k} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq p} \begin{vmatrix} g_{a_1 i_1} & \cdots & g_{a_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{a_k i_1} & \cdots & g_{a_k i_k} \end{vmatrix} \\
 \times \begin{vmatrix} \phi_{j_1}(z_{a_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(z_{a_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_k}) \end{vmatrix} \quad (2-18)$$

となる。したがって、 $k > q$ の時に

$$\begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-19)$$

$k > p$ の時に

$$\begin{vmatrix} \phi_{j_1}(z_{a_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(z_{a_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_k}) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-20)$$

となることに注意すれば、特性方程式は次のように展開できる。

$$1 + \sum_{k=1}^{\min(p, q)} \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq q} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq \infty} \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq p} \begin{vmatrix} \phi_{j_1}(y_{i_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(y_{i_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(y_{i_k}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{a_1 i_1} & \cdots & g_{a_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{a_k i_1} & \cdots & g_{a_k i_k} \end{vmatrix} \right\}$$

$$\times \begin{bmatrix} \phi_{j_1}(z_{a_1}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(z_{a_k}) & \cdots & \phi_{j_k}(z_{a_k}) \end{bmatrix} \left\{ \prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{j_n}} \right\} = 0 \quad (2-21)$$

各行列式は，センサ位置における固有関数の値を要素とする行列式（：センサ行列式），補償要素行列により構成される行列式，そしてアクチュエータ位置における固有関数の値を要素とする行列式（：アクチュエータ行列式）である．可制御性の条件，可観測性の条件（付録2を参照）が満たされない場合には，あるモードに対して，アクチュエータ行列式，センサ行列式が常に零となり，そのモードの特性が変えられないことが展開式からもわかる．また，次節に示すように，この展開式を用いれば，colocation条件の特性方程式における表現が明らかになる．さらに，第3章で示すように，摂動法の適用が容易になり，設計パラメータと閉回路制御系の安定性との関係を調べる際に有用である．

2-4 colocation条件について

特性方程式の展開式(2-21)を用いて，colocation条件について考える．colocation条件とは，センサとアクチュエータを同数，同位置に配置する条件である．すなわち，数式で表現すれば

$$p = q, \quad z_i = y_i \quad (i=1, \dots, p) \quad (2-22)$$

となる．可制御性・可観測性の条件が満たされていれば，アクチュエータとセンサをcolocateしDVFB制御を行えば，振動系を安定化できることが知られている（Balas[14]）．（ただし，アクチュエータとセンサの動特性は無視できるとする．木田ら[26]は，アクチュエータやセンサが遅れなどの特性をもつ場合，安定性が保証できなくなると指摘している．）また，各アクチュエータにはcolocateしたセンサの出力のみがフィードバックされるように，補償要素行列を

$$G(s) = \text{diag}[g_1(s) \cdots g_p(s)] \quad (2-23)$$

とおく．速度フィードバックを行う場合には

$$g_i(s) = K_i s^{a_i} \quad i=1, \dots, p \quad (2-24)$$

となる。ここに K_i は定数ゲインである。この時、特性方程式 (2-21) は次のようになる。

$$1 + \sum_{k=1}^p \left\{ \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq p} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \infty} (K_{a_1} \dots K_{a_k}) s^k \right. \\ \left. \times \left| \begin{array}{ccc} \phi_{j_1}(z_{a_1}) & \dots & \phi_{j_k}(z_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j_1}(z_{a_k}) & \dots & \phi_{j_k}(z_{a_k}) \end{array} \right|^2 \prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{j_n}} \right\} = 0 \quad (2-25)$$

上式から明らかなように、特性方程式を s についての多項式で表現すれば、安定性のための十分条件の一つとして知られている collocation 条件は、 s のすべてのべき乗についてそれらの係数が正となることを意味することがわかる。

2-5 打ち切りモード次数と特性根の計算

特性方程式 (2-11) または (2-21) 式は無限のモードを含むが、計算機により特性根を計算する際には、有限個のモード次数で打ち切らねばならない。この時の打ち切りモード次数 R は、理論的には大きい方が望ましいが、実際には次の理由によりそれほど大きくとれない。

(1) 高次モードになるにつれ、振動特性（固有値、固有関数など）を求めることが困難になる。また、同定できてもその同定精度は低い。

(2) 計算機の精度と計算能力に限りがある。

そこで、実際には低次モードの挙動が重要となることが多いことを考慮し、打ち切りモード次数を

$$R = (\text{興味ある最大のモード次数}) + a \quad (2-26)$$

と表現する。ここに、 a は 0 または自然数であり、次のように決定すればよい。

a を 0 から順次増やして、興味あるモードの特性根の変動を調べる。 a の増加に

対して特性根の動きが収束する場合に，その収束値を無限次元の振動系におけるそのモードの特性根であるとみなす。

フィードバックゲインの大きさによって， α に対する特性根の動きの収束性が異なれば，各フィードバックゲインごとに α を決定すればよい。この時， R 次モードと $(R + 1)$ 次モードの固有値が近ければ特性根の収束性は悪いので， $(R + 1)$ 次モードまでを考慮するように α を決定しなければならない。逆に，各モードの固有値が互いに十分離れていれば， α に対する特性根の動きの収束はかなり良好である。例えば，一様なはりなどでは $\alpha = 1$ で十分よい収束性が得られる。図2-2に，長さ1の一様な両端自由はりについて α を変えて特性根を計算した場合の根軌跡の一例を示す（計算に用いた両端自由はりのモード次数や制御系の構成については2-6節を参照）。

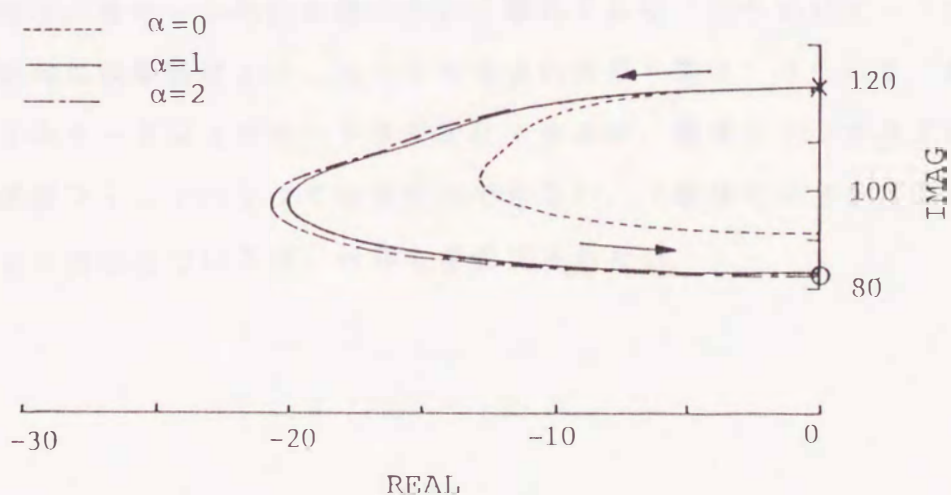


図2-2 打ち切りモード数と根軌跡の収束性

2-6 根軌跡の一例

ここでは、柔軟構造物として長さ1の様な両端自由はりを例にとり、2-5節に示した根軌跡の計算方法を確認する。

両端自由はりは固有値0の剛体モードを二つ（並進運動，回転運動）もつので，2-7-2節に従って固有値と固有関数の次数を再番号付けせねばならない。固有値ならびに固有関数については，付録3を参照されたい。この時，1次モードは並進運動を，2次モードは回転運動を表す。1次モードと2次モードの固有値が等しいので，可制御性・可観測性の条件を満たすには，2組以上のアクチュエータ/センサが必要である。そこで，2組のアクチュエータ/センサ対を可制御性・可観測性の条件を満たすように

$$z_1 = 0.0 \quad , \quad z_2 = 0.4 \quad (2-27)$$

にcolocateする。補償要素行列は(2-23)式のように対角行列とし，速度フィードバックを行う。G(s)の要素を

$$g(s) = g_1(s) = g_2(s) = K S \quad (2-28)$$

として，フィードバックゲインKをパラメータとした場合の5次モードまでの根軌跡を計算する。

この構造物は，各モードの固有値が互いに離れており，打ち切りモード次数Rに対する根軌跡の収束性はよい。R=6の場合の結果を図2-3に示す。ただしこの場合，3次モード以上のモードは安定化できるが，剛体モードを表す原点の4重根は，速度フィードバックでは安定化できない。（剛体モードを安定にするフィードバック方法については，付録4を参照されたい。）

