

位相振動子モデルを用いたオルガンパイプの周波数 引き込み現象に関する研究

岡田, 昌大

<https://hdl.handle.net/2324/2236238>

出版情報 : Kyushu University, 2018, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン :
権利関係 :

位相振動子モデルを用いた
オルガンパイプの周波数引き込み現象に関する研究
A study on frequency locking of organ pipes
using the phase oscillator model

岡田 昌大
Masahiro Okada
2019年3月

目 次

第 1 章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 自励振動系と位相振動子モデル	1
1.3 周波数引き込み現象	4
1.4 パイプオルガンに関する従来研究	5
1.5 本論文の目的と構成	6
第 2 章 オルガンパイプの周波数引き込み現象の観察	8
2.1 はじめに	8
2.2 位相振動子モデルによる予測	8
2.3 正弦波外力による検証	10
2.3.1 検証方法	10
2.3.2 結果	10
2.4 複合音外力による検証	17
2.5 第 2 章のまとめ	19
第 3 章 正弦波による位相感受関数の推定	20
3.1 はじめに	20
3.2 理論	20
3.3 推定方法	24
3.4 結果と考察	26
3.5 第 3 章のまとめ	32
第 4 章 他種外力による位相感受関数の推定	33
4.1 はじめに	33
4.2 パルスを用いた推定法	33
4.2.1 理論	33
4.2.2 推定方法	35
4.2.3 結果と考察	37

4.3	ホワイトノイズを用いた推定法	37
4.3.1	理論	39
4.3.2	推定方法	41
4.3.3	結果と考察	41
4.4	第4章のまとめ	42
第5章	位相感受関数を用いたパイプ対の組み合わせ最適化	46
5.1	はじめに	46
5.2	位相感受関数と組み合わせ最適化	46
5.3	2本のパイプ対の組み合わせ最適化	47
5.3.1	振動系2つにおける周波数引き込み現象に対する従来の考え方	47
5.3.2	支配方程式の分離	48
5.3.3	評価結果	50
5.4	位相感受関数が不明である場合の組み合わせ最適化	53
5.4.1	理論	53
5.4.2	評価結果	55
5.5	第5章のまとめ	57
第6章	総括	58
6.1	本論文のまとめ	58
6.2	位相振動子モデルの速い振動への適用限界	60
6.3	おわりに	61
付録A	パワー変動データに対するフィッティングの方法	63
付録B	位相振動子モデルによる共鳴管の効果に関する考察	66
付録C	パルス外力を用いた位相感受関数の推定における誤差の検討	69
参考文献		73

第1章 序論

1.1 はじめに

パイプオルガン（図 1.1）はその起源を紀元前 2 世紀までさかのぼることができ、長い歴史の中で洗練されてきた楽器である。一人オーケストラとも呼ばれるこの楽器は、非常に多くのパイプ（オルガンパイプ）から構成され、その数は大きなものだと 1 万を超える。そして、演奏される際には、その中の複数のパイプが同時に鳴り、倍音を重ね合うことで様々な音色を生み出す。

オルガンパイプの大多数は、フルーパイプと呼ばれるエアリード楽器である。その音は、流体现象と音響現象が相互に絡み合って発生する。図 1.2 にその模式図を示す。オルガンパイプに送り込まれる直流的な空気流は、スリットを通して高速なジェット（噴流）となり、それがエッジにぶつかるとともにエッジ上部の共鳴管の影響を受けることで音波へと変換され、外部へと放射される。このとき、共鳴管はジェットの振動や周波数を安定化させる役割も果たしていると言われている。以上が簡単な説明であるが、流体運動であるジェットのふるまいがとても複雑であるため、詳細な発音メカニズムは未だにわかっていない [1, 2]。

このように、オルガンパイプの物理的素性は非常に複雑であるが、後に述べるように、オルガンパイプは直流的な空気流から音（交流）が発生する自励振動系としての側面があり、本研究ではそのような音響事象に焦点を当てる。本章では、その準備事項として、自励振動系とその解析に用いる位相振動子モデルについて説明する。

1.2 自励振動系と位相振動子モデル

音響学において、外力のある減衰振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \quad (1.1)$$

は、これまでに共振などの多くの現象を解明するのに用いられており、非常に重要な概念である (μ : 減衰に関する係数, ω : 固有角周波数)。しかしながら、この系が持続した振動を保つ（持続した振動解 $x(t)$ が存在する）ためには、外力 $F(t)$ も振動するものでないといけないが、現実の系においてはそのような加振力ばかりであるとは考えにくい。つまり、現実世



図 1.1: パイプオルガン (辻オルガン, 作品 44, 1987) .

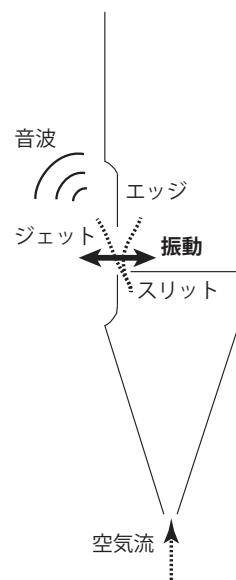


図 1.2: オルガンパイプの発音機構. 左の写真は図 1.1 のパイプオルガンを拡大したもの. 右の模式図はパイプを横から見た縦断面である.

界に存在する種々の振動現象を考える上で、この系だけでは説明力が不十分なのである。そこで考えられるものに自励振動がある。自励振動を示す系は、外部から流入する直流のエネルギーを振動に変える機構を有しており、振動を持続させることができる。次式に示されるファンデルポール振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2)$$

は、自励振動の有名な数理モデルの一つである[3]。自励振動は様々な場面で観察され、ヴァイオリンの擦弦振動やヒトの喉の声帯振動は、直流通的エネルギー供給源である弓や呼気流によって発生する自励振動だと言われている。そして、このような振動の理解は、より複雑な振動現象の解明へつながる。

一般に、自励振動を示す系は、 D 個 ($D \geq 2$) の状態変数 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_D(t)]^T$ を持つとき、次の階連立微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

で表されることが多い。前出のファンデルポール振動子であれば、 $v = dx/dt$ とおくことで $\mathbf{x} = [x \ v]^T$ を定義でき、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \mu(1-x^2)v - \omega^2 x \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

と表すことができる（このとき、 $D = 2$ となる）。ここで、自励振動の定常状態 $\mathbf{x}_c(t)$ における位相 $\theta(t) = \theta(\mathbf{x}_c(t)) \in [0, 2\pi)$ を次式で定義する。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \quad (1.5)$$

この式は、式(1.3)の定常振動解の瞬時角周波数 $d\theta/dt$ が一定値 ω_0 であることを意味する。

さて、この自励振動系に外力 $\mathbf{p}(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_D(t)]^T$ がはたらいている場合

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \quad (1.6)$$

を考える。ただし、この外力は微弱であり、 $\mathbf{x}(t)$ は定常振動状態から大きく逸脱しないと仮定する。すなわち、 $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_c(t)$ とする。このとき、先ほどと同じように位相 $\theta(\mathbf{x}_c(t))$ を導入し、その時間微分を考えると

$$\frac{d\theta}{dt} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c} \cdot \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}_c) + \mathbf{p}(t)] \quad (1.7)$$

と書くことができる。なお、“ \cdot ”は内積（スカラー積）である。ここで、外力が存在しない場合 ($\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$) を考え、さらに式(1.5)と比較すると、最右辺第1項目は

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_c) = \omega_0 \quad (1.8)$$

となることがわかる。つまり、式(1.7)は

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \left. \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c} \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1.9)$$

と表せる。最後に、 $\mathbf{Z}(\theta(\mathbf{x}_c)) = \partial\theta/\partial\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_c}$ を定義すれば

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1.10)$$

と書き直すことができる。式(1.10)は、微弱な外力を受けている系（式(1.6)）に対応した位相に関する方程式であり、位相振動子モデルと呼ばれる[4, 5]。この式は、自励振動の瞬時角周波数 $d\theta/dt$ が外力 $\mathbf{p}(t)$ によって変動することを意味する。なお、 $\mathbf{Z}(\theta)$ は位相感受関数と呼ばれる。

ここで、位相振動子モデルは、もとの支配方程式の数理的構造 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ や変数の個数 D にはならないことに注意されたい。もとの振動系が持つ性質は、位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta)$ に縮約されるのである。

1.3 周波数引き込み現象

位相振動子モデルの利点として、着目する振動系の機構が不明であっても解析可能な現象が存在することが挙げられる。その一つに周波数引き込み現象がある。ここからはその詳細について述べる。

外力 $\mathbf{p}(t)$ に周期性がある場合を想定する（外力の基本角周波数を Ω_0 とする）。さらに、 m と n を互いに素な自然数とし、 $\omega_0 : \Omega_0 \approx m : n$ であるとする。このとき、式(1.10)の解を

$$\theta(t) = \frac{m}{n}\Omega_0 t + \varphi(t) \quad (1.11)$$

と仮定し、この解を式(1.10)に代入すると

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) + \mathbf{Z}\left(\frac{m}{n}\Omega_0 t + \varphi\right) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1.12)$$

となる。今、 $\omega_0 : \Omega_0 \approx m : n$ であることと外力 $\mathbf{p}(t)$ が微弱であることから、上式の右辺全体は小さな値となる。つまり、 $d\varphi/dt$ が小さいと言えるので、 φ は変化の小さい量（遅い変数）となる。これをを利用して、上式右辺に長時間平均を施す。このとき、 φ は一定値とみなせ、右辺から時刻変数 t を消去することができる。そして、上式は

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) + \Gamma_{m,n}(\varphi) \quad (1.13)$$

と書ける。ただし、 $\Gamma_{m,n}(\varphi)$ は

$$\Gamma_{m,n}(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Z}\left(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi\right) \cdot \mathbf{p}(s) ds \quad (1.14)$$

と表される, φ に関する周期関数である [6].

式(1.13)によれば, $\Gamma_{m,n}(\varphi^*) = (m\Omega_0/n - \omega_0)$ を満たす $\varphi(t) = \varphi^* = \text{const.}$ が存在するとき, すなわち外力の基本角周波数 Ω_0 が次の条件

$$\min_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} < \left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) < \max_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} \quad (1.15)$$

を満たす場合に, $d\varphi/dt = 0$ が成り立つ. このとき, $\theta(t)$ の定義式(1.11)より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{m}{n}\Omega_0 \quad (1.16)$$

と書けるので, 自励振動系の瞬時角周波数 $d\theta/dt$ は系が有する自然な角周波数 ω_0 ではなく, 外力の基本角周波数 Ω_0 の m/n 倍となる. つまり, 系が外力に引き込まれることで, 自励振動と外力の周波数比が $d\theta/dt : \Omega_0 = m : n$ となって固定されるのである. これが周波数引き込み現象である [4].

これまで, 位相振動子モデルは主に生物学へ応用されてきた. この応用例には大きくわけて2つある. 一つは概日リズムであり, もう一つは神経の発火現象である. これらはともに周波数引き込み現象を示す. 前者は外界からの周期的な光刺激(太陽光)が概日リズムの周期(周波数の逆数)を引き込み, 後者においては神経細胞同士がその発火周期を互いに引き込み合うのである. これらの現象を解析するために, 実際の生物から位相感受関数 $Z(\theta)$ を測定することが試みられている [7, 8]. ここまで特に触れなかったが, 位相感受関数は「外界から受ける刺激に対してどの程度周波数引き込み現象を生じやすいか」を表す. なぜなら, ある外力 $p(t)$ が与えられたとき, $Z(\theta)$ が既知であれば, 式(1.14)により, $\Gamma_{m,n}(\varphi)$ は完全に決定されるからである. したがって, 実際の生物から位相感受関数を測定することで, 概日リズムや神経細胞といった振動系を特徴付けられるのである.

なお, 以上で述べた応用例には, 振動系の周期が比較的長いという特徴がある. 概日リズムの周期は約24時間(1.2×10^{-5} Hz)であり, 神経発火についても調べられているのはせいぜい約70Hzまでである [9]. これらは音現象(約20~20000Hz)に比べ, 「周期が長く, 周波数は低い」という点で異なる.

1.4 パイプオルガンに関する従来研究

これまでに行われてきたパイプオルガンの研究には, 音源であるジェットが共鳴管に与える影響(共鳴管の励振方法)や発音条件, そして, その際の発音周波数に関するものが多い. また, このとき線形な等価回路による議論がなされてきた. たとえば, ジェットはエネルギー源であるため, 等価回路上では負抵抗を持った(実部が負である)アドミッタンスとみなされ, これが共鳴管やマウス(パイプを正面から見た際に見える隙間)のアドミッタンスとつ

り合うとすれば、共鳴管がジェットの発振周波数を安定化させる（すなわち、放射音の周波数を決定する）ことが導かれる [1, 10]. 流体現象は基本的には非線形であるが、このような等価回路による議論（線形近似）でも、ある程度のことは解明できるのである。そして、近年ではコンピュータの発達により、流体運動の数値解析（数値流体解析）によるジェットの研究が盛んになってきている [11]. しかし、数値流体解析は、その規模の大きさのために長時間の計算は難しいとされる。

以上のように、オルガンパイプの発音機構は非常に複雑であり、解析が難しく、未だ不明なことが多い。しかし、発音の詳細に立ち入らずマクロな視点で見れば、オルガンパイプは直流である空気流を交流である音に変換する自励振動系としてとらえることができる。前述の通り、理論上、自励振動を示す系は周波数引き込み現象を示すが、Rayleighによって、実際のオルガンパイプもこの現象を示すことが発見されている [12]. また、Abel らは、自励発振するオルガンパイプに外から純音（正弦波）を与えることで周波数引き込み現象を引き起こし、その観測に成功している [13, 14]. これらの研究は、流体現象と関係した複雑な音現象を、位相振動子モデルの視点から解釈できる可能性を示唆している。そして、このような見方は、発振に着目した等価回路の議論や全物理情報を解析する数値流体解析とは異なるものである。

1.5 本論文の目的と構成

Abel らの研究により、流体－音響現象に基づくオルガンパイプを自励振動系とみなし、位相振動子モデルを用いて解析できる可能性が示された [13, 14]. しかし、これらは観察研究に過ぎない。また、その後、彼らは自励振動系そのもの（すなわち、式 (1.3)）を推定することに注力している [15, 16] が、周波数引き込み現象という一側面だけから自励振動系そのものを推定するのは、あまりにも段階を飛ばしすぎだと考えられる。さらに、その着目した周波数引き込み現象についても、Abel らは周波数比 $1 : 1$ の場合にしか焦点を当てておらず、一般的な周波数比 $m : n$ には言及していない。これらをまとめると、Abel らが行ってきたオルガンパイプの自励振動系としての研究には、次の問題点が挙げられる。

- 自励振動系そのものを推定する前に、その縮約形である位相振動子モデルを推定すべきである。すなわち、第一に、振動系の特徴量である位相感受関数を推定すべきである。
- 推定にあたっては、周波数比 $1 : 1$ についてだけでなく、一般的な周波数比 $m : n$ についての情報も含める必要性がある。

以上の問題点を踏まえ、本研究では先行研究を発展させる。具体的には、上で示したように位相感受関数の逆推定（測定）を行う。加えて、本論文では約 1640 Hz を基本周波数とす

るオルガンパイプを用いることとし、生物リズムよりも周期が短い振動（速い振動）である音現象への適用を通して、位相振動子モデルの速い振動への適用限界についても議論する。

本論文は次のように構成される。第2章では、オルガンパイプに純音や複合音を外力として与え、周波数引き込み現象が生じるかどうかを観察することによって、オルガンパイプが位相振動子モデルに従うのかを検討した結果を報告する。第3章では、第2章で観察された周波数引き込み現象の結果を位相感受関数という形で構成する。そして、得られた位相感受関数がパイプ上部の共鳴管の影響を受けていることを考察する。続く第4章では、第3章で構成した位相感受関数の正確性検証のために、パルスやホワイトノイズを用いて再推定を行う。その後、これらの推定結果と第3章で得られた結果を比較し、その推定妥当性を考察する。そして、第5章では、得られた位相感受関数の応用例として、2本のオルガンパイプ対の組み合わせ評価について、その理論的枠組みを導入する。加えて、位相感受関数が不明である場合についても評価を行い、これらの評価結果と実際の調律現場でのパイプ対との間に整合性があるのかについても言及する。最後に、第6章で総括を述べる。

第2章 オルガンパイプの周波数引き込み現象の観察

2.1 はじめに

まず、位相感受関数の測定に先立って、オルガンパイプが位相振動子モデルに従うのかを検証した結果を報告する。具体的には、位相振動子モデルから予測される現象が、現実のオルガンパイプにおいても生じるのかを観察した。

Abel らによれば、自励発振するオルガンパイプに外から純音（正弦波）を与えたとき、周波数引き込み現象が生じる [13, 14]。しかしながら、Abel らは「パイプ周波数：外力周波数」が $1 : 1$ の場合しか検証しておらず、一般的な周波数比 $m : n$ には言及できていない。そこで本研究では、オルガンパイプが一般的な周波数比 $m : n$ の引き込み現象を示すかどうかに焦点を当てた。次節で述べるが、位相振動子モデルに正弦波外力がはたらく場合、周波数比 $m : n$ には制限がかかり、任意の周波数比で引き込み現象が起こるという訳ではない。そこに着目し、実際のオルガンパイプにおいても、位相振動子モデルから導かれる制限がかかるかを検証した。

2.2 位相振動子モデルによる予測

第1章では、位相振動子モデルから周波数引き込み現象が生じる条件を求めた。それは次式で示される。

$$\min_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} < \left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) < \max_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} \quad (1.15)$$

ただし、

$$\Gamma_{m,n}(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Z}\left(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi\right) \cdot \mathbf{p}(s) ds \quad (1.14)$$

であり、 $\mathbf{Z}(\theta)$ は位相感受関数、 $\mathbf{p}(t)$ は基本角周波数 Ω_0 の周期外力を表す。すなわち、 $\min_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} \neq \max_{\varphi^*}\{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\}$ のとき、つまり $\Gamma_{m,n}(\varphi) \neq \text{const.}$ である場合に周波数引き込み現象が生じる。

以上を踏まえ、周波数比 $m:n$ に関する条件を求めるために、式(1.14)に示される $\Gamma_{m,n}(\varphi)$ に着目する。位相感受関数 $\mathbf{Z}(\theta)$ と周期外力 $\mathbf{p}(t)$ を複素フーリエ級数で表示すれば

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,n}(\varphi) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}_k e^{ik(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi)} \right] \cdot \left(\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \mathbf{P}_l e^{il\Omega_0 s} \right) ds \\ &= \sum_{\substack{k,l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} (\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{P}_l) e^{ik\varphi} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(km+ln)\frac{\Omega_0}{n}s} ds \right]\end{aligned}\quad (2.1)$$

と書くことができる。ただし、 k は位相感受関数のフーリエ次数、 l は周期外力のフーリエ次数、 $i = \sqrt{-1}$ である。なお、簡単のため、直流成分を含まない周期外力を想定し、 $l \neq 0$ とした。ここで、式(2.1)の積分演算は、被積分項が振動的なるまいをすることを考慮すれば、次の条件

$$km + ln = 0 \Rightarrow |k|m = |l|n \quad (2.2)$$

を満たす項のみが残り、これ以外は 0 となる。 $\Gamma_{m,n}(\varphi) \neq \text{const.}$ であるという条件より、上式を満たす項が残ることで周波数引き込み現象が生じる。さらにこの条件は、 m と n が互いに素であることから、次のように表すことができる。

$$|k| = gn \quad \text{and} \quad |l| = gm \quad (2.3)$$

ただし、 g は $|k|$ と $|l|$ の最大公約数である。したがって、自然数 n は整数 $|k|$ の約数として、自然数 m は整数 $|l|$ の約数として限定される。多くの場合、 $|k|$ や $|l|$ の値は有限であるから、周波数引き込み現象として実現する周波数比 $m:n$ も限られることとなる。たとえば、周期外力が正弦波である場合、外力は $|l|=1$ のみで構成され、このとき、 $m=1$ のみとなる ($g=1$ となる)。つまり、起こり得る周波数引き込み現象は周波数比 $1:n$ であるものに限られる [17, 18]。また、 $|l|=1, 2$ で構成される外力ならば、引き込み現象は周波数比 $1:n$ だけでなく、周波数比 $2:n$ のものも生じ得る。

加えて、式(2.3)を用いれば、式(1.15)は次のように書き換えられる。

$$|k| \min_{\varphi^*} \{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} < (|l|\Omega_0 - |k|\omega_0) < |k| \max_{\varphi^*} \{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} \quad (2.4)$$

この条件は自励振動を示す系と周期外力のそれぞれが持つ周波数成分の近接だとみなせる。つまり、外力に含まれる第 $|l|$ 次フーリエ成分の周波数 ($|l|\Omega_0$) が、自励振動の第 $|k|$ 次フーリエ成分の周波数 ($|k|\omega_0$) に近接することで、周波数引き込み現象が生じると予測される。

2.3 正弦波外力による検証

2.3.1 検証方法

自励発振するオルガンパイプ（須藤オルガン工房提供、図 2.1 参照）に対して、外部から正弦波を当て、周波数比 $m : n$ の引き込み現象が起こるかどうかを観察した。具体的には、パイプの基本周波数の n/m 倍の値を含む周波数範囲について、正弦波外力を 60 秒ごとに 0.2 Hz 刻みで増加させながらパイプに当て、そのときの音響信号を録音した。ここで、「パイプの基本周波数の n/m 倍の値」としたのは、「パイプ周波数 : 外力周波数」が $m : n$ となるようにするためである。本研究では、 $m : n = 1 : 1, 1 : 2, 2 : 1, 1 : 3, 2 : 3, 1 : 4$ の 6 つについて調べた。図 2.2 に実験系を、表 2.1 に実験に用いた機器を示す。また、オルガンパイプに送る空気の圧力（風圧）は約 62 mmH₂O とした。これは実際のオルガン演奏中に使用されているものとほぼ同じ大きさである。図 2.3 に本測定に使用した送風機を示した。なお、収音におけるサンプリング周波数は 44100 Hz、量子化ビット数は 16 bit であり、収音は簡易防音室を行った。また、風圧の計測は、送風機に簡易な U 字管マノメータ（手製）を装着することで行った。

収音した音信号の分析は次のように行った。まず、各 60 秒間の収録信号のうち、後半 40 秒間を抽出し、それらを 10 秒ごとに区切った後、DFT（離散フーリエ変換）でパワースペクトルを 4 つ求めた（このとき周波数分解能は 0.1 Hz となる）。その後、これら 4 つのパワースペクトルを周波数ビンごとに平均することで、正弦波外力の各周波数に対応する測定結果とした。そして、正弦波外力の周波数が時間とともに増加するのに合わせて、これらを時間軸に沿って並べることでスペクトログラムを形成した。なお、DFT 演算の際にはハニング窓を用いた。

また、上に述べた各周波数比条件での収音の後、パイプ音単体（60 秒間）と正弦波外力単体の録音も併せて行った。収録した信号からパイプ音に対する正弦波のパワー比を求めたところ、6 つのすべての周波数比条件において、正弦波は -7.82～-5.61 dB であった（ただし、この録音でのマイク位置は引き込み測定時と同じ位置である）。したがって、測定中、スピーカから出力された正弦波外力の振幅はほぼ一定であったとみなした。

2.3.2 結果

まず、先行研究 [13, 14] で確認されていた周波数比 $m : n = 1 : 1$ の場合について報告する。分析結果を図 2.4 に示す。ここで、直線的に変化するスペクトルが正弦波外力、広い幅を持ち、ほぼ一定の周波数である（図では横ばいの）スペクトルがパイプの基本音である。この結果を見ると、パイプの基本音と外力が近接している周波数帯（約 1640.0～1641.2 Hz）に



全体の長さ	25 cm	
共鳴管	長さ 内径 断面 上端条件	8.8 cm 10 mm 円形 開管
壁面の厚さ	0.5 mm	
マウス	縦幅 横幅	3 mm 8 mm
トーホールの直径	2.5 mm	
材質	錫と鉛の合金	

図 2.1: 実験に使用したオルガンパイプ (左: 写真, 右: 大きさ等) . 写真是 30 cm 定規とともに撮影したものである.