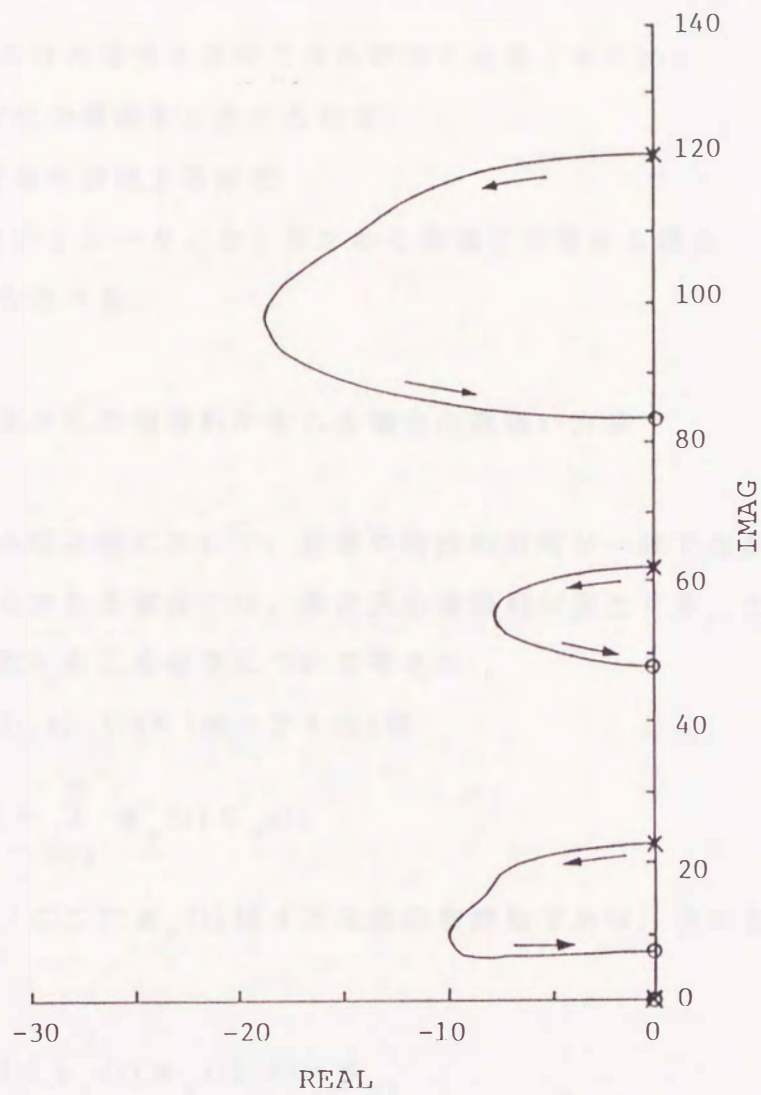


図 2 - 3 両端自由はりを速度フィードバックにより
制御する場合の根軌跡

2-7 適用範囲の拡張

ここでは、本章の理論を適用できる範囲を拡張するために、

- (1) 多次元の横振動が生じる場合
- (2) 固有値が重複する場合
- (3) アクチュエータ/センサがある領域に作用する場合

の取扱い方法を述べる。

2-7-1 多次元の横振動が生じる場合の取扱い方法

細長い棒状の構造物において、質量や剛性の分布が一様でなかったり外力が同時に多方向から加わる場合には、多次元の横振動が発生する。そこで、ここでは d 次元の横振動がおこる場合について考える。

振動変位 $\mathbf{w}(z, t)$ ($: d \times 1$ のベクトル) は

$$\mathbf{w}(z, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_r(z) \xi_r(t) \quad (2-29)$$

と表現できる。ここに $\boldsymbol{\phi}_r(z)$ は d 次元の固有関数であり、次の正規直交性の条件を満たす。

$$\int_D m(z) \boldsymbol{\phi}_r^T(z) \boldsymbol{\phi}_s(z) dD = \delta_{rs} \quad (2-30)$$

$$\int_D \boldsymbol{\phi}_s^T(z) L[\boldsymbol{\phi}_r(z)] dD = \lambda_r \delta_{rs} \quad (2-31)$$

d 次元の横振動を制御するために、位置 z_j ($i=1, \dots, p$) にそれぞれ d 個のアクチュエータを配置して、 d 次元の制御力 $\mathbf{f}(z, t)$ を作用させる。この時、(2-6)式に対応して

$$\ddot{\xi}_r(t) + \lambda_r \xi_r(t) = \int_D \boldsymbol{\phi}_r^T(z) \mathbf{f}(z, t) dz \quad (2-32)$$

$r=1, 2, \dots$

となる。したがって、振動変位のラプラス変換は次のように表現できる。

$$W(z, S) = \int_D \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(y) \phi_r^T(z)}{S^2 + \lambda_r} F(z, S) dz \quad (2-33)$$

一方、 d 次元の横振動を測定するために、位置 y_i ($i=1, \dots, q$)にそれぞれ d 個のセンサを配置する。この時、(2-10)式に対応して、分布制御力のラプラス変換は

$$F(z, S) = -a^T(z) G(S) \int_D b(y) W(y, S) dy \quad (2-34)$$

となる。ここに G は、 $pd \times qd$ の補償要素行列である。したがって、特性方程式は

$$\det \left\{ I + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{S^2 + \lambda_r} \Phi_r G(S) \right\} = 0 \quad (2-35)$$

となる。ここに、 Φ_r は $qd \times pd$ のブロック行列であり、その (i, j) ブロックは $\phi_r(y_i) \phi_r^T(z_j)$ である。そこで、

$$\phi_r(z_j) \text{の } k \text{ 番目の要素} = \phi_r(z_{q_{ik}}) \quad (2-36)$$

と表記する。ただし

$$q_{ik} = d(i-1) + k \quad (2-37)$$

である。この時、 Φ_r の (i, j) 要素は

$$[\Phi_r]_{ij} = \phi_r(y_i) \phi_r^T(z_j) \quad i=1, \dots, qd ; j=1, \dots, pd \quad (2-38)$$