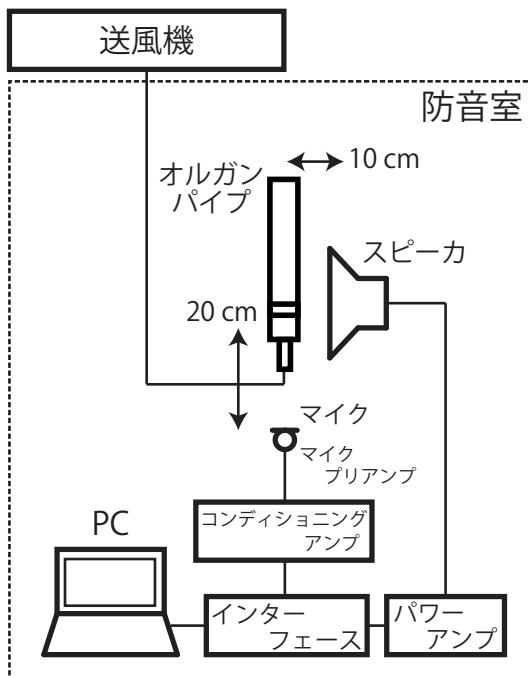


図 2.2: 測定系.

表 2.1: 実験に使用した機器.

スピーカ	SONY, SS-86E
パワーアンプ	SONY, V55ES Digital Cinema Sound Processing-32bit
マイク	B&K, type 4191
マイクプリアンプ	B&K, type 2669
コンディショニングアンプ	B&K, NEXUS Conditioning Amplifier
インターフェース	M-Audio, Fast track ultra

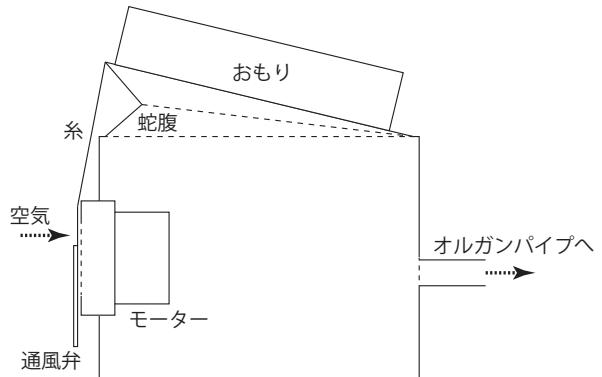


図 2.3: 製作した送風機（左：写真，右：模式図）．この送風機は，箱からパイプへ送り出す風圧を安定にする機構を備えているため，オルガンパイプの発音ピッチを安定させることができる。なお，この機構は実際のパイプオルガンに備わっているものと同じである。

おいて、両者のスペクトルが合体し、单一の周波数成分として観測されていることがわかる。また、この单一の周波数成分はその様相が正弦波に似ている。さらに、この周波数帯でパイプ音が消えていた訳でもなかった。以上のことから、パイプ音は正弦波に引き込まれたと言えるだろう。

次に、 $m : n = 1 : 2$ の周波数引き込みを試みた。これは音響学的にはパイプ音の第2倍音への作用に対応する。この結果を図 2.5 に示す。第2倍音に関して、約 3275.4~3279.2 Hz の範囲において、周波数比 $1 : 1$ の場合と同様の引き込み現象が起こっていることがわかる（図 2.5 上）。また、この範囲において、外力が直接作用していないはずの基本音が、幅を持ったスペクトルから線的なスペクトルへと様相が変化している（図 2.5 下）。このことからも、パイプ音は外力に引き込まれたことがわかる。

続いて、周波数比 $m : n = 2 : 1$ について述べる。結果は図 2.6 である。この周波数比はこれまでとは異なり、正弦波外力がパイプ音の周波数成分に近接しない場合に相当する。このとき、パイプ音のスペクトルには特に変化がみられず、周波数引き込み現象を確認することはできなかった。

その他の周波数比についても検証を行った結果、正弦波外力がパイプの第3倍音に近接する場合である $m : n = 1 : 3$ では周波数引き込み現象が生じ（図 2.7），互いの周波数成分が近接しない $m : n = 2 : 3$ ではこの現象はみられなかつた（図 2.8）。加えて、 $m : n = 1 : 4$ については、これまでと比べて引き込みの程度が弱くなっているが、基本音の性質が変化しており、周波数引き込み現象が生じた傾向が確認できる（図 2.9）。なお、図 2.9 は上図のみカラーバーのスケールを変えて載せていることに注意されたい。

以上の結果から、オルガンパイプに正弦波を与えたとき、生じた周波数引き込み現象は周波数比 $1 : n$ の場合のみであったことを確認した。また、これらはすべて正弦波外力がパイプ音の周波数成分に近接する場合に起こった。最後に、各周波数比において、周波数引き込み現象が生じた周波数幅を表 2.2 としてまとめておく。なお、ここで得られた結果は室温が約 27 °C の環境で観測された。

表 2.2: 各周波数比における周波数引き込み現象の周波数幅

周波数比 ($m : n$)	1 : 1	1 : 2	2 : 1	1 : 3	2 : 3	1 : 4
周波数幅 [Hz]	1.2	3.8	非発生	3.6	非発生	弱発生

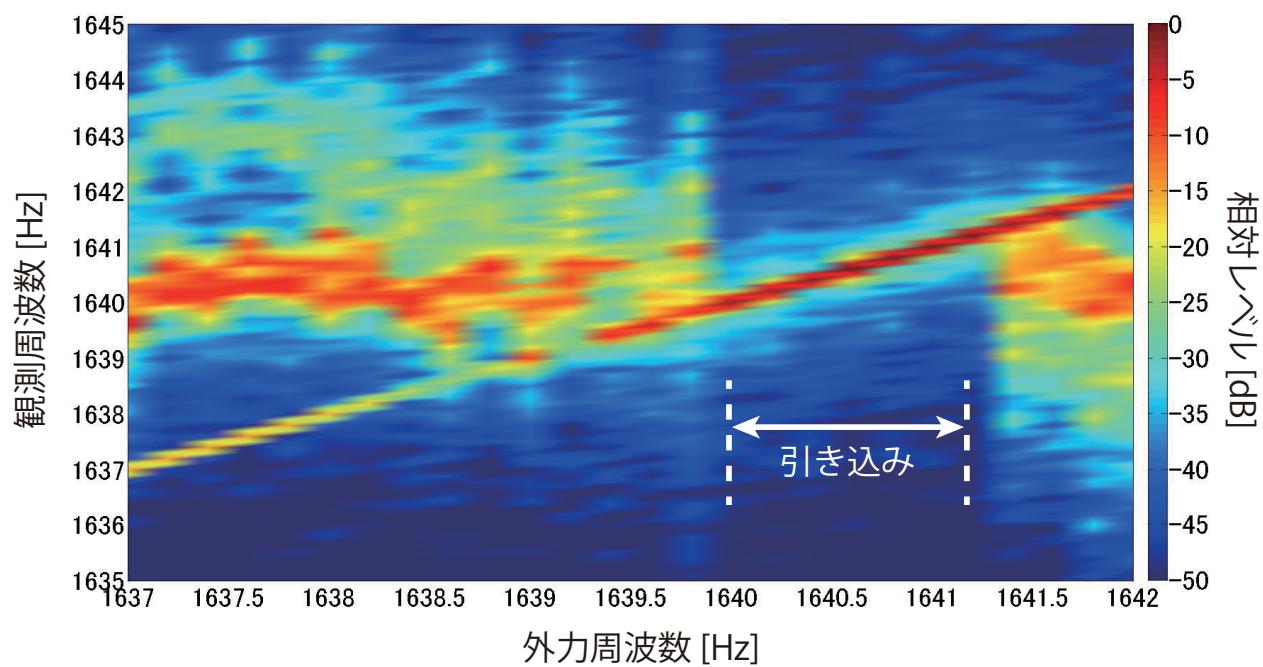


図 2.4: 周波数比 $1:1$ の引き込み現象.

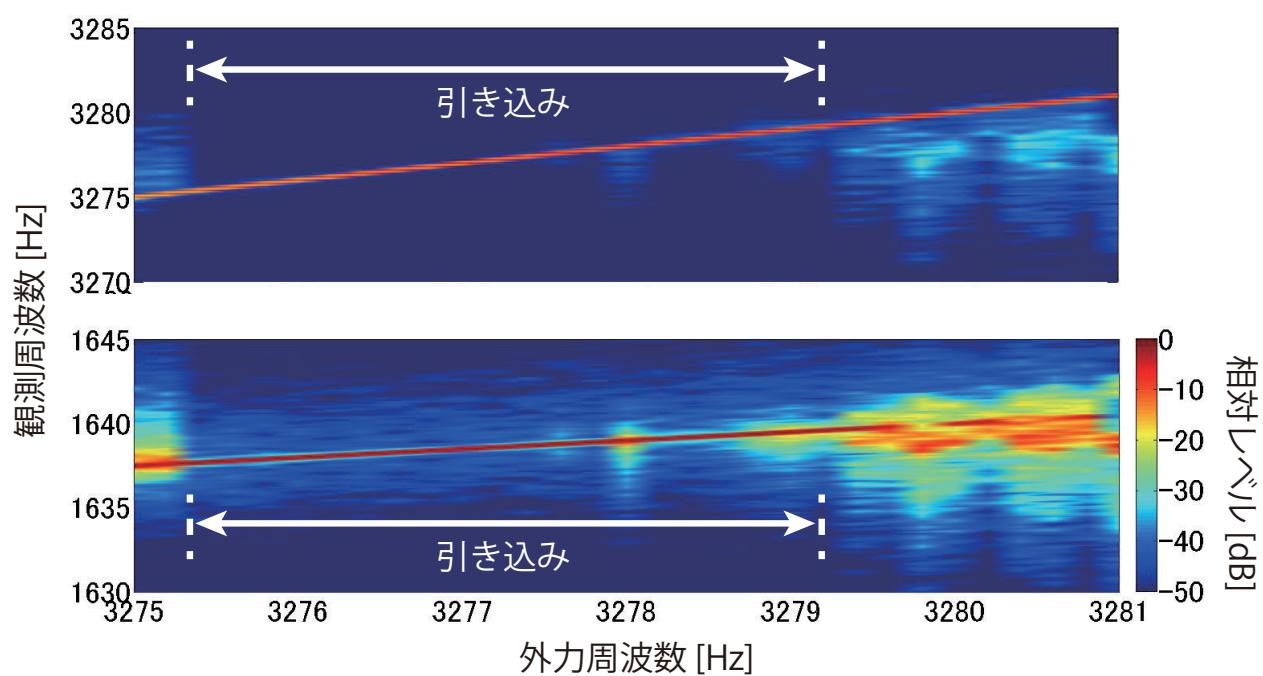


図 2.5: 周波数比 $1:2$ の引き込み現象（上：第 2 倍音と正弦波外力，下：基本音）.

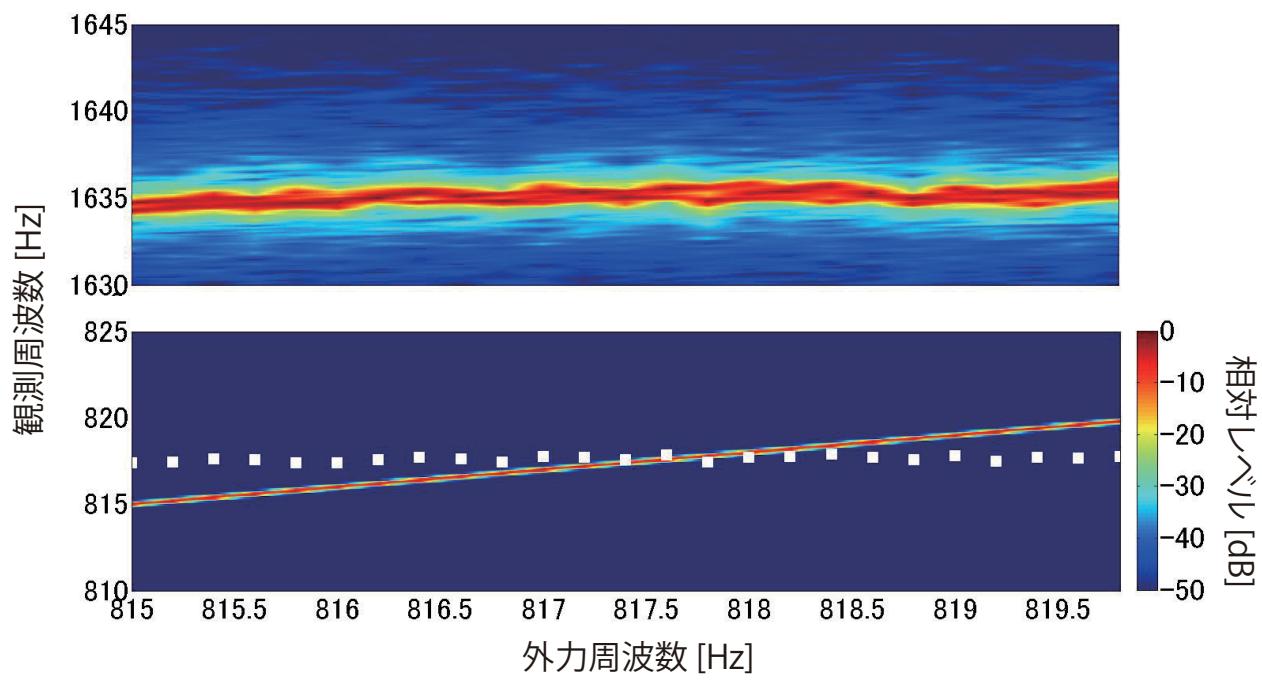


図 2.6: 周波数比 2 : 1 の場合（上：基本音，下：正弦波外力）．下図の白点線はパイプ音の基本周波数の半分の値を表す．

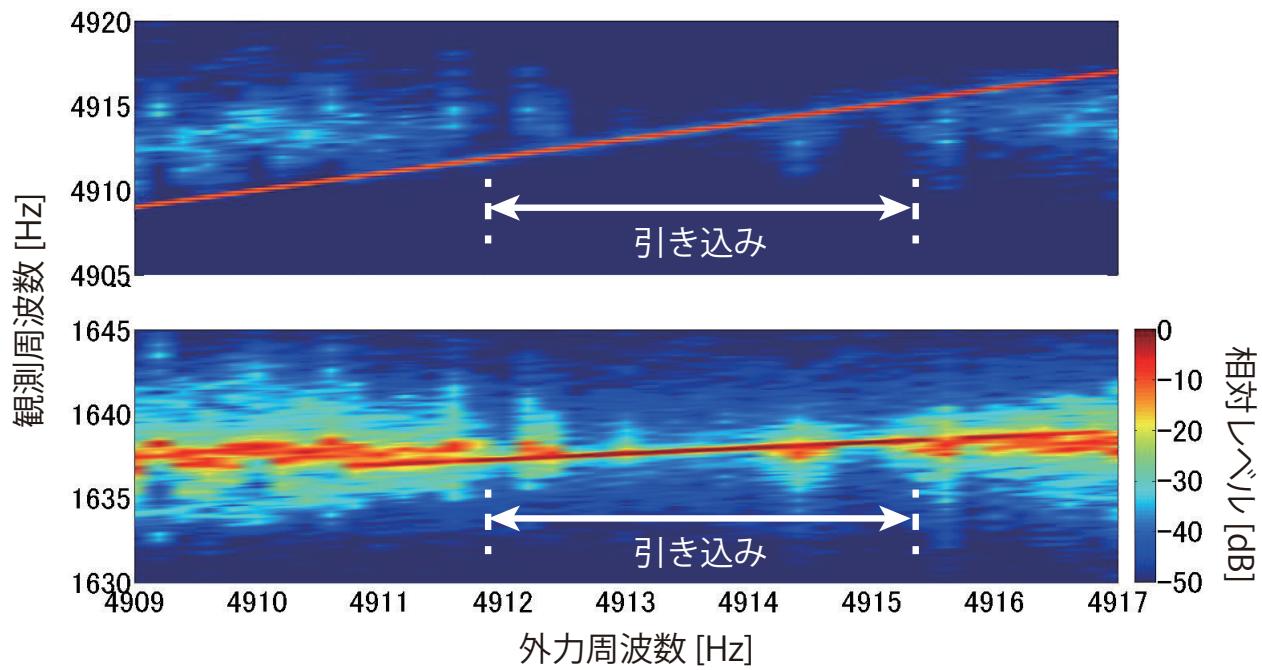


図 2.7: 周波数比 1 : 3 の引き込み現象（上：第 3 倍音と正弦波外力，下：基本音）．

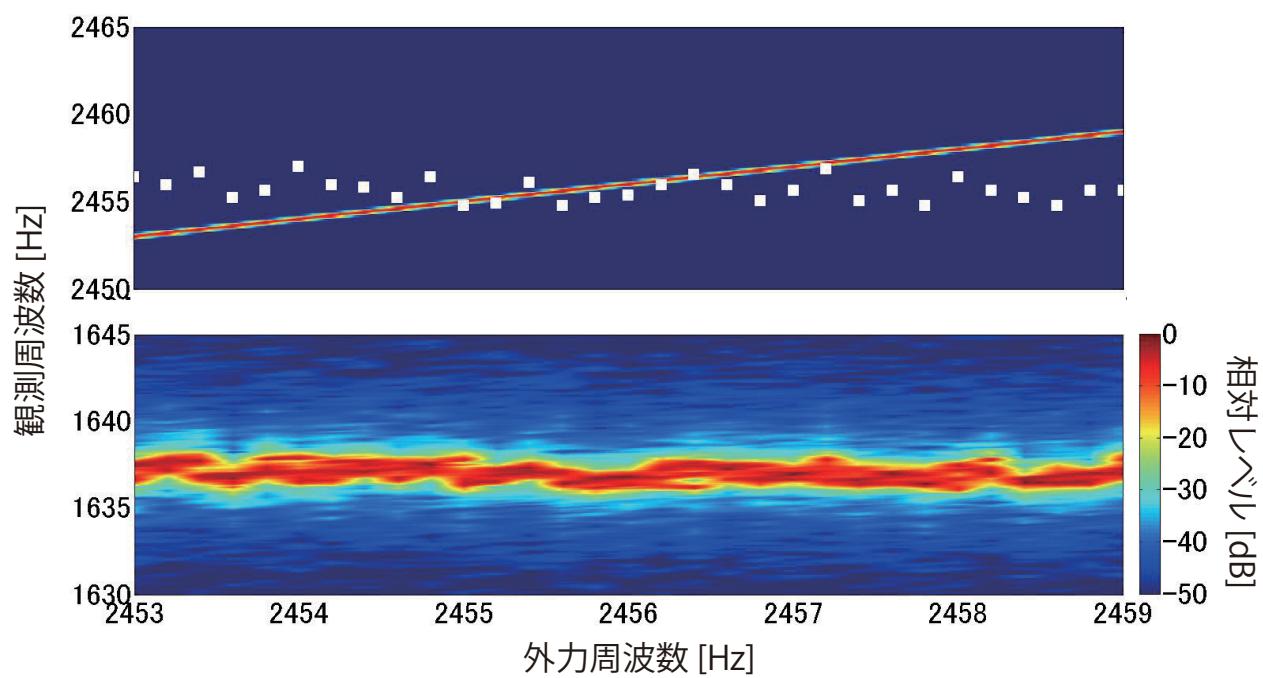


図 2.8: 周波数比 2 : 3 の場合 (上: 正弦波外力, 下: 基本音) . 上図の白点線は外力周波数の $3/2$ 倍の値を表す.