と表現でき、これは(2-11)式における表記に一致する。したがって、上述のような取扱いをすれば、多次元の横振動が発生する場合にも2-3節以降の議論が適用できる。

なお、この内容は日本航空宇宙学会のTransactionsに掲載されたもの[21]、九州大学工学集報に掲載されたもの[27]の一部である。

2-7-2 固有値が重複する場合の取扱い方法

2-6節で示した両端自由はりや全周単純支持の正方形板のように、固有値が重複するモードが存在することがある。ここではそのような構造物に対する取扱

い方法を考える。

いま，固有値 λ_r の重複度が a_r であり，対応する固有関数が ϕ_{rs} ($r=1, 2, \dots; s=1, \dots, a_r$) であるとする。ここで

$$k(r, s) = s + \sum_{i=1}^{r-1} a_i \quad (2-39)$$

と表記すれば，固有関数の次数を一つの添字 $k(r, s)$ のよって表現できる。この表記法に従えば，固有値は次式のようなになる。

$$\lambda_{k(r, 1)} = \dots = \lambda_{k(r, a_r)} \quad (2-40)$$

つまり， $k(r, s)$ を新しいモード次数とみれば，その系の固有値の重複度は 1 であるとみることができ。この時，固有値は

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r \leq \dots \quad (2-41)$$

となり，対応する固有関数は $\phi_{k(r, s)}$ である。

例えば， λ_1 の重複度が 2 のシステムは，固有値と固有関数のモード次数を次のように表現すればよい。ただし，() 内の量は元々のモード次数の数え方である。

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 (= \lambda_1) & \lambda_3 (= \lambda_2) & \dots \\ \phi_1 (= \phi_{11}) & \phi_2 (= \phi_{12}) & \phi_3 (= \phi_{21}) & \dots \end{array}$$

なお，この内容は日本航空宇宙学会の Transactions に掲載されたもの [21]，九州大学工学集報に掲載されたもの [27]，ISAS Report に掲載されたもの [28] の一部である。

2-7-3 アクチュエータ/センサが有限な領域に作用する場合の取扱い方法

本論文において，アクチュエータとセンサは点に作用するポイントアクチュエータとポイントセンサであるとしたが，現実のアクチュエータとセンサの作用領域は有限の幅をもつ。そこで，そのような場合の取扱い方法について検討する。

アクチュエータとセンサがある有限な領域に作用する場合，それらの位置を表すベクトルは次のようになる。

$$a(z) = [\eta_1(z) \quad \dots \quad \eta_p(z)]^T \quad (2-42)$$

$$b(z) = [\gamma_1(z) \quad \dots \quad \gamma_q(z)]^T \quad (2-43)$$

ここに $\eta_i(z)$ と $\gamma_j(z)$ は、それぞれ i 番目のアクチュエータと j 番目のセンサが作用する領域を表す重み関数である。ポイントアクチュエータとポイントセンサを表す関数は、重み関数 $\eta_i(z)$ と $\gamma_j(z)$ の特別な場合とみることができる。

この時、2-2節と同様な手順により、特性方程式は

$$\det \left\{ I + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + \lambda_r} \Phi_r G(s) \right\} = 0 \quad (2-44)$$

となる。ただし、 Φ_r の (i, j) 要素は

$$[\Phi_r]_{ij} = \int_D \gamma_i(z) \phi_r(z) dz \int_D \eta_j(z) \phi_r(z) dz \quad (2-45)$$

である。したがって、展開式も (2-21) 式と同様な形になるが、センサ行列式、アクチュエータ行列式はそれぞれ

$$\det \theta_k(\gamma_i) \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \int_D \gamma_{i_1}(z) \phi_{j_1}(z) dz & \dots & \int_D \gamma_{i_1}(z) \phi_{j_k}(z) dz \\ \vdots & & \vdots \\ \int_D \gamma_{i_k}(z) \phi_{j_1}(z) dz & \dots & \int_D \gamma_{i_k}(z) \phi_{j_k}(z) dz \end{vmatrix} \quad (2-46)$$

$$\det \theta_k(\eta_a) \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \int_D \eta_{a_1}(z) \phi_{j_1}(z) dz & \dots & \int_D \eta_{a_1}(z) \phi_{j_k}(z) dz \\ \vdots & & \vdots \\ \int_D \eta_{a_k}(z) \phi_{j_1}(z) dz & \dots & \int_D \eta_{a_k}(z) \phi_{j_k}(z) dz \end{vmatrix} \quad (2-47)$$

となる。

また、アクチュエータとセンサがある領域に作用する場合の特別な例として、

それぞれの重み関数が固有関数に一致する場合が考えられる。この時

$$\eta_a(z) = \phi_a(z) \quad a=1, \dots, p \quad (2-48)$$

$$\gamma_i(z) = \phi_i(z) \quad i=1, \dots, q \quad (2-49)$$

である。固有関数の正規直交性より、(2-48)式が成立すれば、操作量は a 次モードのみに作用する（：制御スピルオーバーがない）。同様に、(2-49)式が成立すれば、理想的なモーダルフィルタにより i 次モードのみが観測される（：観測スピルオーバーがない）。

なお、この内容はシステム制御情報学会論文誌に掲載されたもの [22] の一部である。

2-8 まとめ

本章では、出力フィードバックにより制御される無限次元の振動系の特性を調べる方法について検討した。アクチュエータとセンサを複数個備える閉回路制御系の特性方程式を行列式の形で導出し、(2-21)式のように各パラメータごとにまとめた行列式により展開できることを示した。その展開式を用いると、安定性のための十分条件の一つとして知られている collocation 条件は、特性方程式を s についての多項式とみるとき、その係数が全て正になることに対応することがわかった。また、無限次元の振動制御系の特性根を数値的に計算する方法を述べた。さらに一様な両端自由はりを例にとり、トランケーション次数を変えて根軌跡を計算した結果を示した。

第 3 章

状態フィードバック制御系の特性

3-1 はじめに

第2章では、無限のモードをもつ柔軟構造物を出力フィードバックにより制御する閉回路制御系の特性を調べる方法を述べた。ここでは、柔軟構造物の振動をモーダルコントロールの概念に基づく状態フィードバックにより制御する閉回路制御系の特性について考察する。

状態フィードバックを行うには、三次元空間で測定するセンサの出力からモード空間で記述される状態量（：各モードの規準座標とその時間微分）を推定しなければならない。ところが、無限のモードをもつ柔軟構造物を状態フィードバックにより制御しようとする場合、トランケートモードが状態推定に影響を及ぼす（：観測スピルオーバーの存在）。さらに、アクチュエータもトランケートモードに影響を及ぼす（：制御スピルオーバーの存在）ために、Balas [6]が指摘したように、閉回路制御系が不安定化する可能性がある。しかしこれまでに、どのような条件のもとでどのモードがスピルオーバー不安定となるかを解析的に示した研究はない。

そこで本章では、状態推定の代表的な手法の一つであるモーダルフィルタによる状態推定を行う制御系について、スピルオーバー不安定化の条件を調べる。まず、状態フィードバックを行う閉回路制御系の特性方程式を導出し、第2章で示した方法によりその特性方程式を展開する。次に展開した結果に摂動法を適用して、各モードが安定化するか不安定化するかを判定するための式を導出する。さらに導出した判定式を用いて、アクチュエータ1個とセンサ1個をnon-colocateする場合には、両者をどのように配置しても、不安定化するモードが必ず存在することを証明する。

なお、本章の内容は第33回宇宙科学技術連合講演会(東京, 1989), およびNo. 89 0-61機械力学部門講演会(福岡, 1989)で発表し、システム制御情報学会論文誌に掲

載されたもの [29]，九州大学工学部紀要に掲載されたもの [30] に基づいている。

3-2 状態フィードバック制御系の特性方程式とその展開

ここでは，無限次元の振動系を状態フィードバックにより制御する閉回路制御系の行列式特性方程式を導出し，第2章の方法に従って，その特性方程式を展開する。(2-1)式の偏微分方程式によって支配される柔軟構造物は，展開定理を用いれば(2-6)式のような無限個の常微分方程式で表現できる。(2-6)式を状態方程式で記述すれば，次式のようなになる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3-1)$$

ここに

$$\mathbf{x} = \left[\xi_{\infty}^T \quad \dot{\xi}_{\infty}^T \right]^T$$

$$\xi_{\infty}(t) = \left[\xi_1(t) \quad \xi_2(t) \quad \dots \right]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