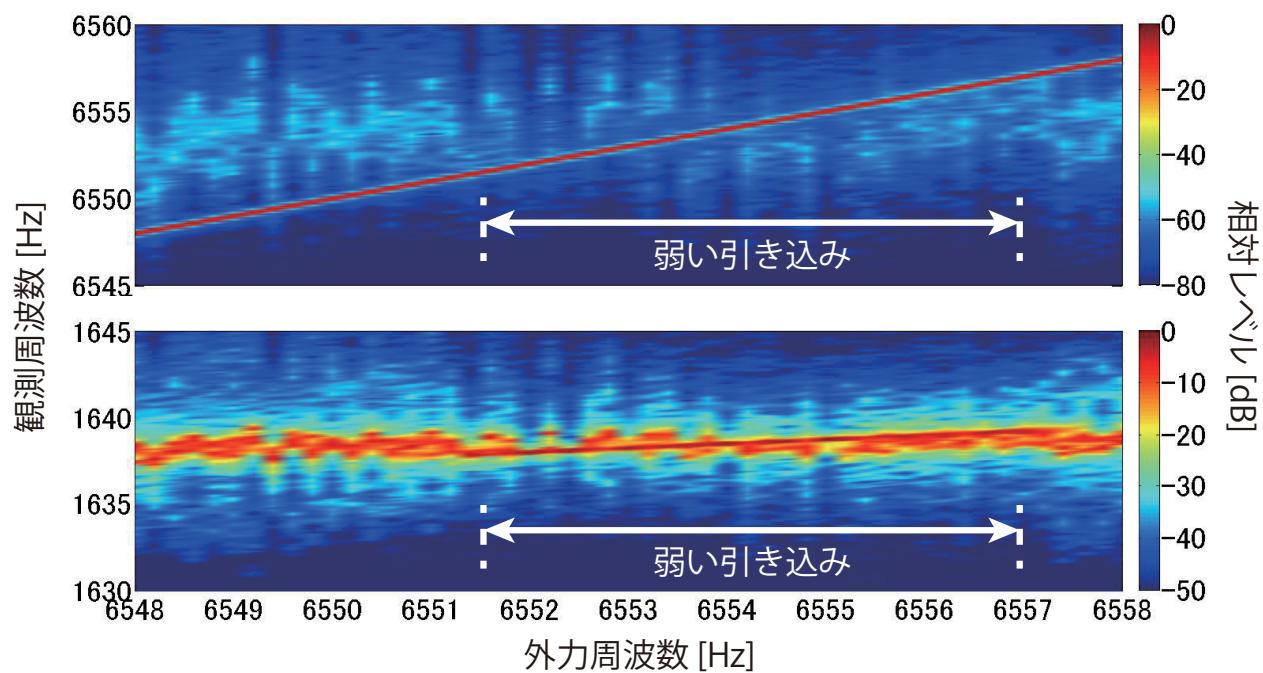


図 2.9: 周波数比 1 : 4 の場合 (上: 第 4 倍音と正弦波外力, 下: 基本音) .

2.4 複合音外力による検証

次に、外力を複数の周波数成分から構成される複合音に変えて観測を行った。なお、今後は周波数比 $m : n = 2 : 1$ の引き込み現象に焦点を当てる。観測手順や実験系は 2.3.1 節と同じである。ただし、外力の基本周波数を 0.1 Hz 刻みで増加させた。このとき、外力の第 2 倍音の周波数に相当する値は 0.2 Hz ずつ増加することとなる。また、複合音外力には 2 種類を用意した。どちらも基本周波数は同じあるが、一つは基本音と第 2 倍音を足し合わせたもの、もう一つは基本音と第 3 倍音を足し合わせたものである。なお、2 種類の複合音外力それぞれが持つ周波数成分のうち、パイプ音の周波数成分と近接するのは第 2 倍音のみである。すなわち、これら 2 つの複合音はその倍音の周波数に関して、「パイプ音の周波数成分と近接する／近接しない」という対照条件となっている。

さて、ここで複合音外力を数式として表しておく。本研究では複合音外力 $p(t)$ を次のように構成した。

$$p(t) \propto \sin(\Omega_0 t) + \left| \frac{P_l}{P_1} \right| \sin(l\Omega_0 t + \angle P_l) \quad (2.5)$$

ただし、 $l = 2$ または 3、 $\angle P_l = 0$ である。また、この複合音を実際にスピーカから出力してみると、 $20 \log_{10} |P_l/P_1| \approx -10$ dB であった。

以下で結果を述べる。まず、基本音と第 2 倍音を足し合わせたものを外力とした場合の結果を示す（図 2.10）。この結果から特筆すべきことは、外力が基本音のみの場合（つまり正弦波）では起こらなかった周波数引き込み現象が、外力に第 2 倍音を加えることで起こったということである。また、この結果は第 2 倍音の初期位相を 90° だけずらした外力を用いても変わらなかった ($\angle P_2 = -\pi/2$)。したがって、周波数引き込み現象の有無は外力の位相スペクトルには影響を受けないということが示唆された。なお、複合音外力はパイプ音に対して、0.011～0.90 dB であった。

続いて、基本音と第 3 倍音で構成した外力を用いた場合について述べる（図 2.11）。こちらの結果では、周波数引き込み現象が起こった様子はみられない。また、こちらの複合音についても、第 3 倍音の初期位相を 90° だけずらしてみたが、得られた結果には特に変化はなかった ($\angle P_3 = -\pi/2$)。ここで、複合音外力はパイプ音に対して、-0.71～-0.045 dB であった。

以上の結果より、オルガンパイプにおける周波数引き込み現象は、パイプ音と外力音の周波数成分の近接によって引き起こされることを実証できた。また、外力が基本波成分と第 2 高調波成分で構成される場合 ($|l|=1, 2$) には、理論通りに周波数比 $2:n$ でも引き込み現象が生じることを確認した。なお、パイプ音の周波数が前節に比べて低いのは、これらの観測がより低い室温 23°C の環境で行われたためである。

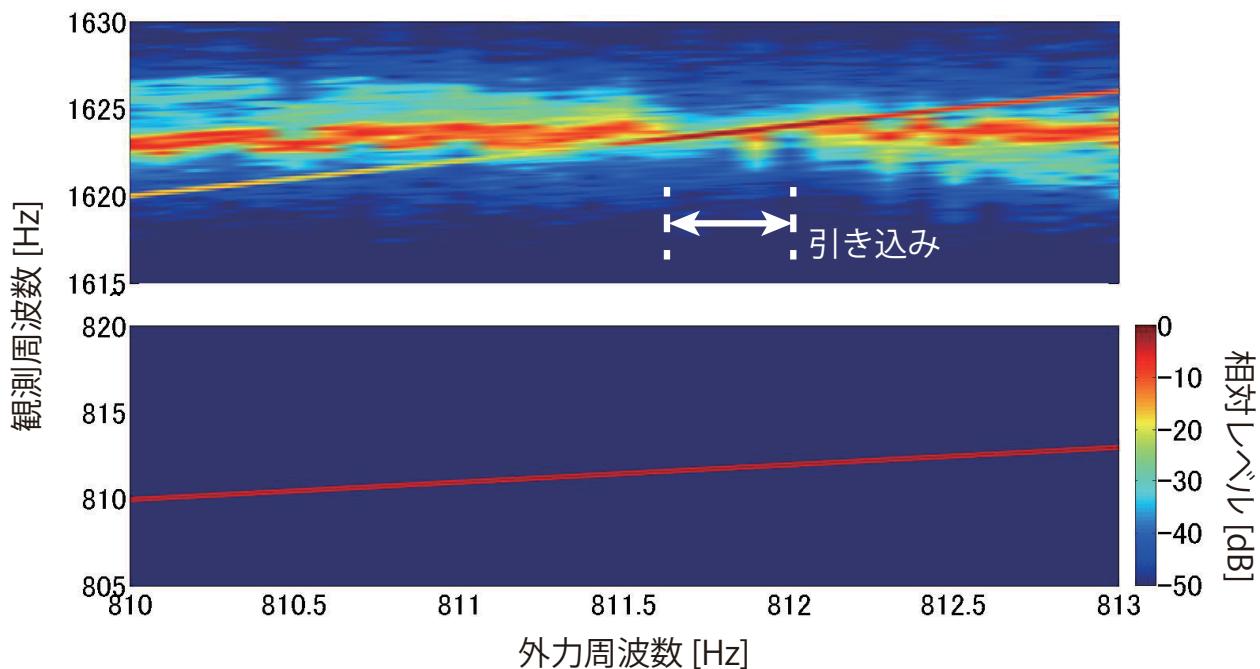


図 2.10: 基本音と第 2 倍音を含む外力を用いた場合（上：パイプ基本音と外力第 2 倍音，下：外力基本音）.

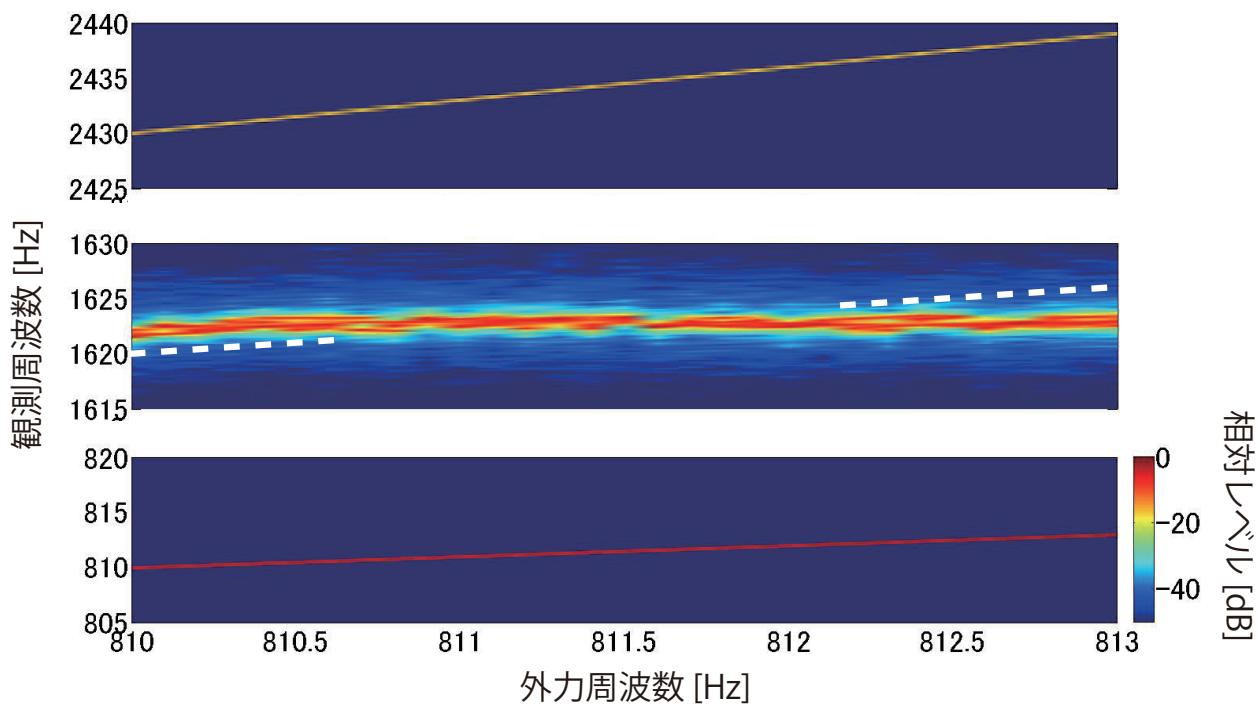


図 2.11: 基本音と第 3 倍音を含む外力を用いた場合（上：外力第 3 倍音，中：パイプ基本音，下：外力基本音）. 図中の白破線は外力基本周波数の 2 倍を示している. なお，白破線については，もとのスペクトログラムを隠さないために，中央部分をわざと載せていない.

2.5 第2章のまとめ

本章では、オルガンパイプが位相振動子モデルに従うかどうかを観察した。手順としては、まず位相振動子モデルを用いて理論的に予測を行った。その後、実際のオルガンパイプに対して、理論と同じ状況にして実験を行った。その結果、外力が正弦波である場合には、理論上は周波数比が $1:n$ の引き込み現象しか起こり得ないが、同じことが現実のパイプでも生じることを確認した。加えて、複合音外力を用いた検証により、周波数引き込み現象が生じる条件は、パイプ音と外力音のそれぞれの周波数成分の近接であることを示せた。もちろん、この条件も位相振動子モデルから導かれることである。したがって、観測結果は位相振動子モデルによる理論的予測の通りであったため、オルガンパイプは位相振動子モデルに従うと言える。

第3章 正弦波による位相感受関数の推定

3.1 はじめに

前章では、現実のオルガンパイプが位相振動子モデルに従うかを調べた。ここでは、本研究の目的である位相感受関数の測定（推定）を行う。位相感受関数とは、位相振動子モデルにおいて最も重要な量であり、「外界から受ける刺激に対してどの程度周波数引き込み現象を生じやすいか」を表すものである。これを測定することができれば、解析が難しいオルガンパイプを定量的に扱うことが可能となる。

以上を踏まえ、本章では、第2章で得られた周波数引き込み現象の測定データを用いて位相感受関数を構成する。以下に述べるが、外力が正弦波のときには、周波数引き込み現象の結果（周波数幅など）から位相感受関数の推定が可能となる。そこで、前章の表2.2の周波数幅などを、位相感受関数という形で表現することを試みる。

3.2 理論

まず、ここからの議論のために、位相振動子モデルと位相感受関数を定義し直す。これまで位相振動子モデルと呼んできたものは

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1.10)$$

であった。今、外力を $\mathbf{p}(t) = [\overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{D \text{ 個}} \underbrace{p(t)}_{d \text{ 番目}} \ 0 \ \dots \ 0]^T$ とすると、上式は次のようになる。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + Z(\theta)p(t) \quad (3.1)$$

ただし、 $\mathbf{Z}(\theta) = [Z_1(\theta) \ Z_2(\theta) \ \dots \ Z_{d-1}(\theta) \ Z(\theta) \ Z_{d+1}(\theta) \ \dots \ Z_D(\theta)]^T$ と表した。この操作は、 D 個の要素で構成される $\mathbf{Z}(\theta)$ の中から、ある次元を持つ外力 $p(t)$ に対する $Z(\theta)$ のみを取り出すことに対応する。本研究であれば、オルガンパイプが音圧や流量、流速などの様々な外力から影響を受けたとしても、音圧からの影響のみに焦点を当て、音圧に対する $Z(\theta)$ だけを取り

出すことを意味する。以降、位相振動子モデルは式(3.1)を、位相感受関数は $\mathbf{Z}(\theta)$ の d 番目の要素である $Z(\theta)$ をさすこととする。なお、このとき $\Gamma_{m,n}(\varphi)$ (式(1.14)) は

$$\Gamma_{m,n}(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z\left(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi\right) p(s) ds \quad (3.2)$$

となる。

さて、周波数引き込み現象が生じるのは、次の微分方程式

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) + \Gamma_{m,n}(\varphi) \quad (1.13)$$

において、 $d\varphi/dt = 0$ のとき、すなわち $\varphi(t) = \varphi^* = \text{const.}$ が存在する場合であった。そして、この条件書き直したのが以下の不等式である。

$$\min_{\varphi^*} \{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} < \left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) < \max_{\varphi^*} \{\Gamma_{m,n}(\varphi^*)\} \quad (1.15)$$

ここで、外力が正弦波である場合

$$p(t) = 2|P_1| \cos(\Omega_0 t + \angle P_1) \quad (3.3)$$

を考える。さらに、位相感受関数を

$$Z(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| e^{i(k\theta + \angle Z_k)} \quad (3.4)$$

のように複素フーリエ展開すれば、 $\Gamma_{m,n}(\varphi)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma_{m,n}(\varphi) &= 2|P_1| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| e^{i[k(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi) + \angle Z_k]} \cos(\Omega_0 s + \angle P_1) ds \\ &= |P_1| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| e^{i(k\varphi + \angle Z_k)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\frac{m}{n}\Omega_0 s} [e^{i(\Omega_0 s + \angle P_1)} + e^{-i(\Omega_0 s + \angle P_1)}] ds \\ &= |P_1| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| e^{i(k\varphi + \angle Z_k + \angle P_1)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(km+n)\frac{\Omega_0}{n}s} ds \\ &\quad + |P_1| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| e^{i(k\varphi + \angle Z_k - \angle P_1)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(km-n)\frac{\Omega_0}{n}s} ds \\ &= |P_1| |Z_n| e^{-i(n\varphi + \angle Z_n - \angle P_1)} + |P_1| |Z_n| e^{i(n\varphi + \angle Z_n - \angle P_1)} \\ &= 2|Z_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle Z_n - \angle P_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

と書ける [19, 20]。なお、式変形中に $m = 1$ となつことには注意されたい。このとき、式(1.13)は

$$\frac{d(n\varphi)}{dt} = -(\Omega_0 - n\omega_0) + 2n|Z_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle Z_n - \angle P_1) \quad (3.6)$$

となる。ここで、自励振動系が発する信号（つまりパイプの音信号）を

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k| e^{j[k\theta(t) + \angle A_k]} \quad (3.7)$$

とフーリエ表示し、さらに

$$\phi(t) = [n\theta(t) + \angle A_n] - (\Omega_0 t + \angle P_1) = n\varphi(t) + \angle A_n - \angle P_1 \quad (3.8)$$

を定義する。これは自励振動系が発する信号の第 n 次高調波成分と正弦波外力の位相干渉を表す。ただし、最右辺への変形には $\theta = \Omega_0 t/n + \varphi$ を用いた。この新たな変数を適用すれば、式 (3.6) は

$$\frac{d\phi}{dt} = -(\Omega_0 - n\omega_0) + 2n|Z_n||P_1| \cos(\phi + \angle Z_n - \angle A_n) \quad (3.9)$$

となり、式 (1.13) と構造が同じ方程式が得られる。そして、

$$\begin{aligned} \min_{\phi^*} \{2n|Z_n||P_1| \cos(\phi^* + \angle Z_n - \angle A_n)\} &< (\Omega_0 - n\omega_0) < \max_{\phi^*} \{2n|Z_n||P_1| \cos(\phi^* + \angle Z_n - \angle A_n)\} \\ \iff n\omega_0 - 2n|Z_n||P_1| &< \Omega_0 < n\omega_0 + 2n|Z_n||P_1| \end{aligned} \quad (3.10)$$

である場合に、周波数引き込み現象が起こると言える。したがって、外力の周波数 Ω_0 を変化させた場合の周波数引き込み現象が生じる周波数幅 Δ_n は、次のように定義できる。

$$\Delta_n = (n\omega_0 + 2n|Z_n||P_1|) - (n\omega_0 - 2n|Z_n||P_1|) = 4n|Z_n||P_1| \quad (3.11)$$

これが表 2.2 と対応する。なお、添え字の n は、周波数引き込み現象の周波数比が $1:n$ であることを表す。

ところで、周波数比 $1:n$ の引き込み現象が生じている際（すなわち、式 (3.9) において $\phi(t) = \phi^* = \text{const.}$ である場合）の、自励振動系が発する信号と正弦波外力の位相干渉中のパワーについて考えてみる。そこで、この 2 つが混ざった信号の長時間二乗平均値 E を考える。

式(3.3)と式(3.7)より

$$\begin{aligned}
E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) + p(t)]^2 dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k| e^{i\{k\theta(t)+\angle A_k\}} + 2|P_1| \cos(\Omega_0 t + \angle P_1) \right]^2 dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k| \exp \left\{ i \left(k \frac{\Omega_0 t + \angle P_1 + \phi^* - \angle A_n}{n} + \angle A_k \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + |P_1| \left\{ e^{i(\Omega_0 t + \angle P_1)} + e^{-i(\Omega_0 t + \angle P_1)} \right\} \right]^2 dt \\
&= 2|A_n||P_1| \left(e^{i\phi^*} + e^{-i\phi^*} \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 + 2|P_1|^2 \\
&= 4|A_n||P_1| \cos \phi^* + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 + 2|P_1|^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

と書ける。なお、式変形の途中において式(3.8)を用いた。ここで、周波数引き込み現象が生じている場合には、式(3.9)より

$$\phi^* = \cos^{-1} \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} - (\angle Z_n - \angle A_n) \tag{3.13}$$

と表せるので

$$\begin{aligned}
\cos \phi^* &= \cos \left[\cos^{-1} \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} - (\angle Z_n - \angle A_n) \right] \\
&= \cos \left[\cos^{-1} \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right] \cos(\angle Z_n - \angle A_n) + \sin \left[\cos^{-1} \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right] \sin(\angle Z_n - \angle A_n) \\
&= \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \cos(\angle Z_n - \angle A_n) + \sqrt{1 - \left[\frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right]^2} \sin(\angle Z_n - \angle A_n)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。これより、上で求めた E は

$$\begin{aligned}
E &= 4|A_n||P_1| \left[\frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \cos(\angle Z_n - \angle A_n) + \sqrt{1 - \left\{ \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right\}^2} \sin(\angle Z_n - \angle A_n) \right] \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 + 2|P_1|^2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

と書ける。すなわち、外力の周波数 Ω_0 を変化させた際、自励振動系の信号と正弦波外力の合成パワー E は式(3.15)にしたがって変動する。この変動を決定するパラメータとして

$$\psi_n = \angle Z_n - \angle A_n \tag{3.16}$$

を定義することができる。なお、式(3.15)の角括弧内の第1項目は直線的変化を、第2項目は非直線的変化を表す。

以上の議論より、周波数引き込み現象が生じる周波数幅 Δ_n とその際のパワー変動のパラメータ ψ_n を得ることができれば、式(3.11)と式(3.16)より、次のように $|Z_k|$ と $\angle Z_k$ を決定することができる。

$$|Z_k| = \frac{\Delta_k}{4k|P_1|} \quad \text{and} \quad \angle Z_k = \angle A_k + \psi_k \quad (3.17)$$

なお、自励振動系と外力源の位置関係によって、これらの信号に位相差（距離差 x に相当）が生じる場合には、

$$\phi(t) = [n\theta(t) + \angle A_n] - \left(\Omega_0 t + \angle P_1 + \frac{\Omega_0}{c}x \right) = n\varphi(t) + \left(\angle A_n - \frac{\Omega_0}{c}x \right) - \angle P_1 \quad (3.8')$$

と定義し直すことで補正ができる (c : 音速)。すなわち、これまでの議論での $\angle A_n$ を $[\angle A_n - (\Omega_0/c)x]$ に置き換えればよい（なお、 x にかかる符号については、外力信号がパイプからの音信号よりも先にマイクに収録される場合を想定している）。このとき、 E は

$$E = 4|A_n||P_1| \left[\frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \cos \left(\angle Z_n - \angle A_n + \frac{\Omega_0}{c}x \right) + \sqrt{1 - \left\{ \frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right\}^2} \sin \left(\angle Z_n - \angle A_n + \frac{\Omega_0}{c}x \right) \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 + 2|P_1|^2 \quad (3.15')$$

となるが、ここで三角関数内の Ω_0 は、周波数引き込み現象が生じる周波数幅 Δ_n が狭い場合には、 $\Omega_0 \approx n\omega_0$ のように自然な周波数で近似しても差し支えない（式(3.10)参照）。したがって、 ψ_n は次のように再定義することができ、

$$\psi_n = \angle Z_n - \angle A_n + n\frac{\omega_0}{c}x \quad (3.16')$$

そして、得られる位相感受関数は

$$Z(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| \exp [i(k\theta + \angle Z_k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Z_k| \exp \left[i \left\{ k \left(\theta - \frac{\omega_0}{c}x \right) + \angle A_k + \psi_k \right\} \right] \quad (3.18)$$

となる。つまり、位相感受関数の横軸への平行移動で補正が可能となる。前章で得られた引き込み幅（表2.2）は、本研究で用いたパイプ音の基本周波数（約1640 Hz）に比べてとても小さい値であるため、本研究では Δ_n はないとみなすこととした。

3.3 推定方法

第2章で得られた表2.2の周波数幅は Δ_n そのものである。したがって、式(3.17)より、位相感受関数のフーリエ振幅 $|Z_k|$ はただちに推定が可能である。ただし、今回の測定では、与

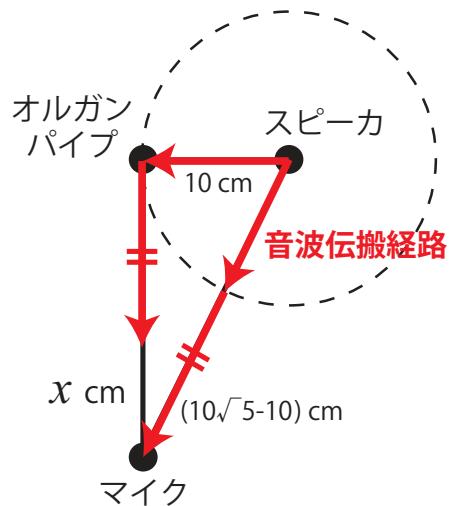


図 3.1: 本測定のセッティングから生じる音波伝搬の距離差. 図 2.2 内のパイプとスピーカ, マイクの位置のみを抽出し, 単純化したものを示す. スピーカから放射された音波はパイプの位置に到達した後, パイプを加振する. その後, 式 (3.9) に従ってパイプ音が放射されるため, スピーカ音はパイプ音よりも先にマイクに到達することとなる.

えた外力の音圧はパイプ音に対する相対値としてしか確認していなかったため, $|P_1|$ の絶対値は不明である. そこで, $|P_1|$ は常に一定であったことを利用し, $|Z_k/Z_1|$ という相対値で求めることとした.

次に, 位相感受関数の偏角 $\angle Z_k$ の推定方法について述べる. まず, マイクにより得られた, パイプ音と正弦波外力の 2 つが混ざった信号の二乗平均値 (パワー) を算出した. このとき, 第 2 章と同じように, 外力の周波数が一定である 60 秒の区間のうち, 後半の 40 秒を使って算出した. そして, 得られたパワーの外力周波数に対する変動の様子から ψ_n を推定した. その後, パイプ音単体の信号に対して三角関数をフィッティングすることで, パイプ音の第 n 次フーリエ偏角 $\angle A_n$ を算出し, 式 (3.17) を用いて $\angle Z_k$ を決定した.

なお, 本測定のセッティングでは, 図 3.1 に示すように, パイプとスピーカの位置関係によって, マイクに収録される信号に位相差 (距離差による音波の到達時間のずれ) が生じることとなる. 推定の最後に, 前節で説明した補正法を用いて, $x = 30 - 10\sqrt{5} \text{ cm}$, $c = 340 \text{ m/s}$ とし, 補正を行った.

3.4 結果と考察

図 3.2 と表 3.1 に推定結果をまとめた。加えて、図 3.3～3.5 に、各周波数比条件における、パイプ音の基本波成分とマイクに収録された信号のパワー変動を示す。なお、前章と比べ、各スペクトログラムの表示する周波数領域を少々変化させていることに注意されたい。ここで、周波数比 1 : 4 の結果は引き込みの程度が小さかったため、他の周波数比と比べて無視できるとして位相感受関数の推定結果からは除外した（図 2.9 参照）。また、図 3.3～3.5 の下側のグラフによれば、周波数引き込み現象が生じているとき、パワーが大きく変動していることがわかる。本研究では、最小二乗法を用いてこのパワー変動データにフィッティングを行い、 ψ_n を推定した。最小二乗法の詳細は付録 A に譲ることとする。

さて、これで位相感受関数の構成に成功した訳であるが、ここで音響学的な視点から、本推定結果の物理的意味合いを考察する。表 3.1 にも示したように、本結果の大きな特徴は、位相感受関数の第 2 次フーリエ振幅 $|Z_2|$ が大きな値を持つことである。つまり、周波数比 1 : 2 における引き込み幅が広く現れたことである。これはパイプ上部に備わる共鳴管の影響によるものだと考えられる。本研究で使用したパイプの共鳴管は両側開管である。この場合、共鳴時の管内（の粒子速度）分布が奇数次共鳴と偶数次共鳴で異なる。特に注目すべきは、管両端における振動状態が逆位相になるか同位相になるかである。すなわち、音波が共鳴管内を一端から他端まで伝搬するとき、位相が「(奇数) $\times\pi$ 」だけ回転するか、「(偶数) $\times\pi$ 」だけ回転するかという違いが生じる。たとえば、パイプ全体に対して平面波で一様に加振したとすれば、音源であるジェットに作用する外力には、外から直接はたらくものと共鳴管内を伝搬してから内側からはたらくものの 2 つが存在することとなる。したがって、ジェットに影響を与えるこれら 2 つの外力の位相関係は、奇数次共鳴では逆相、偶数次共鳴では同相となる（図 3.6 参照）。これにより、ジェットに作用する外力の実質的な大きさに差が生まれ、この効果を外から観察した際には、位相感受関数の差としてとらえられるのである。もちろん、本当にスピーカから平面波が出力されているかは詳細に検証すべき事項であり、場合によっては偶数次の方が感度が小さくなる可能性もある。しかしながら、少なくとも奇数次と偶数次の管内共鳴の違いは起こり得る現象であると結論付けられるだろう。なお、これについて、位相振動子モデルを用いた考察を付録 B に載せているので参考にされたい。

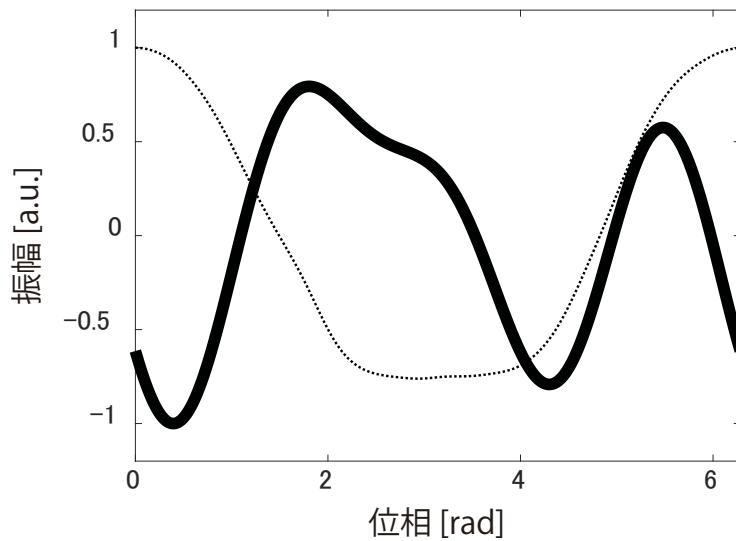


図 3.2: 正弦波外力によって推定された位相感受関数（太線）. 参考のために、点線でパイプ音の波形 1 周期分を併せて載せている. なお、両曲線はそれぞれ絶対値の最大値で基準化している.

表 3.1: 正弦波外力による引き込み結果からの各推定値.

周波数比 $(1 : n)$	1 : 1	1 : 2	1 : 3
周波数幅 Δ_n [Hz]	1.2	3.8	3.6
パラメータ ψ_n [rad]	0.011	0.0016	-0.0032
フーリエ振幅の相対値 $ Z_n/Z_1 $	1	1.6	1
フーリエ係数の偏角 $\angle Z_n$ [rad]	0.0051	0.15	2.9

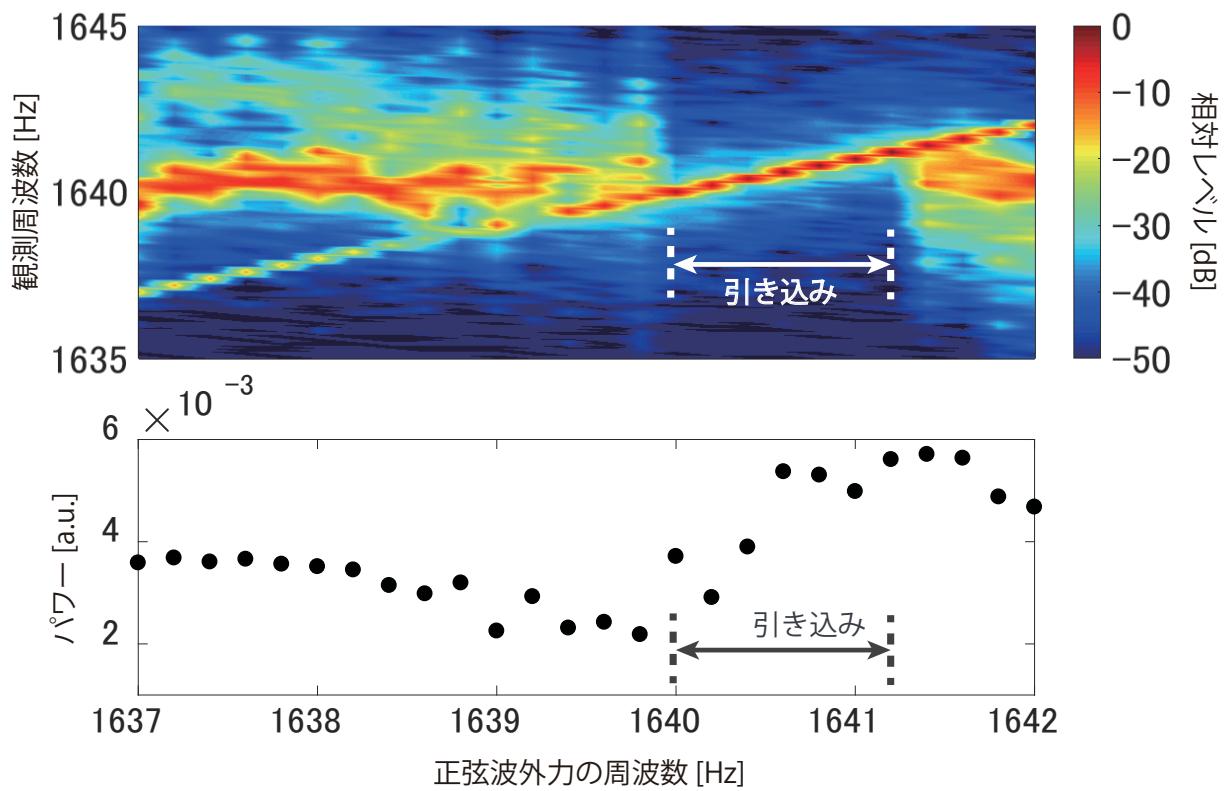


図 3.3: 周波数比 1 : 1 の結果. 上図はパイプ基本音のスペクトログラム, 下図はマイクに収録された信号のパワー変動である.

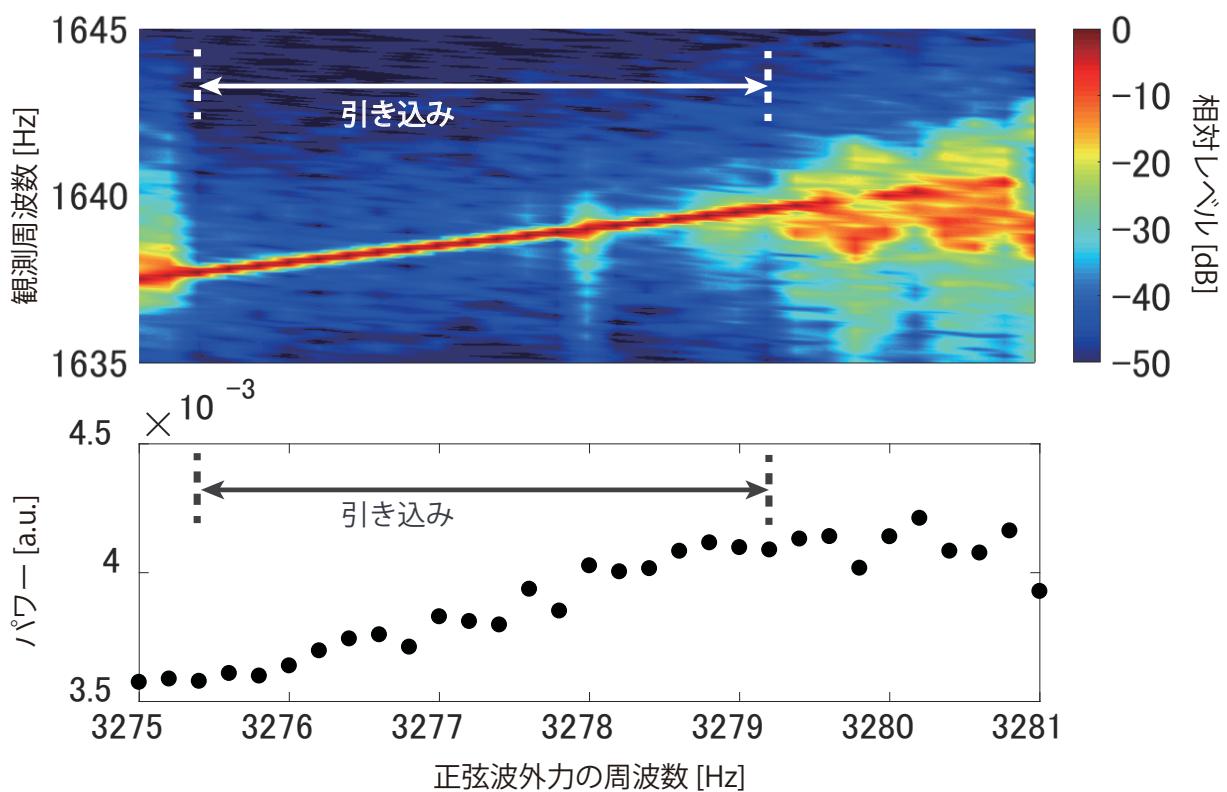


図 3.4: 周波数比 1 : 2 の結果.

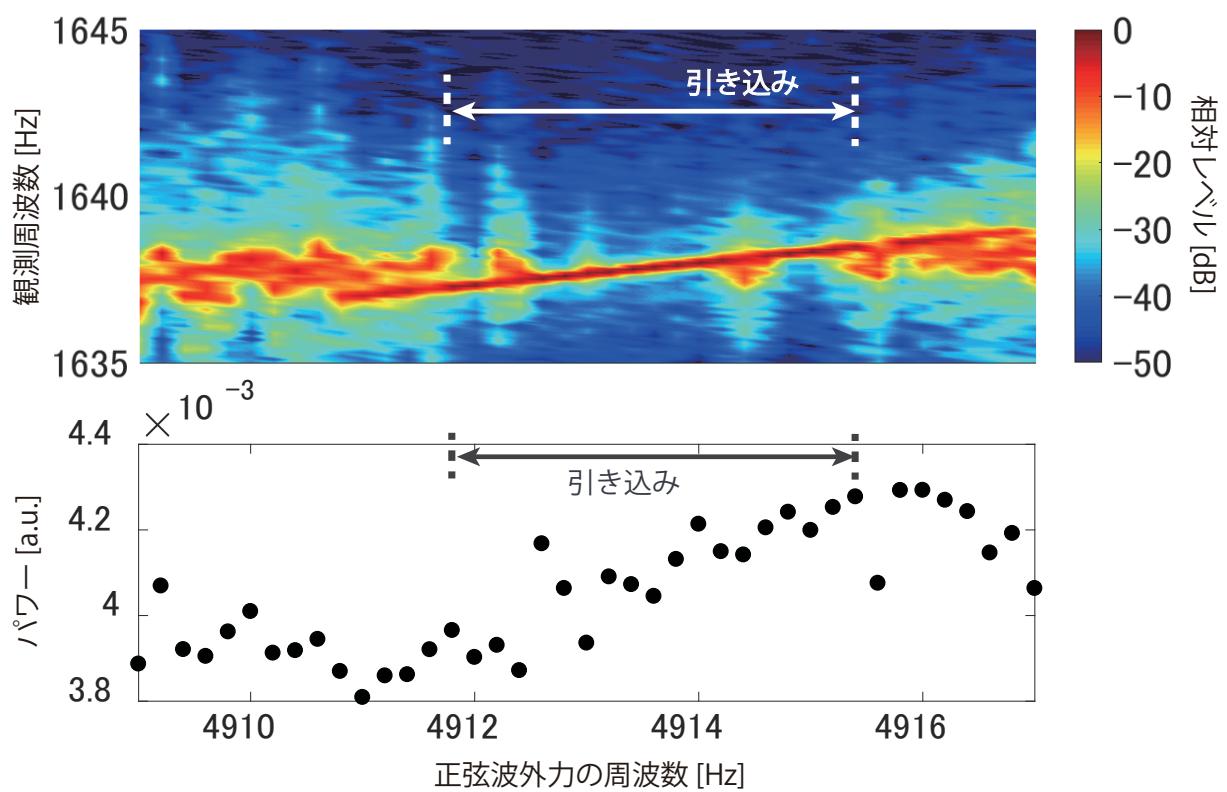


図 3.5: 周波数比 1 : 3 の結果.

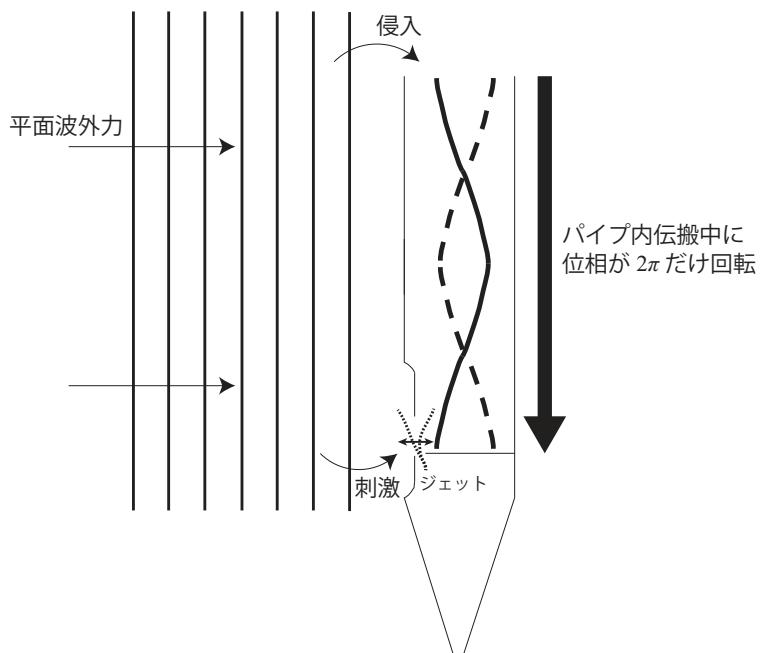
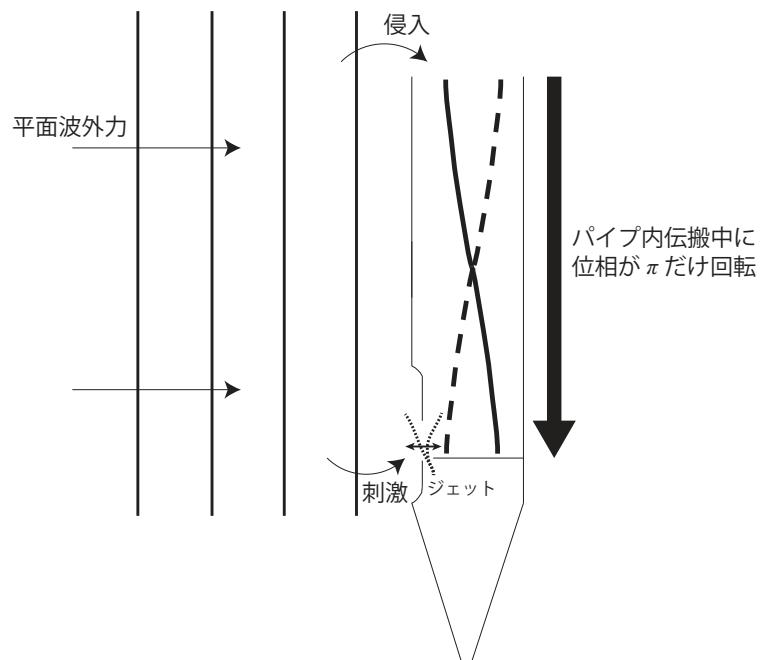


図 3.6: オルガンパイプにおける共鳴管内の振動状態と外力のジェットへと向かう伝搬経路を表した模式図. 上図はパイプ音の基本周波数, すなわち奇数次共鳴を表し, 下図は偶数次共鳴であるパイプ音の第 2 倍音に対応する.