\mathbf{I} : $\infty \times \infty$ の単位行列

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_r) \quad r=1, 2, \dots$$

$$[\mathbf{b}]_{ij} = \phi_i(z_j) \quad i=1, 2, \dots; \quad j=1, \dots, p$$

$$\mathbf{u} = \left[u_1(t) \quad \dots \quad u_p(t) \right]^T$$

であり， \cdot は時間による微分を表す。ただし，アクチュエータは点 z_1, \dots, z_p に配置した p 個のポイントアクチュエータを考え， $u_i(t)$ は点 z_i におけるアクチュエータの操作量である。

ここで，図3-1の閉回路制御系を考える。柔軟宇宙構造物は無限の振動モードをもつので， M 次モードまでを制御モードとすれば，無視された $(M+1)$ 以上のモードによりスピルオーバーが発生する。

まず，コントローラについて考える。コントローラの代表的な設計法には， M

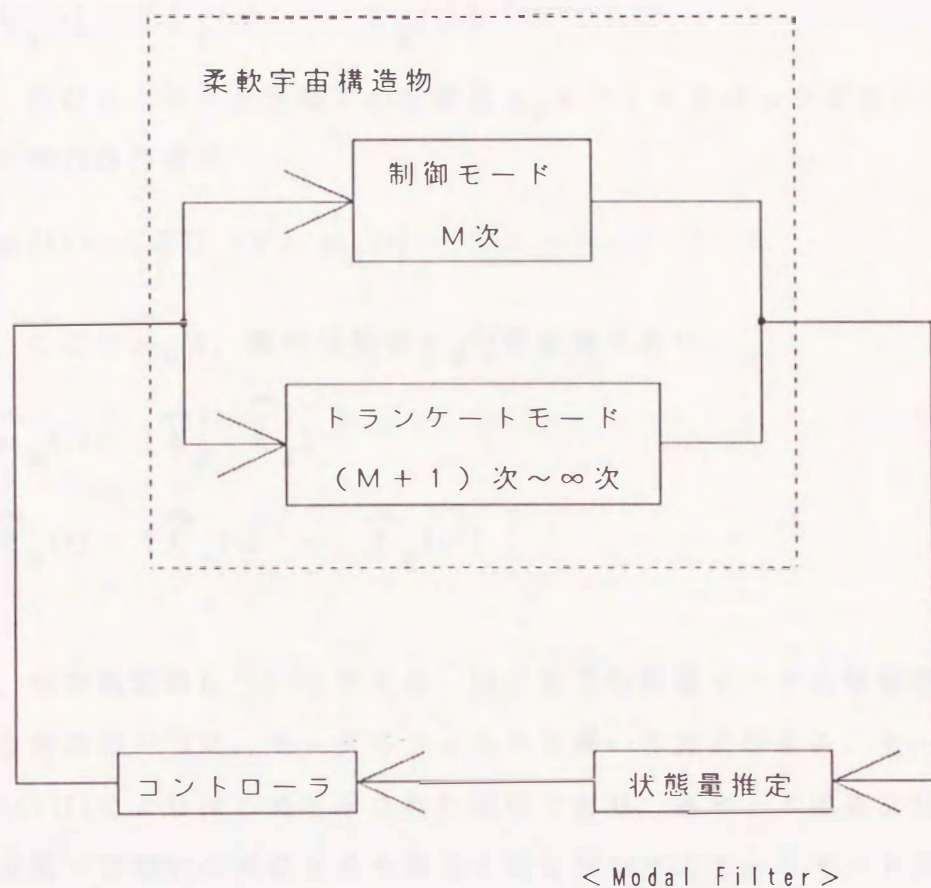


図 3 - 1 状態フィードバック制御系のブロック線図

次元の制御モードに基づく定常最適レギュレータを構成する方法や、極配置法 (Simonら [5], Meirovitchら [31]), IMSC法などがある。いずれの方法を用いても、操作量はM次までの状態量 x_M を用いて次のように表現できる。

$$u(t) = - [D \quad V] x_M(t) \quad (3-2)$$

ここに、 D, V は $p \times M$ の定数行列であり、

$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_M^T & \dot{\boldsymbol{\xi}}_M^T \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\xi}_M(t) = [\xi_1(t) \cdots \xi_M(t)]^T$$

である。ただし、モード空間での状態量 \mathbf{x}_M をフィードバックすることは不可能なので、実際の操作量は

$$\mathbf{u}(t) = - [D \quad V] \widehat{\mathbf{x}}_M(t) \quad (3-3)$$

となる。ここに $\widehat{\mathbf{x}}_M$ は、真の状態量 \mathbf{x}_M の推定量であり

$$\widehat{\mathbf{x}}_M(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\xi}}_M^T & \dot{\widehat{\boldsymbol{\xi}}}_M^T \end{bmatrix}^T$$

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_M(t) = [\widehat{\xi}_1(t) \cdots \widehat{\xi}_M(t)]^T$$

である。

次に、状態推定法について考える。M次までの制御モードの状態量を推定する代表的な方法の一つに、モーダルフィルタを用いる方法がある。モーダルフィルタはBalas [6]によりはじめて示された概念であり、各モードの直交性を利用して、三次元空間で空間的に連続な点で測定されたセンサ出力からモード空間で記述される状態量を推定するフィルタである。全ての点における変位 $w(z, t)$ が測定できれば、モード空間での規準座標は

$$\xi_r(t) = \int_D m(z) \phi_r(z) w(z, t) dD \quad (3-4)$$

により得られる。しかし、一般に連続な点での測定は不可能であり、現実には q 個のポイントセンサの出力を補間して連続な点での変位を近似することになる。補間関数として固有関数を利用する場合には、M次までの規準座標の推定量は次式によって与えられる (Meirovitchら [13], 太田ら [32] を参照)。

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_M = \begin{bmatrix} \phi_1(y_1) & \cdots & \phi_M(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(y_M) & \cdots & \phi_M(y_M) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(y_1, t) \\ \vdots \\ w(y_M, t) \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

ここに、 $w(y_i, t)$ ($i=1, \dots, M$) は点 y_i におけるノイズのない変位センサの出力である。(3-5)式より明らかのように、推定しようとする制御モード数M以上のセンサ

を(3-5)式中の逆行列が存在するように配置しなければならない。本論文においては、以後、センサ数 q は制御モード数 M に等しいとする。さてセンサ出力をモード展開すれば、 M 次モードまでの規準座標の推定量は、真の規準座標を用いて

$$\hat{\xi}_M(t) = E \xi_\infty(t) \quad (3-6)$$

と表現される。ここに

$$E = \begin{pmatrix} \phi_1(y_1) & \cdots & \phi_M(y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(y_M) & \cdots & \phi_M(y_M) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_2(y_1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \phi_1(y_M) & \phi_2(y_M) & \cdots \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

である。同様にして、三次元空間での速度が変位と同一の点で測定される時、規準座標の時間微分は

$$\dot{\hat{\xi}}_M(t) = E \dot{\xi}_\infty(t) \quad (3-8)$$

となる。したがって、制御モードの推定状態量は真の状態量を用いて次のように表現できる。

$$\hat{x}_M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} x \quad (3-9)$$

ゆえに、(3-3)、(3-9)式を(3-1)式に代入し、ラプラス変換すれば、図3-1の閉回路制御系の特性方程式は次のように得られる。

$$\begin{vmatrix} sI & -I \\ \Lambda + bDE & sI + bVE \end{vmatrix} = 0 \quad (3-10)$$