3.5 第3章のまとめ

本章では、第2章で得られた結果から位相感受関数を構成した。具体的には、正弦波外力による引き込み結果から、位相感受関数のフーリエ振幅と偏角の情報を得られるように、位相振動子モデルの理論を整理した。その後、実際に第1～3次のフーリエ係数を用いて位相感受関数を構成した。さらにこのときに、周波数比1:2の引き込み幅が最も広かった理由を、パイプ上部の共鳴管と関連付けて考察した。おそらく、共鳴時における管内の粒子速度分布が奇数次共鳴と偶数次共鳴で異なることが大きな要因だと考えられる。

第4章 他種外力による位相感受関数の推定

4.1 はじめに

前章で得られた位相感受関数（引き込みやすさを表す量）は、オルガンパイプを直接的に引き込ませた結果から推定を行ったものであるため、その信頼性は高いと考えられる。しかしながら、実機からの測定であるがゆえ、本来の関数の形（正解値）はわからない。そこで本章では、正弦波加振によって得られた位相感受関数が妥当なものであるかどうかを検討するため、別種の外力を用いて位相感受関数を計測する。

4.2 パルスを用いた推定法

ここでは、従来の位相感受関数の計測研究によく用いられるパルス加振を試みる。しかしながら、音響学において、理想的なパルスを生成することは現実的には困難である。なぜなら、スピーカでパルスを生成した場合、スピーカの機械的特性の影響により、出力音にオーバーシュートが生じてしまうためである（図 C.2 参照）。そこで、この問題を解決するために最小二乗法を採用し、位相感受関数を求める [21, 22]。

4.2.1 理論

位相振動子モデル

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + Z(\theta)p(t) \quad (3.1)$$

は、 $p(t) = 0$ ならば

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad (4.1)$$

という解を持つ。しかし、本来は $p(t) \neq 0$ である。ここで、外力 $p(t)$ が微弱であることに着目して、式 (3.1) の解を

$$\theta(t) = (\omega_0 t + \theta_0) + \theta_{(1)}(t) \quad (4.2)$$

とおく。ただし、外力が小さいために偏差 $\theta_{(1)}$ も小さいと仮定する。これを式(3.1)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\omega_0 t + \theta_0 + \theta_{(1)}) &= \omega_0 + Z(\omega_0 t + \theta_0 + \theta_{(1)})p(t) \\ \iff \frac{d\theta_{(1)}}{dt} &= \left[Z(\omega_0 t + \theta_0) + \theta_{(1)} \left. \frac{dZ}{d\theta} \right|_{\theta=\omega_0 t + \theta_0} + \dots \right] p(t) \\ \iff \frac{d\theta_{(1)}}{dt} &= Z(\omega_0 t + \theta_0)p(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。ただし、その小ささのために $\theta_{(1)}p(t)$ より高次の項を無視した。

さて、式(4.2)の $\theta(t)$ が 2π だけ増加する時間を、外力がはたらいている場合の振動周期 τ とし、

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} + \tau_{(1)} = T_0 + \tau_{(1)} \quad (4.4)$$

と定義する。ただし、外力が小さいために周期の偏差 $\tau_{(1)}$ も小さいと考える。これを式(4.2)に代入して、 $\tau_{(1)}[d\theta_{(1)}/dt]$ より高次の項を無視すれば

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= (\omega_0 \tau + \theta_0) + \theta_{(1)}(\tau) \\ \iff \theta(0) + 2\pi &= \omega_0[T_0 + \tau_{(1)}] + \theta_0 + \theta_{(1)}(T_0 + \tau_{(1)}) \\ \iff 2\pi + \theta_0 + \theta_{(1)}(0) &= 2\pi + \theta_0 + \omega_0 \tau_{(1)} + \theta_{(1)}(T_0) \\ \iff \tau_{(1)} &= -\frac{1}{\omega_0}[\theta_{(1)}(T_0) - \theta_{(1)}(0)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。すなわち、式(4.3)を用いれば

$$\tau_{(1)} = -\frac{1}{\omega_0}[\theta_{(1)}(T_0) - \theta_{(1)}(0)] = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{T_0} \frac{d\theta_{(1)}}{ds} ds = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{T_0} Z(\omega_0 s + \theta_0)p(s)ds \quad (4.6)$$

と書ける[9]。

したがって、 $\tau = T_0 + \tau_{(1)}$ より

$$\int_0^{T_0} Z(\omega_0 s + \theta_0)p(s)ds = 2\pi \frac{T_0 - \tau}{T_0} \quad (4.7)$$

が導かれる。外力が理想的なパルス、すなわち $p(t) = P\delta(t - t_0)$ であれば、

$$Z(\omega_0 t_0 + \theta_0) = \frac{2\pi}{P} \frac{T_0 - \tau}{T_0} \quad (4.8)$$

となり、パルス加振の時刻 t_0 とその際の変動周期 τ を得ることで位相感受関数を決定することができる。

しかしながら、理想的なパルスでない場合 ($p(t) = q(t - t_l)$ とする) には、このように理論解を導くことができない。そこで、位相感受関数を

$$Z(\omega_0 t + \theta_0) = \frac{X_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [X_k \cos(k\omega_0 t) + Y_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (4.9)$$

のようにフーリエ展開することを考える。このとき、式(4.7)は

$$\frac{X_0 P_{l,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k P_{l,k} + Y_k Q_{l,k}) = 2\pi \frac{T_0 - \tau}{T_0} \quad (4.10)$$

と書ける。ただし、

$$P_{l,k} = \int_0^{T_0} q(s - t_l) \cos(k\omega_0 s) ds \quad \text{and} \quad Q_{l,k} = \int_0^{T_0} q(s - t_l) \sin(k\omega_0 s) ds \quad (4.11)$$

とした。そして、様々な t_l ($l = 1, 2, \dots, L$) に対して得られる変動周期を τ_l と表し、式(4.10)を連立させれば、次式を得ることができる。

$$M\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad (4.12)$$

ここで、

$$M = \begin{bmatrix} P_{1,0}/2 & P_{1,1} & Q_{1,1} & P_{1,2} & Q_{1,2} & \cdots \\ P_{2,0}/2 & P_{2,1} & Q_{2,1} & P_{2,2} & Q_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{L,0}/2 & P_{L,1} & Q_{L,1} & P_{L,2} & Q_{L,2} & \cdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2\pi(T_0 - \tau_1)/T_0 \\ 2\pi(T_0 - \tau_2)/T_0 \\ \vdots \\ 2\pi(T_0 - \tau_L)/T_0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

である。上式より、フーリエ次数 k を途中で切り捨てる（最大次数を K とする）ことで、位相感受関数の推定が可能となる。

4.2.2 推定方法

自励発振するパイプに対して、スピーカによりパルス加振を行い、その際の信号を収録した。図 4.1 に測定系を示す。ここで、パイプとスピーカ、マイクを一直線上に並べたのは、パイプとスピーカのそれぞれからマイクに収録される音響信号の時間差（位相差）をなくすためである。なお、測定に用いた機器は第 2 章と基本的に同じだが、スピーカのみ YAMAHA, NS-BP182 に変更している。また、パイプの駆動風圧は約 60 mmH₂O であり、このときパイプ音の基本周波数は約 1635 Hz であった（すなわち周期は $T_0 \approx 6.12 \times 10^{-4}$ s であった）。この収録の後、スピーカからのパルスのみの収音を行った。これは行列 M の構成に用いる。

ここで、マイクに収録された信号にはパイプ音とパルス音の2つが混ざっているため、この信号に対して、200次のFIR (Finite Impulse Response) フィルタをかけることでパルス音を除去した。その際、このフィルタの通過帯域を10~3000 Hzとし、パイプ音の基本波成分の抽出も同時に行つた。さらに、基本波成分の抽出後、周期変動の検出力を上げるためにsinc関数による補間を行い、サンプリング周波数を50倍に引き上げた[23]。

周期変動の検知にはヒルベルト変換を用いた[24, 25]。ヒルベルト変換により、パイプ音の基本波成分を偏角の信号へと変換し、さらにこれをアンラップせずに 2π の区間に閉じ込める。このとき、不連続点が生じるが、この不連続点を検出することで隣り合う不連続点の間隔から変動周期 τ_l を求めた。なお、本研究では(ア) 0~ 2π , (イ) $\pi/2$ ~ $5\pi/2$, (ウ) π ~ 3π , (エ) $3\pi/2$ ~ $7\pi/2$ の4条件について検討を行つた。

さて、本章冒頭でも述べたように、スピーカによるオーバーシュートを克服するため、本推定では最小二乗法を採用した。本実測では $L = 52$, $K = 12$ とした。このとき、式(4.12)は優決定系となり、ムーア・ペンローズの疑似逆行列を用いれば、最小二乗解を求めることができる[21, 26]。

最後に、行列 M を構成する $P_{l,k}$, $Q_{l,k}$ の算出法について述べる。 $P_{l,k}$, $Q_{l,k}$ はその定義である式(4.11)から、フーリエ係数（正確にはその $2/T_0$ 倍）を意味していることがわかる。これを利用し、収録したパルスに対して三角関数をフィッティングすることで、その重み係数として $P_{l,k}$ と $Q_{l,k}$ を求めた。

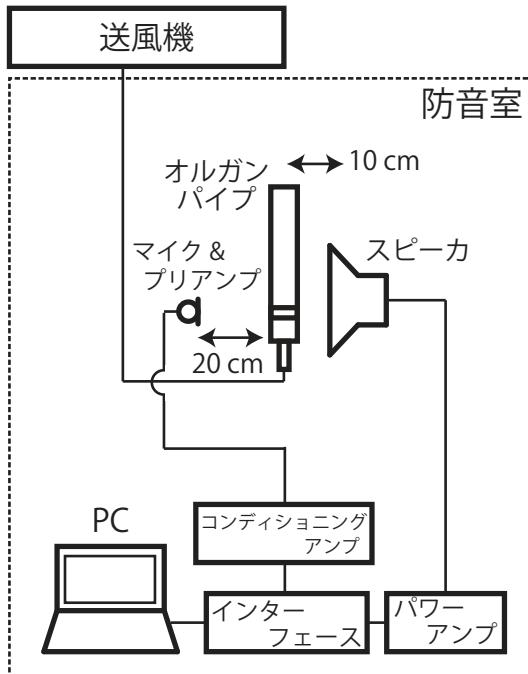


図 4.1: パルス加振の測定系。

4.2.3 結果と考察

推定結果を図 4.2 に示す。なお、図中の左図は推定されたフーリエ振幅を、右図は得られたフーリエ係数から構成した位相感受関数（太線）を表す。ここで、フーリエ振幅は $|X_0|/2$ または $\sqrt{X_k^2 + Y_k^2}$ として算出した。なお、前章の正弦波外力による推定結果に倣い、位相感受関数の構成に用いた次数は第 1 ~ 3 次とした。

図 4.2 で最も着目すべき点は、正弦波外力による推定結果と同様に、推定されたフーリエ振幅が第 2 次成分において大きな値を取っていることである。もちろん、条件（ウ）はそのような結果ではないが、他の 3 条件においてははっきりと第 2 次成分が最大値を取っているため、「第 2 次フーリエ振幅が大きい」という傾向があることは認めてよいとみなした。この第 2 次フーリエ振幅が大きい原因として、外力パルスにオーバーシュートがあると言えども、パルスとしての性質を保持しているため、そのパワーが広い周波数帯域に分布していることが考えられる。この広く分布している周波数成分から、パイプの第 2 共鳴によって対応する成分が選択され、ジェットを効率よく刺激したことで感度が高まったと推測される。

一方で、合成された位相感受関数そのものは結果に特に共通性がなく、推定に成功したとは言い難い。これはやはりパルスが理想的なものでないことが原因だと考えられる。スピーカによるオーバーシュートがパルスの時間分解能を下げ、推定結果の悪化につながったのだと推測される（理想的なパルスであれば式 (4.8) のように直接的に求められる）。パルスのオーバーシュートの影響を考察するために、ファンデルポール振動子を用いて数値シミュレーションを行った。この結果は付録 C にまとめているので参照されたい。

なお、本測定ではパルス音の振幅はパイプ音の振幅を超えないように設定した。

4.3 ホワイトノイズを用いた推定法

前節のパルス外力による推定では、外力の微弱性保証のために、パルス音の振幅がパイプ音の振幅を超えないように設定したが、これがパイプを加振するのに十分な大きさであったかは判断できない。もともとパイプ音が揺らいでおり、そのために周期変動が起こった可能性も捨てきれない。しかし、パルスを大きくすればそこに付随するオーバーシュートも大きくなるため、パルスをさらに大きくすることは現実的でない。そこで次に、ホワイトノイズを用いて位相感受関数を推定する。ホワイトノイズはパルスと同様に、広い周波数領域にわたってパワーを有しているが、ある時刻にパワーが局在するパルスと異なり、ノイズは時間軸上にも広く分布する。そのため、パワーを大きくすることが比較的簡単であり、より強いノイズ外力をパイプに与えることができる。以上を踏まえ、外力の大きさを議論するためにノイズを用いた推定を試みる。

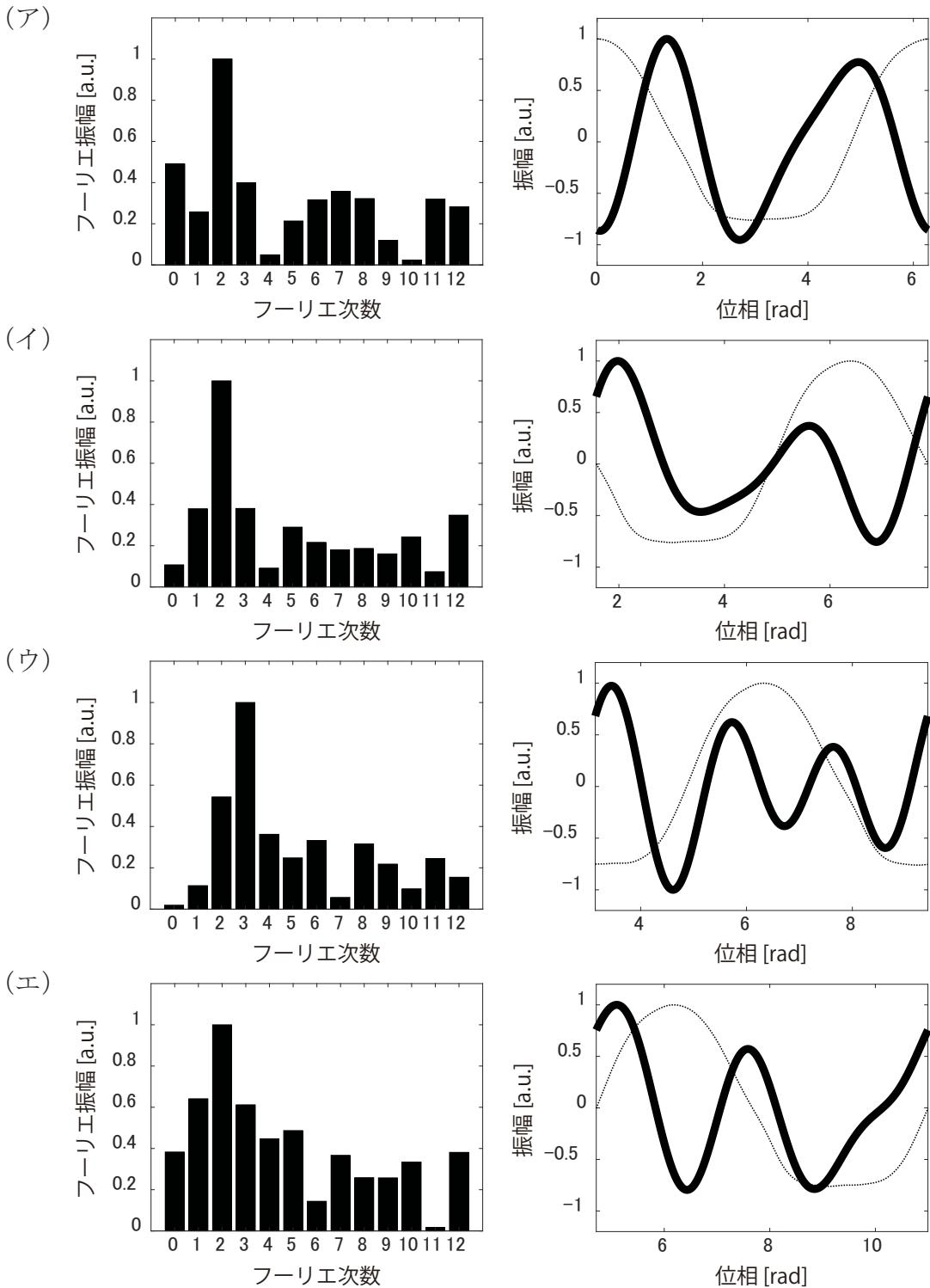


図 4.2: パルス加振によって推定されたオルガンパイプの位相感受関数. 左図は推定されたフーリエ振幅, 右図は第 1 ~ 3 次のフーリエ係数を用いて構成した位相感受関数（太線）である. (ア) ~ (エ) は閉じ込める 2π の区間に関する条件を表している. なお, 右図には参考のために点線でパイプ音の波形を示している. また, 各図はそれぞれ絶対値の最大値で基準化している.