ブロックマトリクスの行列式の性質 [33] を用いれば、(3-10)式は次式のように変形できる。

$$|s^2 I + \Lambda + b(SV + D)E| = 0 \quad (3-11)$$

さらに、上式の行列の第 i 行を $s^2 + \lambda_i$ でわれば、特性方程式は

$$|I + \bar{A}| = 0 \quad (3-12)$$

となる。ここに \bar{A} の (i, j) 要素は

$$[\bar{A}]_{ij} = \frac{1}{s^2 + \lambda_i} [b (SV + D) E]_{ij} \quad (3-13)$$

$$i=1, 2, \dots \quad ; \quad j=1, 2, \dots$$

である。特性方程式(3-12)は(2-11)式と同形であるので、2-3節と同じ手順で展開できる。

その結果、状態フィードバックを行う場合の特性方程式は、次式により記述できる。

$$1 + \sum_{k=1}^p \left[\begin{array}{c} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \infty} \quad \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq M} \quad \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq p} \\ \left| \begin{array}{ccc} \phi_{i_1}(z_{a_1}) & \dots & \phi_{i_k}(z_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{i_1}(z_{a_k}) & \dots & \phi_{i_k}(z_{a_k}) \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} Sv_{a_1 j_1} + d_{a_1 j_1} & \dots & Sv_{a_1 j_k} + d_{a_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ Sv_{a_k j_1} + d_{a_k j_1} & \dots & Sv_{a_k j_k} + d_{a_k j_k} \end{array} \right| \\ \times \left[\begin{array}{ccc} e_{j_1 i_1} & \dots & e_{j_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j_k i_1} & \dots & e_{j_k i_k} \end{array} \right] \prod_{n=1}^k \frac{1}{s^2 + \lambda_{i_n}} \end{array} \right] = 0 \quad (3-14)$$

ここに、

$$v_{aj} = [V]_{aj}, \quad d_{aj} = [D]_{aj}, \quad e_{ji} = [E]_{ji}$$

である。

3-3 スピルオーバによる不安定化モード

前節で求めた特性方程式(3-14)に摂動法を適用することにより、フィードバックゲインが小さな範囲で、スピルオーバにより各モードが安定化するか不安定化するかを判定する式を導出する。

摂動法を適用するために、フィードバックゲインを

$$Sv_{aj} + d_{aj} \rightarrow K_c (Sv_{aj} + d_{aj}) \quad (3-15)$$

と置き換える。ここに、 K_c は微小な摂動ゲインである。

まず、(3-14)式に(3-15)式を代入し、 r 次モードの安定化/不安定化傾向を調べるために、 r 次モードの極の値 ($:\sqrt{\lambda_r}$) で次のように正規化する

(Gevarter [34]) .

$$\tilde{S} = \frac{S}{\sqrt{\lambda_r}}, \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{(\sqrt{\lambda_r})^2}, \quad \tilde{v}_{aj} = \frac{v_{aj}}{\sqrt{\lambda_r}}, \quad \tilde{d}_{aj} = \frac{d_{aj}}{(\sqrt{\lambda_r})^2} \quad (3-16)$$

次に、 K_c の高次の項を省略すれば、特性方程式は

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_i} \sum_{j=1}^M \sum_{a=1}^p \phi_i(z_a) K_c (\tilde{S} \tilde{v}_{aj} + \tilde{d}_{aj}) e_{ji} = 0 \quad (3-17)$$

となる。構造物の固有減衰は無視しているので、極は虚軸上に存在する。したがって、 r 次モードの極の近傍では、 \tilde{S} は次のように表現できる。(ここでは、複素平面の上半平面のみを考慮する。)

$$\tilde{S} = \varepsilon + j(1 + \delta) \quad (3-18)$$

ここに、 ε , δ は 1 に比べて微小な量であり、 $j^2 = -1$ である。 r 次モードの固有値が他のモードの固有値と十分に離れていれば、

$$\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_i \doteq \begin{cases} -1 + \tilde{\lambda}_i - 2\delta + 2\varepsilon j & (r \neq i) \\ -2\delta + 2\varepsilon j & (r = i) \end{cases} \quad (3-19)$$

なので、 $(\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_r) / (\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_i)$ は $r \neq i$ のとき微小量であり、 $r = i$ のとき 1 である。またフィードバックゲインについても、高次の微小量を消去すれば

$$K_c (\tilde{S} \tilde{v}_{aj} + \tilde{d}_{aj}) \doteq j K_c \tilde{v}_{aj} + K_c \tilde{d}_{aj} \quad (3-20)$$

となる。したがって(3-17)式の両辺に $(\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_r)$ をかけ、高次の微小量を省略すれば、特性方程式は次のようになる。

$$(-2\delta + 2\varepsilon j) + \sum_{j=1}^M \sum_{a=1}^p \phi_r(z_a) (j K_c \tilde{v}_{aj} + K_c \tilde{d}_{aj}) e_{jr} = 0 \quad (3-21)$$

この式より、

$$\varepsilon = -\frac{K_c}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{a=1}^p \phi_r(z_a) \tilde{v}_{aj} e^{jr} \quad (3-22)$$

となるので

$$P C(r) = \sum_{j=1}^M \sum_{a=1}^p \phi_r(z_a) \tilde{v}_{aj} e^{jr} \quad (3-23)$$

によって、 r 次モードの虚軸上の極からの出発方向がわかる。 $P C(r) > 0$ の時は虚軸上の r 次モードの特性根は左半平面に出発するので安定化し、 $P C(r) < 0$ の時は r 次モードの特性根は右半平面に出発するので不安定化する。

ただし、 r 次モードの固有値に近い固有値をもつ r' 次モードが存在する場合には、 $r = r'$ の時に (3-19) 式は成立しない。そのような場合、(3-17) 式の両辺に

$(\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_r)$ ($\tilde{S}^2 + \tilde{\lambda}_{r'}$) をかけ、高次の微小量を省略すると、特性方程式は ε について高次代数方程式となる。その方程式を解くことにより (3-23) 式に相当する $P C(r)$ が求められる。(ただし、高次代数方程式の解は、一般的な形に表現できないのでここでは省略する。)

(3-23) 式の $P C(r)$ は、(3-7) 式を用いて推定行列 E の各要素をセンサ位置における固有関数の値で書き換え、モード次数 r に無関係な部分をまとめて x_{as} と表現すれば

$$P C(r) = \sum_{a=1}^p \sum_{s=1}^M x_{as} \phi_r(z_a) \phi_r(y_s) \quad (3-24)$$

となる。ここで、アクチュエータとセンサの位置を決定すれば x_{as} は定数となるので、 $P C(r)$ の符号は $\phi_r(z_a) \phi_r(y_s)$ の値によって決まる。

ただし、(3-24) 式を用いて各モードの安定化/不安定化を調べる場合、次のことに注意されたい。(3-3) 式により設計したフィードバックゲインに対する閉回路制御系の特性根の位置は $K_c = 1$ の場合に対応するので、(3-24) 式による極からの出発方向の判定のみによって閉回路制御系の各モードの安定化/不安定化を判定することは不完全である。各モードの安定化/不安定化を厳密に判定するためには、特性方程式 (3-14) により、各モードの特性根を計算しなければならない。しかし、安定側に出発した特性根がフィードバックゲインを大きくすると不安定側に入る場合やその逆の場合は少なく、しかも実際のフィードバックゲインはあまり大き

くないので、 $k_c = 1$ の時の安定化/不安定化の結果がPC(r)による判定結果と逆になることは非常に稀である。(第4章の計算例を参照されたい。)さらに、3-5節の補助定理1に示すように、アクチュエータとセンサが共に1個の場合には、出発方向のみによりスピルオーバによる各モードの安定化/不安定化を完全に判定できる。

一方、実際の構造物はわずかではあるが固有減衰をもつので、スピルオーバにより不安定化するモードも必ずしも不安定とはならない。しかし構造物の固有減衰を精度よく同定することは容易ではないので、固有減衰を零として安全側で制御系を設計することが望ましい。