4.3.1 理論

位相振動子モデルに、ホワイトノイズ $\xi(t)$ が外力してはたらいている場合、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + Z(\theta)\xi(t) \quad (4.14)$$

のように記述できる。なお、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ である。

次に、WSTA (Weighted Spike-Triggered Average) という量を次式で定義する [27]。

$$\text{WSTA}(\tilde{t}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{t} \right), \quad \tilde{t} \in [0, T_0] \quad (4.15)$$

ただし、 τ_l はノイズを与え始めてから数えたときの振動子の l サイクル目の周期であり、 $\xi_l(t)$ は l サイクル目の振動をしている間に振動子にはたらくノイズ外力を、時刻 $t_{l-1} = \sum_{l'=1}^{l-1} \tau_{l'}$ を 0 として取り直したもの、すなわち $\xi_l(t) = \xi(t_{l-1} + t)$ である。

さて、式 (4.14) の両辺について、時刻 $[t_{l-1}, t_{l-1} + \tau_l]$ の範囲で時間平均を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_l} \int_{\theta(t_{l-1})}^{\theta(t_{l-1} + \tau_l)} d\theta = \omega_0 + \frac{1}{\tau_l} \int_{t_{l-1}}^{t_{l-1} + \tau_l} Z(\theta(t)) \xi(t) dt \\ \iff & \frac{1}{\tau_l} [\theta(t_{l-1} + \tau_l) - \theta(t_{l-1})] = \omega_0 + \frac{1}{\tau_l} \int_0^{\tau_l} Z(\theta(t_{l-1} + s)) \xi_l(s) ds \\ \iff & \frac{2\pi}{\tau_l} = \frac{2\pi}{T_0} + \frac{1}{\tau_l} \int_0^{\tau_l} Z(2(l-1)\pi + \theta(s)) \xi_l(s) ds \\ \iff & \frac{T_0}{\tau_l} = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_l} Z(\theta(s)) \xi_l(s) \frac{T_0}{\tau_l} ds \\ \iff & \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_0} Z(\tilde{\theta}(\tilde{s})) \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{s} \right) d\tilde{s} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。なお、 $\tilde{\theta}(\tilde{s}) = \theta(\tau_l \tilde{s}/T_0)$ とおき直した。したがって、式 (4.16) を用いると WSTA は

$$\begin{aligned} \text{WSTA}(\tilde{t}) &= \frac{1}{2\pi L} \sum_{l=1}^L \left[\int_0^{T_0} Z(\tilde{\theta}(\tilde{s})) \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{s} \right) d\tilde{s} \right] \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_0} Z(\tilde{\theta}(\tilde{s})) \left[\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{s} \right) \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{t} \right) \right] d\tilde{s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_0} Z(\tilde{\theta}(\tilde{s})) [N\delta(\tilde{s} - \tilde{t})] d\tilde{s} \\ &= \frac{N}{2\pi} Z(\tilde{\theta}(\tilde{t})) \end{aligned} \quad (4.17)$$

と変形される。ただし、 N はホワイトノイズのパワーであり、第 2 式目から第 3 式目への変形にはノイズの白色性を用いた。最後に、ノイズ外力が弱い（パワー N が小さい）ことを考慮すれば、時刻に対して線形増加する解 $\tilde{\theta}(\tilde{t}) = (\omega_0 \tilde{t} + \theta_0) + \tilde{\theta}_{(1)}(\tilde{t})$ を仮定でき、さらに $N\tilde{\theta}_{(1)}$ よ

り高次の項はその小ささのために無視できるので、上式は

$$\begin{aligned}
\text{WSTA}(\tilde{t}) &= \frac{N}{2\pi} Z(\omega_0 \tilde{t} + \theta_0 + \tilde{\theta}_{(1)}) \\
&= \frac{N}{2\pi} \left[Z(\omega_0 \tilde{t} + \theta_0) + \tilde{\theta}_{(1)} \left. \frac{dZ}{d\theta} \right|_{\tilde{\theta}=\omega_0 \tilde{t} + \theta_0} + \dots \right] \\
&= \frac{N}{2\pi} Z(\omega_0 \tilde{t} + \theta_0)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。すなわち、

$$Z(\omega_0 \tilde{t} + \theta_0) = \frac{2\pi}{N} \text{WSTA}(\tilde{t}) \tag{4.19}$$

であり、外力波形の重み付け平均である WSTA が算出できれば位相感受関数が推定できる。

さて、WSTA を計算する際には、外力ノイズ波形の時間伸縮を行う必要がある（式 (4.15) 参照）。しかし、実際に収録する波形のデータは離散値であり、任意の比率で時間伸縮を行うことができない。そこで、この計算を周波数領域で行うことを考える。ここからはそのための定式化を述べる。

まずは、以下のように、式 (4.15)において外力ノイズ波形 $\xi_l(t)$ を複素フーリエ級数で記述する。

$$\text{WSTA}(\tilde{t}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{s} \right) e^{-i\kappa \frac{2\pi}{T_0} \tilde{s}} d\tilde{s} \right] e^{i\kappa \frac{2\pi}{T_0} \tilde{t}} \tag{4.20}$$

そして、時刻の離散化を行う。なお、時間伸縮前を $t \approx n(\Delta t)$ とし、時間伸縮後を $\tilde{t} \approx \tilde{n}(\Delta \tilde{t}_l)$ と記述することとする。このとき、 $N_l = \tau_l / (\Delta t) = T_0 / (\Delta \tilde{t}_l)$ と書けるので

$$\begin{aligned}
\text{WSTA}[\tilde{n}] &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \sum_{\kappa=0}^{N_l-1} \left[\frac{1}{T_0} \sum_{\tilde{m}=0}^{N_l-1} \xi_l \left(\frac{\tau_l}{T_0} \tilde{m} \Delta \tilde{t}_l \right) e^{-i\kappa \frac{2\pi}{T_0} \tilde{m} \Delta \tilde{t}_l} \Delta \tilde{t}_l \right] e^{i\kappa \frac{2\pi}{T_0} \tilde{n} \Delta \tilde{t}_l} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \frac{1}{N_l} \sum_{\kappa=0}^{N_l-1} \left[\sum_{\tilde{m}=0}^{N_l-1} \xi_l(\tilde{m} \Delta t) e^{-i\kappa \frac{2\pi}{N_l} \tilde{m}} \right] e^{i\kappa \frac{2\pi}{N_l} \tilde{n}} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \frac{1}{N_l} \sum_{\kappa=0}^{N_l-1} \Xi_l[\kappa] e^{i\kappa \frac{2\pi}{N_l} \tilde{n}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

と変形できる。最後に、 $\kappa = 0, 1, 2, \dots, \min_l\{N_l\} - 1$ に制限すると

$$\begin{aligned}
\text{WSTA}[\tilde{n}] &\approx \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \frac{1}{\min_l\{N_l\}} \sum_{\kappa=0}^{\min_l\{N_l\}-1} \Xi_l[\kappa] e^{i\kappa \frac{2\pi}{\min_l\{N_l\}} \tilde{n}} \\
&= \frac{1}{\min_l\{N_l\}} \sum_{\kappa=0}^{\min_l\{N_l\}-1} \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{T_0 - \tau_l}{\tau_l} \Xi_l[\kappa] \right) e^{i\kappa \frac{2\pi}{\min_l\{N_l\}} \tilde{n}}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

と近似できる。つまり、外力ノイズ $\xi_l(t)$ の離散時間フーリエ係数 $\Xi_l[\kappa]$ の重み付け平均を計算し、それを時間領域に戻せば WSTA を求めることができる [21]。なお、 κ を制限する操作は $\min_l\{1/(\Delta \tilde{t}_l)\}$ 以上の周波数成分を重み付け平均から無視することを意味し、周波数分解能 Δf には影響しない ($\Delta f = 1/T_0$ は l に依らない) ことに注意されたい。

4.3.2 推定方法

自励発振するパイプに対して、外部からガウシアンノイズ（使用周波数帯域20～20000 Hz）を60秒間当て、そのときの音響信号を収録した。ただし、測定系はパルス外力での計測と同じもの（図4.1）とした。この収録の後、スピーカからのノイズのみでの録音を行った。このノイズのみの信号をWSTAの計算に用いる。なお、パイプ音とノイズ音が混ざった信号と、ノイズのみの信号とにはラグが生じている可能性があるが、相互相関を取ることでこれらの信号間のずれを修正した。

位相感受関数の算出には、後半の40秒間を使用した（このとき $L \approx 66000$ となる）。ここで、変動周期 τ_l の検出には、パイプ音とノイズ音が混ざった信号に対して、200次のFIRフィルタ（通過帯域10～3000 Hz）を用いてパイプ音の基本波成分を抽出し、パルス加振測定期と同じようにヒルベルト変換を行った。また、本測定においてもパルス加振の場合と同様に、（ア）0～ 2π 、（イ） $\pi/2$ ～ $5\pi/2$ 、（ウ） π ～ 3π 、（エ） $3\pi/2$ ～ $7\pi/2$ の4条件について検討を行った。

4.3.3 結果と考察

得られた結果を図4.3に示す。この図の条件（イ）と（エ）のフーリエ振幅を見ると、ノイズ外力による計測でも正弦波による結果と同じものが得られたように見える。しかし、これは誤推定だと考えられる。実は、WSTAを得る処理過程において、振動子の1周期ではなく複数周期としたMcWSTA（Multicycle Weighted Spike-Triggered Average）法というものがある[28, 29]。これを本測定に適用した例を図4.4に示す。この結果を見れば、図の中央のデータの周期性が損なわれていることがわかる。しかし、McWSTA法が提案された先行研究[28]では、数値シミュレーションではあるが、このようなことは起こらない。

さて、本測定の外力ノイズはパイプ音に対して約-7.33 dBであった。これは第2章で行った実験での正弦波外力とほぼ同じ大きさである（第2.3.1節参照）。ここで考えられるのは、外力信号が有するパワーの周波数分布である。正弦波外力の場合には引き込み効果のある周波数にのみパワーが局在しているが、一方でノイズにはそれ以外の周波数帯にも広くパワーが存在する。そのため、全体として正弦波と同等のパワーを有するノイズ外力であっても、余分な周波数成分を含むためにパイプを十分に加振できなかつたと考えられる。

加えて、ファンデルポール振動子（式(1.2)参照）を用いた数値シミュレーションを行った。ただし、このとき外力ノイズはファンデルポール振動子に何も影響を与えずに、振動子の出力波形にただ重ね合わせるだけとした。つまり、マイクによる観測信号には振動子の波形とノイズの両方が存在しているが、ファンデルポール振動子の周期（周波数）は変化しないため、 $WSTA(\tilde{t}) = Z(\theta) = 0$ という状況を仮想的に作ったのである。これにより、外力ノイ

ズがパイプに影響を与えていない場合の結果が確認できる。このシミュレーション結果を図4.5に示す。この図を見ると、実測で得られた図4.3と似ていることがわかる。したがって、やはりノイズはパイプに影響を与えていなかったと予測される。

以上より、加振ノイズはパイプ音に十分に加振できていなかったと結論付けることとした。そして、パイプにしっかりと影響を与えるには、周波数引き込み現象が生じる周波数（すなわち、パイプ音の倍音周波数に近い周波数）で加振する必要があることがわかった。なお、前節のパルス外力の大きさについては、本計測と比較できないため評価はできないが、推定されたフーリエ係数で合成した4つの位相感受関数に共通性がみられなかつたことには、パルスが弱かったことも原因であると示唆される。

最後に、以上の数値シミュレーションによる検証は、パイプ音の周期が全く変動していないことを証明した訳ではないことを補足しておく。もちろん、外力ノイズによってパイプ音の周期が変化している可能性は捨てきれない。しかし、問題はその変化がマイクに混入するノイズに埋もれてしまうことがある。つまり、よりパイプへの影響を大きくするために今以上に強いノイズを用いたとしても、マイクに収録された信号からパイプ音のみを取り出し、周期変動を抽出することが困難になるのである。

4.4 第4章のまとめ

本章では、外力にパルスやホワイトノイズを採用し、位相感受関数の再測定を試みた。その結果、第3章で考察したパイプの共鳴特性がパルスによる計測結果にも現れていたことを確認できた。これは、パルスが広い周波数帯域にわたってパワーを有し、その中からパイプ共鳴に対応する周波数成分が選択されたためであると考えられる。しかし、本測定では位相感受関数そのものの正確な値や関数の形などを得ることはできなかつた。加えて、ノイズ外力を用いた場合には、パイプを十分に加振することは困難であることもわかつた。

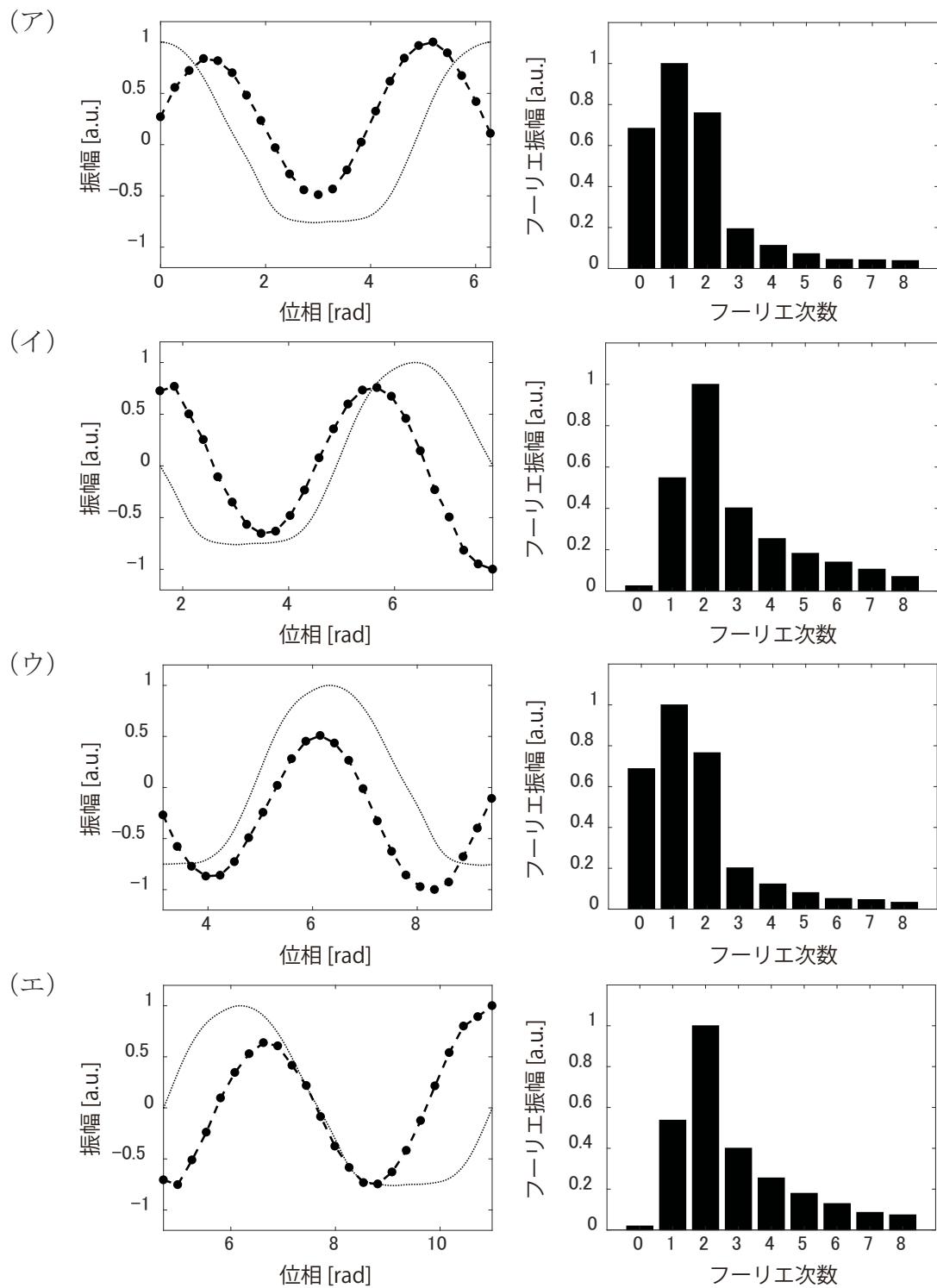


図 4.3: ノイズ外力によって推定されたオルガンパイプの位相感受関数. 左図は推定された位相感受関数（丸マーカーと破線），右図は第 8 次までで展開したフーリエ振幅である. (ア)～(エ) は閉じ込める 2π の区間にに関する条件を表している. なお, 左図には参考のために点線でパイプ音の波形を示している. また, 各図はそれぞれ絶対値の最大値で基準化している.

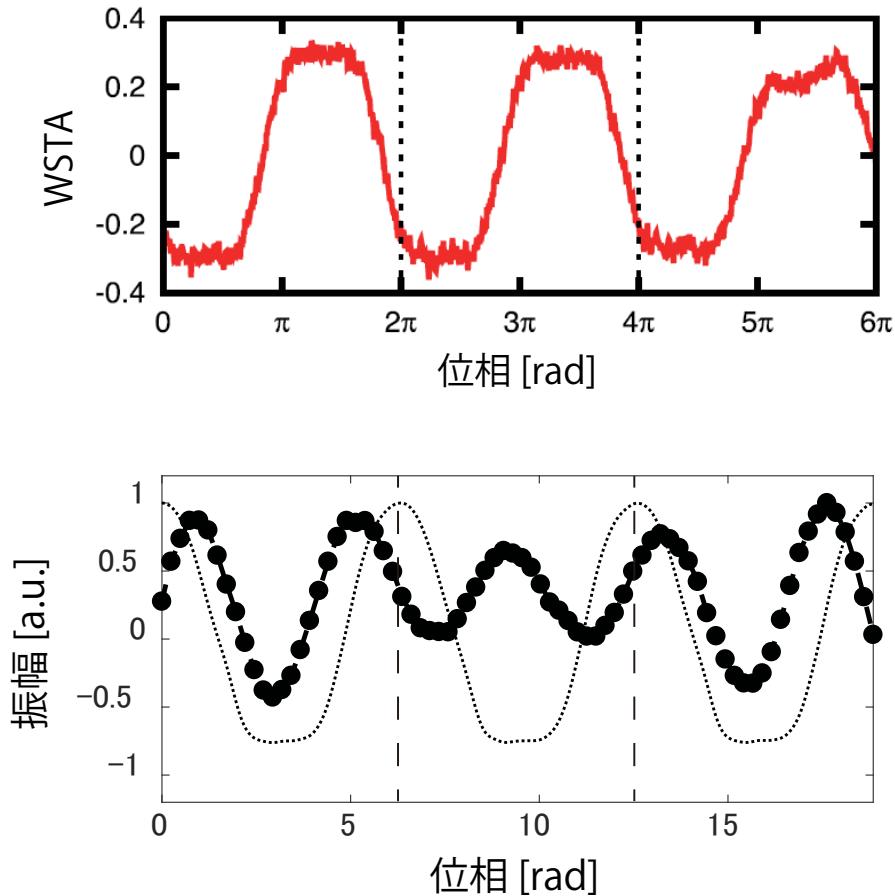


図 4.4: McWSTA 法の比較（3 周期分を用いて計算）．上図は先行研究 [28] のシミュレーション結果，下図は McWSTA 法を本研究に適用した結果（丸マーカーと破線）を示す．データ全体を眺めたとき，上図は 3 周期分が繰り返しているように見えるが，下図については 2 周期目のデータの周期性が損なわれている．なお，ここに示しているのは条件（ア）の場合である．

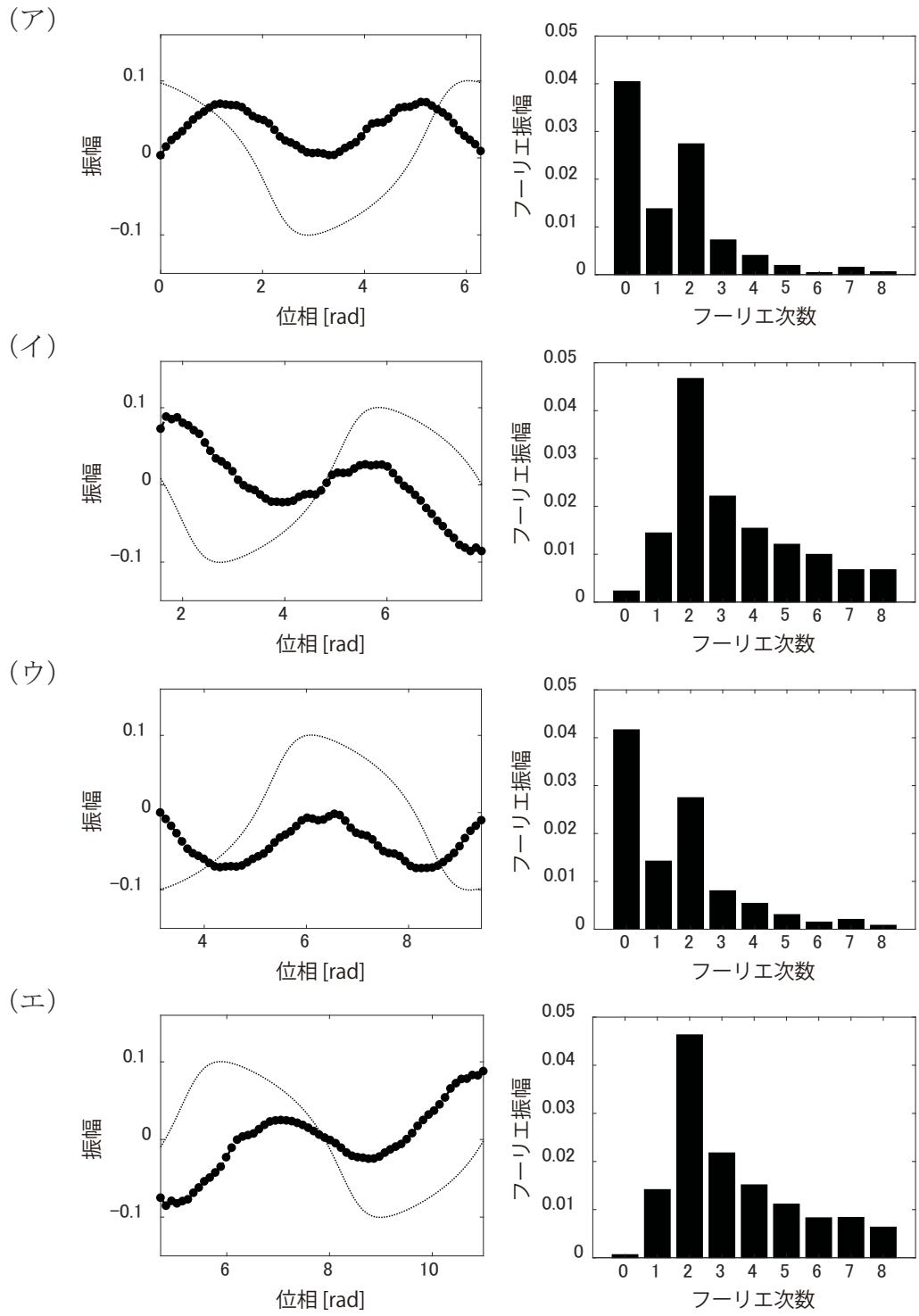


図 4.5: ノイズ外力が振動子に何も影響を及ぼさない場合に推定を行った結果. 図の配置や記号等は図 4.3 と同じである. また, 参考のために左図には振動波形 $0.05x(t)$ を点線で示している. なお, $\mu = 10000$, $\omega/(2\pi) = 1600$ であり, 数値解法には 4 次のルンゲクッタ法を用いた ($\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$). ただし, $x(t)$ に対するノイズのパワーは -7.33 dB とした. このとき, $L \approx 15000$ であった.