3-4 スピルオーバ不安定化モードの存在定理 ($p = q = 1$)

前節で導出したスピルオーバによる安定化/不安定化を判定する式PC(r)を用いて、ここでは最も簡単な場合として、アクチュエータとセンサが共に1個の場合に次の定理を証明する。ただし、可制御性、可観測性の条件は満たされているとする。

定理

「図3-1の制御系において、アクチュエータ1個とセンサ1個をnon-colocateする場合には、スピルオーバにより不安定化するモードが必ず存在する」

(証明)

$p = 1$, $M = 1$ の時に、(3-24)式は

$$PC(r) = \chi_{11} \phi_r(z_1) \phi_r(y_1) \quad (3-25)$$

となる。3-5節の補助定理2に示すように、アクチュエータとセンサをnon-colocateすれば、それらをどのように配置しても、無限個のモードの中には、アクチュエータとセンサによって挟まれる領域に偶数個のnodeをもつモードも奇数個のnodeをもつモードも存在する。つまり、 z_1 と y_1 をどのように選んでも、 ϕ_r

$(z_1) \phi_r(y_1) > 0$ となる r 次モードと $\phi_{r'}(z_1) \phi_{r'}(y_1) < 0$ となる r' 次モードが必ず存在する。この時、 x_{11} は r に無関係な定数なので、 $P C(r)$ か $P C(r')$ のいずれか一方は負となる。

一方 3-5 節の補助定理 1 に示すように、アクチュエータ 1 個とセンサ 1 個を備える閉回路制御系については、極からの出発方向により、 $K_c = 1$ の時の特性根が安定領域に存在するのか不安定領域に存在するのかを判定できる。したがって、アクチュエータ 1 個とセンサ 1 個を non-colocate する場合に、図 3-1 の閉回路制御系は、スピルオーバーにより不安定化するモードを必ずもつ。

(証明終)

定理に関して次のこともわかる。ここで状態推定のために用いたモーダルフィルタは、オブザーバと異なり、フィルタとしてのダイナミクスを含まない。また、フィードバックゲインも off-line であらかじめ決定された定数である。したがって、図 3-1 の閉回路制御系は、直接出力フィードバック制御系とみることもできる。直接出力フィードバック制御系の一様である DVFB 制御系について、Schäferら [35] は実験的研究を行い、non-colocate したアクチュエータとセンサの間に剰余モードの node が存在すれば、スピルオーバー不安定となることを指摘している。定理を DVFB 制御系に適用すれば、同じ結果を数学的に示すことができる。また、(3-25) 式より colocation 条件のもとでは、全てのランケートモードを安定化できることも容易にわかる。

3-5 定理を証明するための補足

本節では、前節で示した定理を数学的に証明するために必要な補助定理を述べ、それらを証明する。

3-5-1 補足 1

ここでは、次の補助定理 1 を証明する。

補助定理 1

「アクチュエータとセンサが共に 1 個の場合 ($p=q=1$) に、フィードバックゲイン K_c をパラメータとして根軌跡を描くと、虚軸上に根が存在するのは $K_c=0$ (:極) と $K_c=\infty$ (:零点) の時だけである」

(証明)

$p = q = 1$ の時、特性方程式 (3-14) は次のようになる。

$$1 + K_c (S v_{11} + d_{11}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(z_1) e^{-\lambda_i} S}{S^2 + \lambda_i} = 0 \quad (3-25)$$

ただしフィードバックゲインをパラメータとする根軌跡を描くために、(3-15) 式のように、フィードバックゲインを $K_c (S v_{11} + d_{11})$ に置き換えている。 $K_c=0$ の時は極に相当し、構造物の固有減衰を無視しているの、明らかに根は虚軸上に存在する。したがって

$$S = \pm j \sqrt{\lambda_r} \quad (r=1, 2, \dots) \quad (3-26)$$

である。 $K_c=0$ 以外で虚軸上に根が存在する時、 $S = \pm j a$ ($a \neq \sqrt{\lambda_r}; r=1, 2, \dots$) なので、次式が成立しなければならない。

$$\begin{cases} \frac{1}{K_c} + d_{11} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(z_1) e^{-\lambda_i} \frac{1}{\lambda_i - a^2} = 0 \\ a v_{11} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(z_1) e^{-\lambda_i} \frac{1}{\lambda_i - a^2} = 0 \end{cases} \quad (3-27)$$

一般に、 v_{11} 、 d_{11} は 0 ではないので、上式が成立するには

$$1/K_c = 0 \quad (3-28)$$

でなければならない。これは根軌跡の零点に相当する。すなわち、 $0 < K_c < \infty$ においては、虚軸上に根は存在しない。

(証明終)

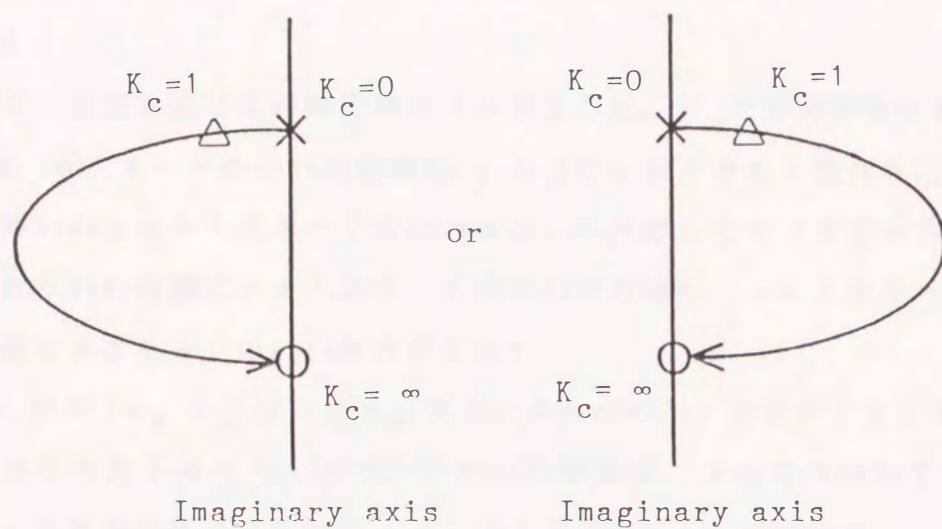


図 3 - 2 アクチュエータとセンサが共に 1 個の場合の根軌跡

アクチュエータとセンサが共に 1 個の場合の根軌跡の概形を図 3 - 2 に示す。この図からも明らかなように、 $K_c = 1$ の時の特性根の安定性は、極からの出発方向を調べることにより判定できる。

3 - 5 - 2 補足 2

空間座標を柔軟構造物の長さで正規化する時、アクチュエータとセンサによって挟まれる領域を区間 (x_0, x_1) と表せば、 $(x_0, x_1) \subset (0, 1)$ である。この時、次の補助定理 2 を証明する。

補助定理 2

「任意の区間 $(x_0, x_1) \subset (0, 1)$ を選んでも、無限のモードの中には、その区間内

に偶数個の node をもつモードも奇数個の node をもつモードも必ず存在する」

(証明)

3-5-3 節における補助定理 3 で示すように、 n_0 を十分大きくとれば、 $n > n_0$ の時、 n 次モードの node が区間 (x_0, x_1) に少なくとも 1 個存在し、かつ n 次モードの node と $n+1$ 次モードの node は互いに分離し合う (すなわち、 n 次モードの隣合う node の間に $n+1$ 次モードの node が存在し、 $n+1$ 次モードの隣合う node の間に n 次モードの node が存在する)。

いま、区間 (x_0, x_1) に $n (> n_0)$ 次モードの node が i 個存在するとする。この時、同一区間に存在する $n+1$ 次モードの node の数は、次の三つのいずれかである (図 3-3 を参照)。

$(i-1)$ 個 , i 個 , $(i+1)$ 個

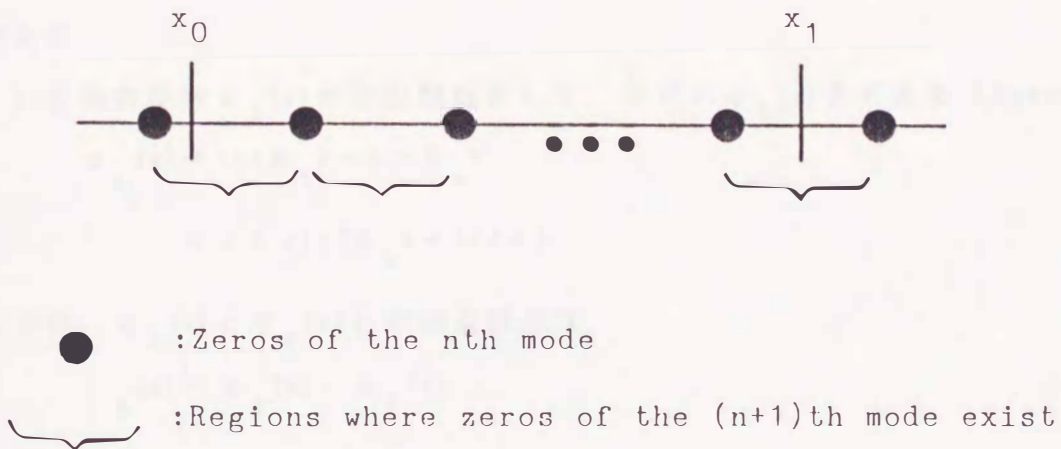


図 3-3 n 次モードの node と $n+1$ 次モードの node の位置関係

一方, n を大きくすれば $\phi_n(x)$ の node 間の距離はいくらでも小さくなるので, 区間 (x_0, x_1) に存在する node の数はいくらでも大きくなることが 3-5-3 節に示される. ゆえに, 区間 (x_0, x_1) に $(i+1)$ 個の node をもつモードが必ず存在する. つまり, 同一区間内に偶数個の node をもつモードも奇数個の node をもつモードも存在する.

(証明終)

3-5-3 補足 3

ここでは, 長さ 1 の一様な片持はり (境界条件: clamped-free) を例にとり考察する. ただし, 他の境界条件をもつ柔軟構造物についても同様に議論できる.

一様な片持はりの n 次モードの固有関数は, 付録 5 に示すように, 次式により与えられる.

$$\phi_n(x) = \cos \beta_n x - \cosh \beta_n x - a_n (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \quad (3-29)$$

ここに

$$a_n = \frac{\sinh \beta_n - \sin \beta_n}{\cosh \beta_n + \cos \beta_n}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n \quad (3-30)$$

である.

いま固有関数 $\phi_n(x)$ の近似関数として, 次式の $\psi_n(x)$ を考える (Dugundji [36]).

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \cos \beta_n x - \sin \beta_n x \\ &= \sqrt{2} \sin(\beta_n x + 3/4\pi) \end{aligned} \quad (3-31)$$

この時, $\phi_n(x)$ と $\psi_n(x)$ との近似誤差は

$$c_n(x) = \phi_n(x) - \psi_n(x) \quad (3-32)$$

なので,

$$\begin{aligned} |c_n(x)| &= |(1 - a_n) \sin \beta_n x - e^{-\beta_n x} - (1 - a_n) \sinh \beta_n x| \\ &\leq e^{-\beta_n x} + |1 - a_n| |\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x| \end{aligned} \quad (3-33)$$

である。ここで

$$|1 - a_n| = \left| \frac{e^{-\beta_n} + \sqrt{2} \sin(\beta_n + \pi/4)}{\cosh \beta_n + \cos \beta_n} \right|$$

$$< 4e^{-2\beta_n} + 4\sqrt{2} e^{-\beta_n} \quad (3-34)$$

である。ただし、 $\beta_n > \ln 4$ の時、 $1/2 e^{\beta_n - 1} > 1/4 e^{\beta_n}$ であることを用いている。したがって、

$$|c_n(x)| < e^{-\beta_n x} + 2\sqrt{2} e^{-\beta_n(1-x)} - 2e^{-\beta_n(2+x)} - 2\sqrt{2} e^{-\beta_n(1+x)}$$

$$+ 4e^{-2\beta_n} + 4\sqrt{2} e^{-\beta_n} + 2e^{-\beta_n(2-x)} \quad (3-35)$$

となる。

近似誤差 c_n の大きさは、境界に近づくにつれ大きくなり、中央付近で小さくなる。また、 n の増加に伴い $|c_n|$ は小さくなり、例えば、 $|c_n|$ が正規化した固有関数の最大値の $1/100$ 未満になるのは、 $n=5$ の時は $x=0.28 \sim 0.72$ であり、 $n=10$ の時は $x=0.14 \sim 0.86$ である。

一方、 $\psi_n(x)$ の l 番目の零点を \tilde{x}_n^l と表記すれば、

$$\tilde{x}_n^l = \frac{4l - 3}{4\beta_n} \pi \quad (3-36)$$

である。さらに、 β_n は

$$\beta_n = (n - 1/2) \pi + \varepsilon_n \quad (3-37)$$

と表現できる。ここに、 ε_n は微小量であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (3-38)$$

である。

ここで、次の補助定理 3 を証明する。

補助定理 3

「(0, 1)内の任意の区間 (x_0, x_1) において, n を十分大きくとれば, n 次モードの node と $n+1$ 次モードの node は互いに分離し合う」

(証明)

定数 $\delta (> 0)$ を, 次の関係が成立するように選び固定する.

$$(x_0 + 3\delta, x_1 - \delta) \subset (x_0, x_1) \subset (x_0 - \delta, x_1 + \delta) \subset (0, 1)$$

この時, $n \geq n_0$ に対して次の (3-39) ~ (3-42) 式が成立するような n_0 が存在する.

$$\frac{\pi}{4\beta_n} < x_0 \tag{3-39}$$

$$\frac{2\pi}{\beta_n} < x_1 - x_0 - 4\delta \tag{3-40}$$

$$x \in [x_0 - \delta, x_1 + \delta] \Rightarrow |c_n(x)| \leq 1 \tag{3-41}$$

$$\frac{\pi}{2\beta_n} < \delta \tag{3-42}$$

(3-39) 式と (3-36) 式から $\tilde{x}_n^1 < x_0$ であり,

$$\tilde{x}_n^{\ell+1} - \tilde{x}_n^\ell = \frac{\pi}{\beta_n} = \frac{\pi}{(n-1/2)\pi + \varepsilon_n} \tag{3-43}$$

なので, (3-40) 式から $\tilde{x}_n^\ell, \tilde{x}_n^{\ell+1} \in (x_0 + 3\delta, x_1 - \delta)$ である自然数 ℓ が存在する. ここで, $\tilde{x}_n^\ell + \Delta x_n^\ell$ を \tilde{x}_n^ℓ に一番近い $\phi_n(x)$ の node とすれば, (3-32) 式より

$$-\psi_n(\tilde{x}_n^\ell + \Delta x_n^\ell) = c_n(\tilde{x}_n^\ell + \Delta x_n^\ell) \tag{3-44}$$

である. よって, (3-31) 式より

$$\Delta x_n^\ell = -\frac{1}{\beta_n} \sin^{-1} \left[\frac{c_n(\tilde{x}_n^\ell + \Delta x_n^\ell)}{\sqrt{2}} \right] \tag{3-45}$$

となる.