第5章 位相感受関数を用いたパイプ対の組み合わせ最適化

5.1 はじめに

前章までは、現実のオルガンパイプから位相感受関数を推定することに焦点を当ててきた。しかし、定量的に扱えるという利点があるとは言え、音響学において位相感受関数はどのような形で役立つのであろうか。本章ではこの点について考えていく。特に、得られた位相感受関数の使用例として、2本のパイプ対の組み合わせ最適化を考える。実際のオルガン製作の現場では、2本のパイプのうなりを聞きながら、そのうなりを消すように調律を行う。このとき、2本のパイプが同等の音高だと互いに引き込みやすく、うなりが消えて調律が行いにくいため、1オクターブの関係にあるパイプ対を使うという話がある。これを踏まえ、本研究では位相振動子モデルを用いて、「周波数引き込みが生じにくい」という観点から2本のパイプ対の最適化を試み、調律の行いやすいパイプ対の組み合わせを探ることとする。

5.2 位相感受関数と組み合わせ最適化

第1章で紹介した

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0\right) + \Gamma_{m,n}(\varphi) \quad (1.13)$$

は、 $\varphi(t) = \varphi^* = \text{const.}$ が存在するとき、すなわち $d\varphi/dt = 0$ である場合に、周波数引き込み現象が生じることを意味する。このとき、上式は

$$\frac{m}{n}\Omega_0 - \omega_0 = \Gamma_{m,n}(\varphi^*) \quad (5.1)$$

と書き表される。ここで、左辺第1項の $m\Omega_0/n$ は引き込み後に自励振動系が実際に振動する周波数 $d\theta/dt$ である（式(1.16)参照）。また、左辺第2項の ω_0 は系が持つ固有の周波数である。したがって、この式の左辺全体は「周波数引き込み現象によって、本来振動するはずの自然な周波数 ω_0 から実際の周波数 $d\theta/dt$ がどの程度ずれるのか」を示し、それは右辺である

$$\Gamma_{m,n}(\varphi^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z\left(\frac{m}{n}\Omega_0 s + \varphi^*\right) p(s) ds \quad (3.2')$$

で決まるこことを表している。

つまり、位相感受関数が得られれば、 $\Gamma_{m,n}(\varphi^*)$ を計算することによって、周波数引き込み現象が生じる周波数幅（周波数引き込み現象の起りやすさ）を予測・評価することができる。さらには、「自励振動系の周波数比 $m:n$ がどのようにすれば最も周波数引き込み現象が生じにくいのか」という観点から、周波数比の最適化を行うことも可能となる。

5.3 2本のパイプ対の組み合わせ最適化

5.3.1 振動系2つにおける周波数引き込み現象に対する従来の考え方

パイプが2本ある場合を考える。すなわち、以下のように2つの位相振動子モデルを連立させる。

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + Z_1(\theta_1)p_2(\theta_2) \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + Z_2(\theta_2)p_1(\theta_1) \end{cases} \quad (5.2)$$

ただし、これまでとは異なり、外力 p は時刻 t ではなく、位相 θ の関数としている。ここで、

$$\varphi(t) = n\theta_1(t) - m\theta_2(t) \quad (5.3)$$

を導入すると、上式は

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(m\omega_2 - n\omega_1) + nZ_1\left(\frac{m}{n}\theta_2 + \frac{\varphi}{n}\right)p_2(\theta_2) - mZ_2\left(\frac{n}{m}\theta_1 - \frac{\varphi}{m}\right)p_1(\theta_1) \quad (5.4)$$

となる。さらに、振動系が1つの場合と同様に長時間平均を施すことで、

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(m\omega_2 - n\omega_1) + \left[n\Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi}{n}\right) - m\Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi}{m}\right) \right] \quad (5.5)$$

のように、式(1.13)と同じ構造の数式が得られる。したがって、 $\varphi(t) = \varphi^* = \text{const.}$ が存在し、 $\varphi(t)$ の定義式(5.3)から

$$\frac{d\theta_1}{dt} : \frac{d\theta_2}{dt} = m : n \quad (5.6)$$

が成り立つので、2つの振動系は周波数比 $m:n$ で互いに引き込み合う[4]。

しかし、式(5.5)からは

$$m\omega_2 - n\omega_1 = n\Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) - m\Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) \quad (5.7)$$

しか導くことができず、各々の振動系に対して、「本来振動するはずの自然な周波数から実際の周波数がどの程度ずれるのか」に言及することができない。そこで本研究では、次節で説明する方法を導入する。

5.3.2 支配方程式の分離

前節で扱った連立位相振動子モデルを分離したまま変形することを試みる。まず、式(5.2)の解を

$$\theta_1(t) = \frac{\Omega}{n}t + \varphi_1(t) \quad \text{and} \quad \theta_2(t) = \frac{\Omega}{m}t + \varphi_2(t) \quad (5.8)$$

と仮定する。ただし、 $\omega_1 : \omega_2 : \Omega \approx m : n : mn$ が成り立つとする。これらを上式に代入すれば

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + Z_1\left(\frac{\Omega}{n}t + \varphi_1\right)p_2\left(\frac{\Omega}{m}t + \varphi_2\right) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + Z_2\left(\frac{\Omega}{m}t + \varphi_2\right)p_1\left(\frac{\Omega}{n}t + \varphi_1\right) \end{cases} \quad (5.9)$$

となる。振動系が 1 つの場合と同様に、この連立方程式の各右辺は小さな値となる。そこで、両辺に長時間平均を施し、さらに

$$\varphi(t) = n\theta_1(t) - m\theta_2(t) = n\varphi_1(t) - m\varphi_2(t) \quad (5.3')$$

を定義すると

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \left\langle Z_1\left(\frac{\Omega}{n}t + \varphi_1\right)p_2\left(\frac{\Omega}{m}t + \varphi_2\right) \right\rangle \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \left\langle Z_2\left(\frac{\Omega}{m}t + \varphi_2\right)p_1\left(\frac{\Omega}{n}t + \varphi_1\right) \right\rangle \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \left\langle Z_1\left(\frac{\Omega}{n}t_2 + \varphi_1 - \frac{m}{n}\varphi_2\right)p_2\left(\frac{\Omega}{m}t_2\right) \right\rangle \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \left\langle Z_2\left(\frac{\Omega}{m}t_1 + \varphi_2 - \frac{n}{m}\varphi_1\right)p_1\left(\frac{\Omega}{n}t_1\right) \right\rangle \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \left\langle Z_1\left(\frac{m}{n}\frac{\Omega}{m}t_2 + \frac{\varphi}{n}\right)p_2\left(\frac{\Omega}{m}t_2\right) \right\rangle \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \left\langle Z_2\left(\frac{n}{m}\frac{\Omega}{n}t_1 - \frac{\varphi}{m}\right)p_1\left(\frac{\Omega}{n}t_1\right) \right\rangle \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi}{n}\right) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi}{m}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

と変形できる[6]。ただし、 $t_1 = t + n\varphi_1$ 、 $t_2 = t + m\varphi_2$ とし、長時間平均操作を“ $\langle \cdot \rangle$ ”と表した。さて、周波数引き込み現象が生じたとき、すなわち $\varphi(t) = \varphi^*$ としたとき

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) = \text{const.} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) = \text{const.} \end{cases} \quad (5.11)$$

となる。また、このとき $d\varphi/dt = 0$ でもあるので、 $\varphi(t)$ の定義式 (5.3') より $n(d\varphi_1/dt) = m(d\varphi_2/dt)$ である。したがって、上式は定数 ϵ を用いて

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{n} - \omega_1\right) + \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) = \frac{\epsilon}{n} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\left(\frac{\Omega}{m} - \omega_2\right) + \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) = \frac{\epsilon}{m} \end{cases} \quad (5.12)$$

と書くことができる。各式の中辺と右辺について整理すると

$$\begin{cases} \frac{\Omega + \epsilon}{n} - \omega_1 = \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) \\ \frac{\Omega + \epsilon}{m} - \omega_2 = \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) \end{cases} \quad (5.13)$$

が得られる。なお、 φ^* は式 (5.7) を満たすものと同一であることに注意されたい。

以上より、連立方程式を分離したまま、式 (5.1) と同じ形式を得ることができた。したがって、式 (5.13) をともに満たす φ^* が存在するとき、 $d\theta_1/dt$, $d\theta_2/dt$ はそれぞれ $(\Omega + \epsilon)/n$, $(\Omega + \epsilon)/m$ に引き込まれ、各々の自然な周波数とのずれは $\Gamma_{12,(m,n)}$, $\Gamma_{21,(n,m)}$ で表される。そして、 $\Gamma_{12,(m,n)}$ と $\Gamma_{21,(n,m)}$ を計算することにより、周波数引き込み現象の起こりやすさを評価することが可能となる。本研究では、次式で定義されるパイプ 1 本あたりの平均ずれ $\Gamma(\varphi^*; m, n)$ の最大値 $\max_{\varphi^*} \Gamma(\varphi^*; m, n)$ を、各周波数比 $m : n$ に対して評価する。

$$\Gamma(\varphi^*; m, n) = \frac{1}{2} \left[\left| \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) \right| + \left| \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) \right| \right] \quad (5.14)$$

最後に、 $\Gamma_{12,(m,n)}$ と $\Gamma_{21,(n,m)}$ の具体的な計算方法を述べる。 $\Gamma_{12,(m,n)}$, $\Gamma_{21,(n,m)}$ の被積分項である位相感受関数と外力に複素フーリエ級数を適用すれば

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) = \left\langle Z_1\left(\frac{\Omega}{n}t_2 + \frac{\varphi^*}{n}\right) p_2\left(\frac{\Omega}{m}t_2\right) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_1\left(\frac{\Omega}{n}s_2 + \frac{\varphi^*}{n}\right) p_2\left(\frac{\Omega}{m}s_2\right) ds_2 \\ \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) = \left\langle Z_2\left(\frac{\Omega}{m}t_1 - \frac{\varphi^*}{m}\right) p_1\left(\frac{\Omega}{n}t_1\right) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_2\left(\frac{\Omega}{m}s_1 - \frac{\varphi^*}{m}\right) p_1\left(\frac{\Omega}{n}s_1\right) ds_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) = \sum_{k_1, l_2=-\infty}^{\infty} Z_{1,k_1} P_{2,l_2} e^{ik_1 \frac{\varphi^*}{n}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T e^{i(k_1 m + l_2 n) \frac{\Omega}{mn} s_2} ds_2 \\ \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) = \sum_{k_2, l_1=-\infty}^{\infty} Z_{2,k_2} P_{1,l_1} e^{-ik_2 \frac{\varphi^*}{m}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T e^{i(k_2 n + l_1 m) \frac{\Omega}{mn} s_1} ds_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \Gamma_{12,(m,n)}\left(\frac{\varphi^*}{n}\right) = Z_{1,0} P_{2,0} + \sum_{k_1=1}^{\infty} 2 |Z_{1,k_1}| |P_{2,\frac{k_1 m}{n}}| \cos\left(k_1 \frac{\varphi^*}{n} + \angle Z_{1,k_1} - \angle P_{2,\frac{k_1 m}{n}}\right) \\ \Gamma_{21,(n,m)}\left(-\frac{\varphi^*}{m}\right) = Z_{2,0} P_{1,0} + \sum_{k_2=1}^{\infty} 2 |Z_{2,k_2}| |P_{1,\frac{k_2 n}{m}}| \cos\left(k_2 \frac{\varphi^*}{m} - \angle Z_{2,k_2} + \angle P_{1,\frac{k_2 n}{m}}\right) \end{cases} \quad (5.15) \end{aligned}$$

となり、積分を離散計算に置き換えることができる。本研究ではこれをを利用して数値計算を行った。ただし、下添え字 T が付いた積分記号は、区間 T にわたる積分を意味している。また、外力のフーリエ係数の添え字である $k_1 m/n$ や $k_2 n/m$ が非整数の値を取るときには、 $P_{2,k_1 m/n}$ や $P_{1,k_2 n/m}$ は 0 とする。

5.3.3 評価結果

上述した評価法を用いて、周波数比 $m : n$ を変化させながら 2 本のパイプ対の評価を行った。位相感受関数と外力には第 3 章で得られたものを使用した（図 3.2 参照）。ただし、パイプ音波形はフーリエ係数に分解した後、第 1 ~ 5 次を計算に用いることとした。また、2 本のパイプは音高以外は同じものであると仮定し、 $Z_1 = Z_2$, $p_1 = p_2$ のように同じ関数とした。加えて、パイプ音と位相感受関数の両者ともに、第 1 次フーリエ成分の振幅を 1 に基準化して計算を行った。

計算結果を図 5.1 に示す。ここで、横軸の周波数比には純正律 [30] を採用し、片方のパイプの音高を固定したまま、他方のパイプの音高を半音ずつ上げていく順で並べている。最左の $1 : 1$ は 2 本のパイプが同じ音高であることを意味し、右にいくほど 2 本の音高差が開いていく（表 5.1 参照）。今回は、位相感受関数に含まれるフーリエ次数が第 1 ~ 3 次であることを考慮し、第 3 次成分に対応する $1 : 3$ までを表示している。

この結果を見ると、周波数比が $1 : 2$ であるときに最も周波数のずれが生じ、それと同等の大きさで $1 : 1$ も引き込みやすいことがわかる。一般的には、周波数比 $1 : 1$ の周波数引き込み現象が最も生じやすく、その周波数幅は最も広くなる [4]。そして、複雑な周波数比になるにしたがってその周波数範囲は狭くなる。オルガンパイプにおいて、周波数比 $1 : 2$ が $1 : 1$ と同等の広さになっているのは、前章までにも触れたようにパイプの第 2 共鳴の影響であると考えられる。

次に、パイプ間の相互作用に非対称性を加える。具体的には、音高を固定するパイプ音の振幅を、他方の振幅の β 倍とする。つまり、 $p_1 = \beta p_2$ である ($\beta > 1$)。このとき、位相感受関数は $Z_1 = Z_2/\beta$ と見積もることができる [31]。 $\beta = 2$ の場合を図 5.2 に示す。 $\beta = 1$ の場合である図 5.1 に比べ、周波数比 $1 : 1$ のずれがより大きく、周波数比 $1 : 2$ ではずれがより小さくなっていることが見て取れる。そこで、周波数比 $1 : 1$ と $1 : 2$ の周波数のずれについて、これらの β に対する依存性を調べることとした。この計算結果は図 5.3 にまとめた。図 5.3 によれば、 β が大きくなり、パイプ間の相互作用における非対称性が強くなってくると、周波数比 $1 : 1$ はその引き込み幅が大きくなるのに対し、周波数比 $1 : 2$ は小さくなっていくことがわかる。すなわち、パイプ間の相互作用の強さに非対称性がある際には、同じ音高のパイプ対よりも、1 オクターブの関係にあるパイプ対の方が調律は行いやすいということが示

唆される。通常、低いパイプ音は聞こえにくいため、強いパワーで駆動される。それに伴い、高い音のパイプと組み合わせたときに相互作用に非対称性が生じることが予測される。そのため、周波数比が $1:1$ よりも $1:2$ の方が調律は行いやすいということが起こり得たのだろうと考えられる。

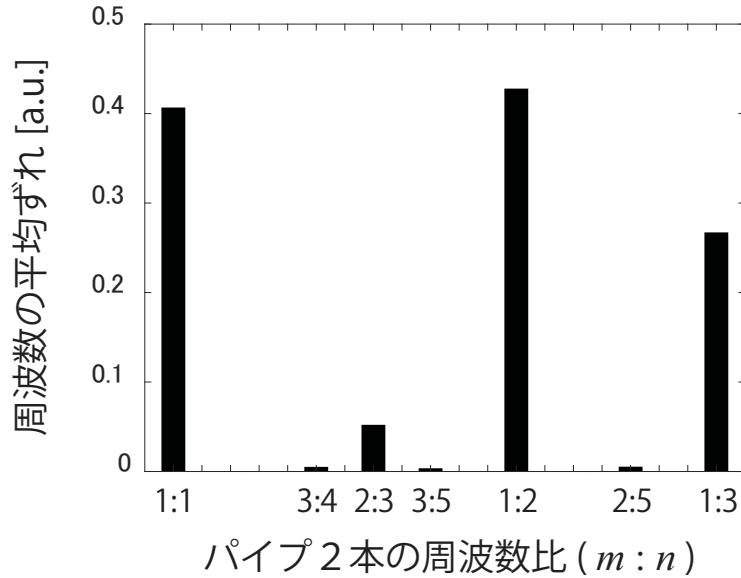


図 5.1: 各周波数比に対する、オルガンパイプ 2 本の自然な周波数からの平均ずれ ($\beta = 1$)。なお、パイプ間の距離は仮想的に 0 とし、片方のパイプから発せられた音が他方のパイプに届くまでの位相遅れはないものとしている。

表 5.1: 本研究で採用した純正律 [30]。片方のパイプの音高をドに固定し、そのドに対する周波数比 n/m を表す。なお、異名同音としている。

音高	ド	ド [#]	レ	レ [#]	ミ	ファ	ファ [#]	ソ	ソ [#]	ラ	ラ [#]	シ
周波数比	1	25/24	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	9/5	15/8

音高 (1 オクターブ上)	ド	ド [#]	レ	レ [#]	ミ	ファ	ファ [#]	ソ
周波数比	2	25/12	9/4	12/5	5/2	8/3	45/16	3

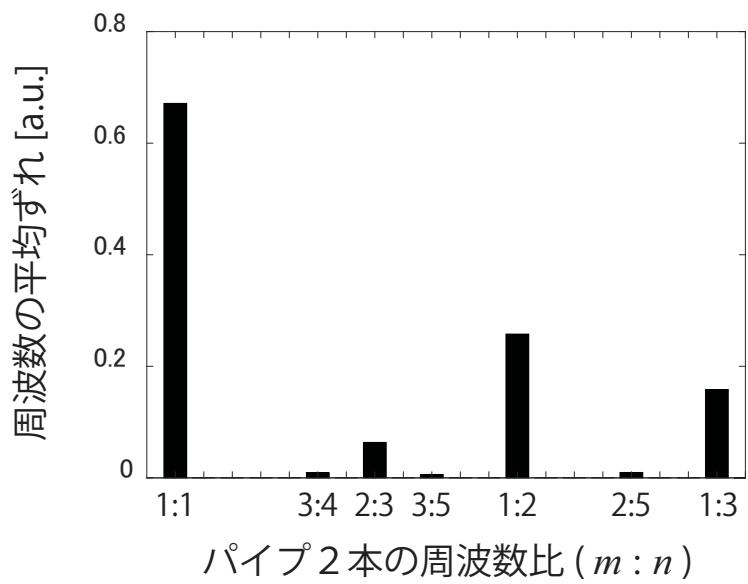


図 5.2: 各周波数比に対する、オルガンパイプ 2 本の自然な周波数からの平均ずれ ($\beta = 2$) . なお、縦軸は無次元化されているが、 β の値以外は変わっていないため、図 5.1 と比較することは可能である。

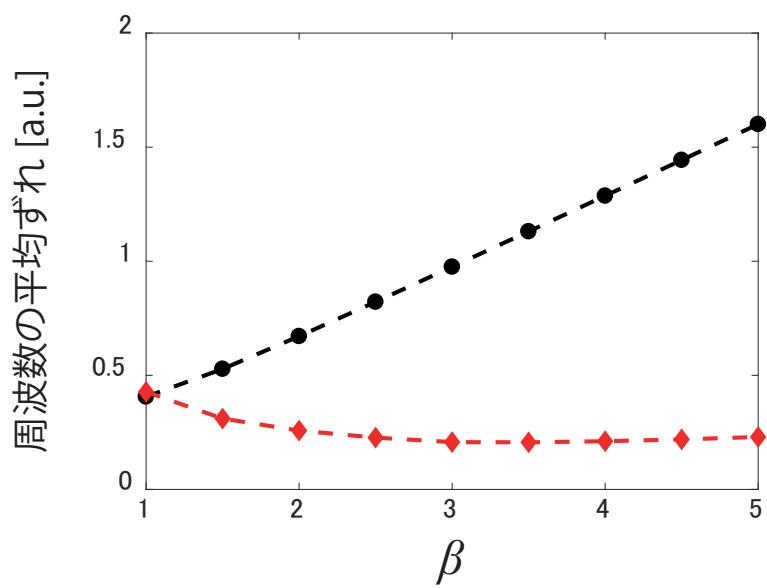


図 5.3: オルガンパイプ 2 本の自然な周波数からの平均ずれ幅の β に対する依存性. 黒線は周波数比が 1 : 1 である場合を、赤線は周波数比が 1 : 2 である場合を表す。

5.4 位相感受関数が不明である場合の組み合わせ最適化

前章までに得られた位相感受関数は、測定精度についての保証がなく、眞のものが得られたかどうかは判断が難しい。そこで、位相感受関数が不明である場合における最適化を考えることとした。ここでは、「パイプ音の波形は既知である」という条件のもとで、周波数引き込み現象によって生じる周波数のずれが最大となるような位相感受関数を想定する。すなわち、位相感受関数が不明であっても、「どの周波数比が引き込みにくいのか」をパイプ音の波形情報のみから予測することを目的とする。

参考とする先行研究は田中らのものである[32, 33]。田中らは、位相感受関数が既知である振動子に対して、引き込み幅が最大となるような外力波形を理論的に導いている。この研究を逆に用いて、外力波形であるパイプ音が既知である際の最大引き込み幅を求める。

5.4.1 理論

さて、スタートは次に示す式(5.14)である。

$$\Gamma(\varphi^*; m, n) = \frac{1}{2} \left[\left| \Gamma_{12,(m,n)} \left(\frac{\varphi^*}{n} \right) \right| + \left| \Gamma_{21,(n,m)} \left(-\frac{\varphi^*}{m} \right) \right| \right] \quad (5.14)$$

ただし、

$$\begin{cases} \Gamma_{12,(m,n)} \left(\frac{\varphi^*}{n} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_1 \left(\frac{\Omega}{n} s_2 + \frac{\varphi^*}{n} \right) p_2 \left(\frac{\Omega}{m} s_2 \right) ds_2 \\ \Gamma_{21,(n,m)} \left(-\frac{\varphi^*}{m} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_2 \left(\frac{\Omega}{m} s_1 - \frac{\varphi^*}{m} \right) p_1 \left(\frac{\Omega}{n} s_1 \right) ds_1 \end{cases} \quad (5.16)$$