一方, $\tilde{x}_n^{\ell} \pm \pi/2\beta_n$ の 2 点において, 近似関数 $\psi_n(x)$ の値は一方で $\sqrt{2}$ をとり, 他方で $-\sqrt{2}$ をとる. よって, (3-32) 式と (3-41) 式より

$$\phi_n\left(\tilde{x}_n^{\ell} - \frac{\pi}{2\beta_n}\right) \phi_n\left(\tilde{x}_n^{\ell} + \frac{\pi}{2\beta_n}\right) < 0 \quad (3-46)$$

である. ゆえに中間値の定理より, $\phi_n(x)$ は区間 $(\tilde{x}_n^{\ell} - \pi/2\beta_n, \tilde{x}_n^{\ell} + \pi/2\beta_n)$ に node をもつ. よって

$$|\Delta x_n^{\ell}| < \frac{\pi}{2\beta_n} \quad (3-47)$$

であり, $\tilde{x}_n^{\ell} \in (x_0 + 3\delta, x_1 - \delta)$ なので, (3-42) 式から区間 $(x_0 + 2\delta, x_1)$ に $\phi_n(x)$ の node が存在する.

さらに, $0 \leq x \leq 1$ において, $\sin^{-1} x \leq \pi x/2$ なので (図 3-4 を参照)

$$\left| \sin^{-1} \frac{c_n(\tilde{x}_n^{\ell} + \Delta x_n^{\ell})}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} |c_n(\tilde{x}_n^{\ell} + \Delta x_n^{\ell})| \quad (3-48)$$

に注意すれば, (3-35) 式と (3-45) 式より

$$\begin{aligned} |\Delta x_n^{\ell}| &\leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta_n} |c_n(\tilde{x}_n^{\ell} + \Delta x_n^{\ell})| \\ &< \frac{K}{\beta_n} e^{-\gamma\beta_n} \\ &= \frac{K}{\{(n-1/2)\pi + \varepsilon_n\}} e^{-\gamma\{(n-1/2)\pi + \varepsilon_n\}} \\ &= \delta_n \end{aligned} \quad (3-49)$$

である. ここに, $\gamma = \min(x_0 - \delta, 1 - x_1 - \delta)$ であり, K は n に無関係な定数である.

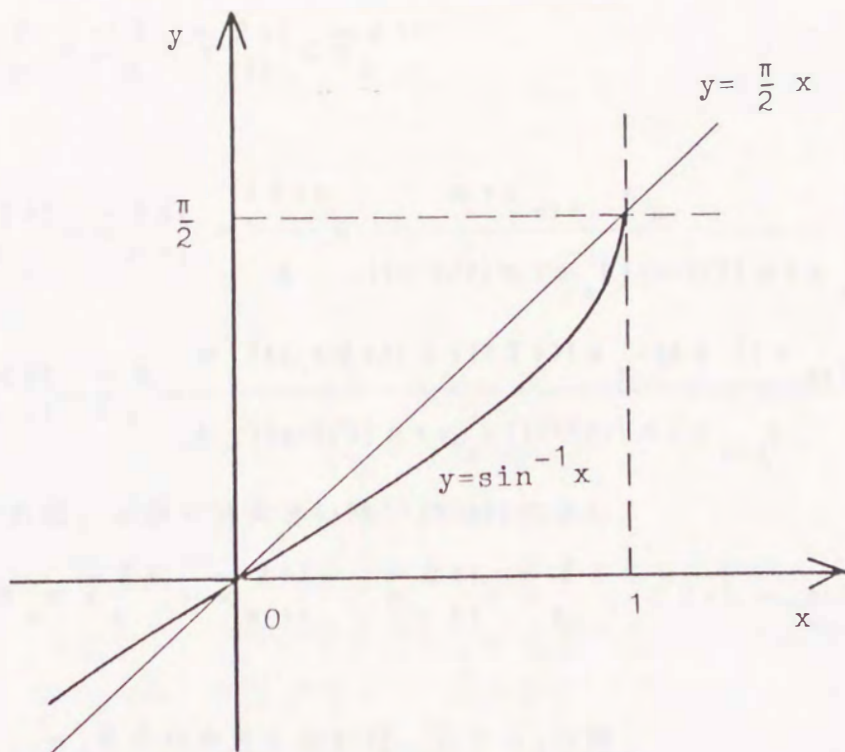


図 3-4 $y = \sin^{-1} x$ と $y = \pi x / 2$ のグラフ

$\phi_n(x)$ は $n-1$ 個の node をもつ [23] から l 番目の node を \bar{x}_n^l と書けば, (3-49) 式から

$$\bar{x}_n^l \in (\tilde{x}_n^{l+1} - \delta_n, \tilde{x}_n^{l+1} + \delta_n) \quad (3-50)$$

$$\bar{x}_{n+1}^l \in (\tilde{x}_{n+1}^{l+1} - \delta_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}^{l+1} + \delta_{n+1}) \quad (3-51)$$

$$\bar{x}_n^{l-1} \in (\tilde{x}_n^l - \delta_n, \tilde{x}_n^l + \delta_n) \quad (3-52)$$

$$\bar{x}_{n+1}^{l-1} \in (\tilde{x}_{n+1}^l - \delta_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}^l + \delta_{n+1}) \quad (3-53)$$

である。一方,

$$\tilde{x}_{n+1}^{\varrho} < \tilde{x}_n^{\varrho} < \tilde{x}_{n+1}^{\varrho+1} < \tilde{x}_n^{\varrho+1} \quad (3-54)$$

であり,

$$\tilde{x}_n^{\varrho+1} - \tilde{x}_{n+1}^{\varrho+1} = \frac{4\varrho+1}{4} \pi \frac{\pi + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\{(n-1/2)\pi + \varepsilon_n\} \{(n+1/2)\pi + \varepsilon_{n+1}\}} \quad (3-55)$$

$$\tilde{x}_{n+1}^{\varrho+1} - \tilde{x}_n^{\varrho} = - \frac{\pi}{4} \frac{(4n-4\varrho+1)\pi + (4\varrho+1)\varepsilon_n - (4\varrho-3)\varepsilon_{n+1}}{\{(n-1/2)\pi + \varepsilon_n\} \{(n+1/2)\pi + \varepsilon_{n+1}\}} \quad (3-56)$$

に注意すれば, n が十分大きい時, (3-49)式より

$$2\delta_n < \tilde{x}_n^{\varrho+1} - \tilde{x}_{n+1}^{\varrho+1}, \quad \tilde{x}_{n+1}^{\varrho+1} - \tilde{x}_n^{\varrho} \quad (\varrho=1, \dots, n-1) \quad (3-57)$$

となる。

よって, n_0 を十分大きくとれば, $n > n_0$ の時

$$\tilde{x}_{n+1}^{\varrho-1} < \tilde{x}_n^{\varrho-1} < \tilde{x}_{n+1}^{\varrho} < \tilde{x}_n^{\varrho} \quad (3-58)$$

が成立する。したがって, 補助定理3が証明された。

(証明終)

3-6 まとめ

本章では, 無限の振動モードをもつ柔軟構造物を状態フィードバックにより制御する閉回路制御系の特性について検討した。状態は, 空間的に離散なセンサ出力を固有関数により補間するモーダルフィルタを構成して推定した。まず, 閉回路制御系の特性方程式を導出し, 第2章と同様な手法により, その特性方程式を展開した。次に展開式に摂動法を適用して, 各モードが安定化するか不安定化するかを判定する式を求めた。その判定式を用いて, アクチュエータとセンサが共に1個で non-colocate される場合には, 両者をどのように配置しても, スピルオーバー不安定となるモードが必ず存在することを数学的に証明した。