である。

これらに複素フーリエ級数を適用すると

$$\begin{aligned}
2\Gamma(\varphi^*; m, n) &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_1 \left(\frac{\Omega}{n} s_2 + \frac{\varphi^*}{n} \right) p_2 \left(\frac{\Omega}{m} s_2 \right) ds_2 \right| + \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T Z_2 \left(\frac{\Omega}{m} s_1 - \frac{\varphi^*}{m} \right) p_1 \left(\frac{\Omega}{n} s_1 \right) ds_1 \right| \\
&= \left| \sum_{k_1, l_2=-\infty}^{\infty} Z_{1, k_1} P_{2, l_2} e^{i \frac{k_1}{n} \varphi^*} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T e^{i(k_1 m + l_2 n) \frac{\Omega}{mn} s_2} ds_2 \right| \\
&\quad + \left| \sum_{k_2, l_1=-\infty}^{\infty} Z_{2, k_2} P_{1, l_1} e^{-i \frac{k_2}{m} \varphi^*} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T e^{i(k_2 n + l_1 m) \frac{\Omega}{mn} s_1} ds_1 \right| \\
&= \left| \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \frac{X_{1, k_1} - i Y_{1, k_1}}{2} \left| P_{2, \frac{k_1 m}{n}} \right| e^{i \left(\frac{k_1}{n} \varphi^* - \angle P_{2, \frac{k_1 m}{n}} \right)} \right| + \left| \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{X_{2, k_2} - i Y_{2, k_2}}{2} \left| P_{1, \frac{k_2 n}{m}} \right| e^{-i \left(\frac{k_2}{m} \varphi^* + \angle P_{1, \frac{k_2 n}{m}} \right)} \right| \\
&= \left| P_{2, 0} \frac{X_{1, 0}}{2} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \left| P_{2, \frac{k_1 m}{n}} \right| \left[X_{1, k_1} \cos \left(\frac{k_1}{n} \varphi^* - \angle P_{2, \frac{k_1 m}{n}} \right) + Y_{1, k_1} \sin \left(\frac{k_1}{n} \varphi^* - \angle P_{2, \frac{k_1 m}{n}} \right) \right] \right| \\
&\quad + \left| P_{1, 0} \frac{X_{2, 0}}{2} + \sum_{k_2=1}^{\infty} \left| P_{1, \frac{k_2 n}{m}} \right| \left[X_{2, k_2} \cos \left(\frac{k_2}{m} \varphi^* + \angle P_{1, \frac{k_2 n}{m}} \right) - Y_{2, k_2} \sin \left(\frac{k_2}{m} \varphi^* + \angle P_{1, \frac{k_2 n}{m}} \right) \right] \right| \\
&= |\gamma_1(X_{1, 0}, X_{1, 1}, Y_{1, 1}, X_{1, 2}, Y_{1, 2}, \dots)| + |\gamma_2(X_{2, 0}, X_{2, 1}, Y_{2, 1}, X_{2, 2}, Y_{2, 2}, \dots)| \tag{5.17}
\end{aligned}$$

となる。なお、式変形には複素フーリエ係数と実フーリエ係数の変換公式 $Z_{j, k_j} = (X_{j, k_j} - i Y_{j, k_j})/2$ を用いた ($j = 1, 2$)。

ここで、周波数引き込み現象の生じる周波数幅が最大となるような位相感受関数を想定するため、 $|\gamma_j|$ の X_{j, k_j} と Y_{j, k_j} に関する最大化を考える。ただし、 γ_j は X_{j, k_j} や Y_{j, k_j} の一次関数であるので、 X_{j, k_j} や Y_{j, k_j} (の絶対値) が大きいほど $|\gamma_j|$ も大きくなる。そこで本研究では、「位相感受関数 $Z_j(\theta)$ の二乗平均値は一定値 E_j^2 である」という制約の下で最大化を行う。すなわち、与える制約条件は

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Z_1(\theta_1)]^2 d\theta_1 = \frac{X_{1, 0}^2}{4} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{X_{1, k_1}^2 + Y_{1, k_1}^2}{2} = E_1^2 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Z_2(\theta_2)]^2 d\theta_2 = \frac{X_{2, 0}^2}{4} + \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{X_{2, k_2}^2 + Y_{2, k_2}^2}{2} = E_2^2 \end{cases} \tag{5.18}$$

である。このとき、最大化すべき量は λ_1 , λ_2 をラグランジュの未定乗数として

$$\begin{cases} J_1 = \gamma_1 + \lambda_1 \left(E_1^2 - \frac{X_{1, 0}^2}{4} - \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{X_{1, k_1}^2 + Y_{1, k_1}^2}{2} \right) \\ J_2 = \gamma_2 + \lambda_2 \left(E_2^2 - \frac{X_{2, 0}^2}{4} - \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{X_{2, k_2}^2 + Y_{2, k_2}^2}{2} \right) \end{cases} \tag{5.19}$$

と書ける [26]。したがって、 J_j の X_{j, k_j} や Y_{j, k_j} に関する偏微分係数が 0 となる条件から、最大

の引き込み幅が達成されるのは

$$\begin{cases} X_{1,0} = \frac{P_{2,0}}{2\lambda_1} \\ X_{1,k_1} = \frac{|P_{2,\frac{k_1m}{n}}|}{2\lambda_1} \cos\left(\frac{k_1}{n}\varphi^* - \angle P_{2,\frac{k_1m}{n}}\right) \\ Y_{1,k_1} = \frac{|P_{2,\frac{k_1m}{n}}|}{2\lambda_1} \sin\left(\frac{k_1}{n}\varphi^* - \angle P_{2,\frac{k_1m}{n}}\right) \\ X_{2,0} = \frac{P_{1,0}}{2\lambda_2} \\ X_{2,k_2} = \frac{|P_{1,\frac{k_2n}{m}}|}{2\lambda_2} \cos\left(\frac{k_2}{m}\varphi^* + \angle P_{1,\frac{k_2n}{m}}\right) \\ Y_{2,k_2} = -\frac{|P_{1,\frac{k_2n}{m}}|}{2\lambda_2} \sin\left(\frac{k_2}{m}\varphi^* + \angle P_{1,\frac{k_2n}{m}}\right) \end{cases} \quad (5.20)$$

のときである。そして、式(5.18)より

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} = \pm \frac{4E_1}{\sqrt{|P_{2,0}|^2 + 2 \sum_{k_1=1}^{\infty} |P_{2,\frac{k_1m}{n}}|^2}} = \pm \frac{4E_1}{\sqrt{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} |P_{2,\frac{k_1m}{n}}|^2}} \\ \frac{1}{\lambda_2} = \pm \frac{4E_2}{\sqrt{|P_{1,0}|^2 + 2 \sum_{k_2=1}^{\infty} |P_{1,\frac{k_2n}{m}}|^2}} = \pm \frac{4E_2}{\sqrt{\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} |P_{1,\frac{k_2n}{m}}|^2}} \end{cases} \quad (5.21)$$

である。

以上より、 X_{j,k_j} , Y_{j,k_j} によって最大化された周波数幅 $\Gamma(\varphi^*; m, n)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi^*; m, n) &= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{|P_{2,0}|^2}{4\lambda_1} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{|P_{2,\frac{k_1m}{n}}|^2}{2\lambda_1} \right| + \left| \frac{|P_{1,0}|^2}{4\lambda_2} + \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{|P_{1,\frac{k_2n}{m}}|^2}{2\lambda_2} \right| \right) \\ &= \frac{E_1}{2} \sqrt{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} |P_{2,\frac{k_1m}{n}}|^2} + \frac{E_2}{2} \sqrt{\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} |P_{1,\frac{k_2n}{m}}|^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる。ここで、 $\Gamma(\varphi^*; m, n)$ は φ^* に依存しなくなっているため、上式は周波数比 $m : n$ の引き込み現象が生じる最大周波数幅そのものだと言える。なお、ラグランジュの未定乗数(式(5.21))が $\lambda_j > 0$ のときには γ_j は最大に、 $\lambda_j < 0$ のときには γ_j は最小となるが、その絶対値 $|\gamma_j|$ はどちらも同じ値となるので、ここでは特に言及しないこととした。

5.4.2 評価結果

各周波数比 $m : n$ に対して、実際のパイプ音波形(図3.2の点線)から最大引き込み幅を計算した結果を図5.4に示す。ここで、2本のパイプの位相感受関数とパイプ音は同じである

とし、さらに相互作用も対称であると仮定した（すなわち $Z_1 = Z_2$, $p_1 = p_2$, $\beta = 1$ ）．図 5.4 を見ると、周波数比 $1:1$ が最も大きな値を取っていることがわかる．そして、複雑な周波数比になるに従い、最大引き込み幅は小さくなっている．これは、式 (5.22) からわかるように、パイプ音のフーリエ振幅はその添え字である $k_1 m/n$ や $k_2 n/m$ が整数となる場合にしか値を持たず、その場合にしか式 (5.22) に加算されないためである．したがって、最も周波数引き込み現象が生じやすいのは周波数比 $1:1$ のものであると言えるだろう．そして、実際の調律においては、この関係にあるパイプ対を避けることで、周波数引き込み現象からのリスクを回避していることが示唆される．

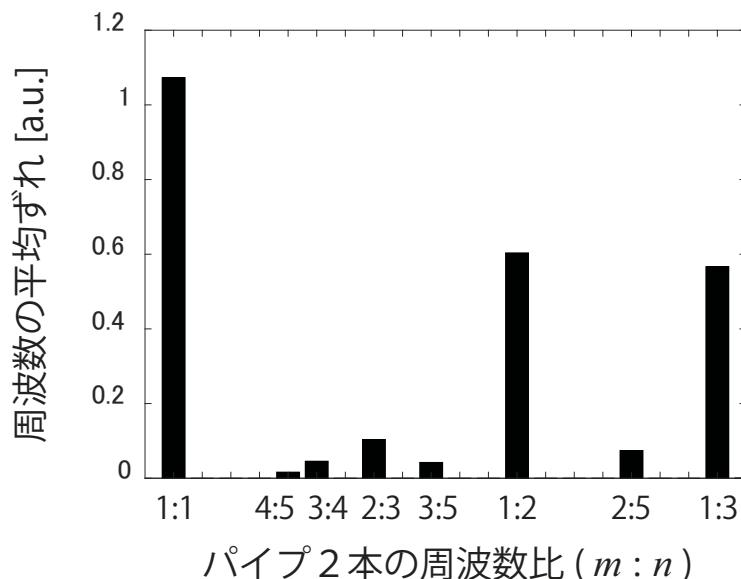


図 5.4: 各周波数比に対する、オルガンパイプ 2 本の自然な周波数からの平均ずれの最大値．なお、縦軸は無次元化されているが、位相感受関数の二乗平均値 E_j^2 を図 5.1 のものと揃えたため、比較することは可能である．

5.5 第5章のまとめ

本章では、得られた位相感受関数の応用例として、2本のオルガンパイプ対の組み合わせ最適化に関する理論的枠組みを導入した。その際、2つの位相振動子モデルを分離したまま整理することで、個々のパイプに対して周波数引き込み現象の生じやすさを評価できるようにした。実際に、第3章で推定した位相感受関数を用いて評価した結果、パイプ間の相互作用の強さに非対称性がある場合には、同じ音高のパイプ対よりも、1オクターブの関係にあるパイプ対の方が調律は行いやすいということを示すことができた。加えて、位相感受関数の推定精度が不明であることを考慮して、パイプ音の波形情報のみを用いた最適化も行った。この場合も、同じ音高のパイプ対が最も周波数引き込み現象を引き起こしやすく、調律は行いにくいことがわかった。

なお、以上の結果は、実際の調律時におけるパイプ対の組み合わせとも矛盾がないものである。

第6章 総括

6.1 本論文のまとめ

本研究では、オルガンパイプにみられる周波数引き込み現象について、位相振動子モデルの観点から解析を試みた。具体的には、現実のパイプに対して周波数引き込み現象を引き起こし、その観測結果から位相感受関数を構成した。その後、得られた位相感受関数が妥当なものであるかどうかを確かめるため、パルスとホワイトノイズの2種類の外力を用いた再計測を試みた。加えて、「周波数引き込み現象が生じにくさ」という観点から、2本のパイプ対の組み合わせ最適化も行った。以下に、得られた結果を各章ごとに記載する。

第2章

まず、位相感受関数の測定に先立って、現実のオルガンパイプが位相振動子モデルに従うかの検証を行った。そのため、自励発振するオルガンパイプに外から正弦波や複合音を与える実験を行った。結果として、外力の周波数成分がパイプ音の周波数成分に近接する際に、周波数引き込み現象が起こることを確認した。これは、位相振動子モデルの理論から予測された結果そのものである。したがって、観測結果は位相振動子モデルによる理論的予測の通りであったため、オルガンパイプは位相振動子モデルに従うと言える。

第3章

次に、正弦波外力によって生じた周波数引き込み現象の観測結果から、位相感受関数を構築した。具体的には、観測結果の引き込み幅とパワー変動から、第1～3次のフーリエ係数を推定することで位相感受関数を構成した。また、推定された位相感受関数には、パイプ上部の共鳴管の特性が反映されていることを考察した。

第4章

本研究は、実物のオルガンパイプを用いた測定であるがゆえ、真の位相感受関数（正解値）はわからない。そこで、外力としてパルスやホワイトノイズを採用し、位相感受関数の再測

定を行った。その結果、第3章で考察したパイプの共鳴特性がパルスを用いた計測結果にも現れていたことを確認した。しかし、推定された位相感受関数そのものは精度が高くなく、正確な値や関数の形などは得ることができなかった。また、ノイズを外力として用いた場合には、パイプを十分に加振できないという理由から適切に計測ができなかつたが、この結果から、パイプに十分な影響を与えるには、周波数引き込み現象が生じる周波数で加振する必要があることがわかつた。

第5章

最後に、得られた位相感受関数の応用例として、位相振動子モデルの理論を整理し、2本のオルガンパイプ対の組み合わせ最適化に関する理論的枠組みを導入した。その結果、パイプ間の相互作用の強さに非対称性がある際には、同じ音高のパイプ対よりも、1オクターブの関係にあるパイプ対の方が調律は行いやすいということを示すことができた。加えて、位相感受関数が不明である状況を想定して、パイプ音の波形情報のみを用いた最適化も行ったが、この場合も、同じ音高のパイプ対が最も周波数引き込み現象を引き起こしやすく、調律は行いにくいことがわかつた。これらの結果は、実際の調律時におけるパイプ対の組み合わせとも矛盾がないものであった。

以上の結果は、オルガンパイプの周波数引き込み現象を位相振動子モデルの視点でとらえてもよい（位相振動子モデルと整合性がある）ことを支持している。しかし、正確に位相感受関数を得るためにには、周波数引き込み現象が生じる周波数で加振する必要があり、パルスやホワイトノイズを用いて容易に（全周波数について一括に）位相感受関数を測定することは困難だということも示唆された。

併せて、音響系での位相感受関数の推定における問題点をここで述べておく。音信号を扱う上で重要な点に、センサー（音響問題ではマイク）に振動系と外力の両方が混入することが挙げられる。本推定においてもこれが問題となつた。外力が正弦波の場合、パイプ音の周波数成分のうち、外力と位相干渉を起こすもののみに着目することで、収録された信号（振動系と外力が混ざつた信号）のパワー変動から直接読み取ることができた。しかし、オーバーシュートが付随するパルスやランダム性を有するホワイトノイズが外力である場合には、このような簡単な対処法がないため、FIRフィルタを用いてパイプ音を分離する必要があつたのである。したがつて、このような場合には、生データに対して何らかの処理を施したデータを扱うこととなり、推定結果にアーチファクトが生じる可能性がある。この点において、正弦波による推定結果の方がより信頼性があると言えるだろう。

6.2 位相振動子モデルの速い振動への適用限界

最後に、音現象のような速い振動に対して位相振動子モデルを適用したことについて考察する。まず、位相振動子モデルが適用可能である場合というのは、第1章で述べたように、外力 $\mathbf{p}(t)$ が微弱である場合、すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \quad (1.6)$$

の右辺第1項に比べて右辺第2項が小さいという仮定が成り立つときである。位相振動子モデルはこれを変数変換したものなので、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1.10)$$

の右辺第1項と右辺第2項についても同様の関係が成り立っているはずである。すなわち、振動系が有する自然な角周波数 ω_0 が大きいほど、この仮定は成り立つはずなので、速い振動に対して位相振動子モデルを適用するのは、数学的な観点からは妥当であることがわかる [18]。

実際に、本研究で行った外力が正弦波である場合を考えてみる。このとき、対応する式は第3章の式(3.6)であり、これは

$$\frac{d(n\varphi)}{dt} = -(\Omega_0 - n\omega_0) + 2n|Z_n||P_1| \cos(n\varphi + \angle Z_n - \angle P_1) \quad (3.6)$$

$$\iff \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \frac{\Delta_n}{2n} \cos(n\theta - \Omega_0 t + \angle Z_n - \angle P_1) \quad (6.1)$$

のように変形できる。ただし、 $\theta = \Omega_0 t/n + \varphi$ を用いた。ここで、本研究において、 $\omega_0 \gg \Delta_n$ であることが観測されている（表2.2参照）。すなわち、「右辺第1項に比べて右辺第2項が小さい」と言えるのである。

一方で、位相感受関数の推定過程においては、速い振動であることはネガティブにはたらく。実は、第4章のパルス外力によって測定されたデータは、トライアンドエラーによって得られている。これは、パイプ音の振動が速く、所望の位相において加振することが非常に困難であったためである。概日リズムのような遅い振動では、ある位相（朝や夜など）を狙って光パルス外力を与えることが可能であるが、音現象では、音圧の高いときに加振するといったことはほぼ不可能である。また、データ処理時における周期変動の検出には、sinc関数での補間を行った。これも音振動がとても速く、44100 Hz という比較的高いサンプリング周波数でも小さな周期変動を観測しきれないため、これをとらえるために施した処置である。以上の問題や手間を回避するために、本研究ではノイズでの計測を採用し、可算回数を多く稼ぐことによる解決法を試みたのだが、信頼性の高い推定結果を得られずに終わった。

以上より、位相振動子モデルは、音現象のような速い振動に対してその説明力は高いが、「パルスやノイズを使って簡単に位相感受関数を推定する」といったような工学的な応用を考えるには、現段階では課題が残ることがわかった。

6.3 おわりに

本研究では、オルガンパイプが示す数ある音響現象の中から周波数引き込み現象に焦点を当てた。これにより、パイプをブラックボックスとみなすことができ、位相振動子でのモデル化が可能となった。しかし、これを言い換えれば、パイプ内部での詳細な物理メカニズムを無視したことになる。音響学の最終的な目標は、パイプ内部において、どのような物理現象が起こっているかを解明することだと筆者は考える。本研究を通じて、周波数引き込み現象とパイプ内の共鳴を関連付けられたことは、一つの足掛かりになったであろう。これが今後の音響学発展へ寄与することを願い、本論文を締めくくることとする。

謝辞

本研究は、著者が九州大学大学院芸術工学府の修士課程、博士後期課程在学中に行ったものです。

本研究を進めるにあたり、ご多忙の中にもかかわらず、頻繁に御指導、御助言を賜りました鏑木時彦教授に心より御礼申し上げます。また、ご専門である非線形動力学の観点からの確なアドバイスをくださいました、立命館大学理工学部の徳田功教授にも厚く感謝致します。加えて、九州大学大学院芸術工学研究院の鮫島俊哉准教授と伊藤浩史准教授には、本論文の副査を快く引き受けいただき、専門的な観点から非常に有益な御指摘や御助言をいただきました。深く感謝致します。

そして、本研究を始めるにあたり、快くオルガンパイプを譲ってくださいました、須藤オルガン工房主宰の須藤宏さんに感謝申し上げます。

最後に、本研究を遂行するにあたって、お世話になったすべての方々にこの場を借りて厚く御礼申し上げます。

付録A パワー変動データに対するフィッティングの方法

この付録では、第3章で使用した最小二乗法によるフィッティングについて説明する。まず、式(3.15)と式(3.16)より

$$\frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \cos \psi_n + \sqrt{1 - \left[\frac{2(\Omega_0 - n\omega_0)}{\Delta_n} \right]^2} \sin \psi_n = \frac{E - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 - 2|P_1|^2}{4|A_n||P_1|} \quad (\text{A.1})$$

と書くことができる。さらに、これを次のように記述しておく。

$$f(\Omega_0) u_n + \sqrt{1 - f(\Omega_0)^2} v_n = e \quad \text{such that } u_n^2 + v_n^2 = 1 \quad (\text{A.2})$$

今、 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ に対し、 e_1, e_2, \dots, e_L だけデータが存在したとする。このとき、上式の関係は行列を用いて

$$\mathcal{M}\mathbf{w}_n = \mathbf{e} \quad \text{such that } \mathbf{w}_n^T \mathbf{w}_n = 1 \quad (\text{A.3})$$

のように表現できる。ただし、

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} f(\Omega_1) & \sqrt{1 - f(\Omega_1)^2} \\ f(\Omega_2) & \sqrt{1 - f(\Omega_2)^2} \\ \vdots & \vdots \\ f(\Omega_L) & \sqrt{1 - f(\Omega_L)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_L \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

である。

さて、ここからは \mathbf{w}_n の推定を考える。そのために、次式に示される二乗誤差関数を設定する。

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_n, \lambda) &= (\mathbf{e} - \mathcal{M}\mathbf{w}_n)^T (\mathbf{e} - \mathcal{M}\mathbf{w}_n) + \lambda (\mathbf{w}_n^T \mathbf{w}_n - 1) \\ &= \mathbf{w}_n^T (\lambda I + \mathcal{M}^T \mathcal{M}) \mathbf{w}_n - 2\mathbf{w}_n^T \mathcal{M}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

なお, λ はラグランジュの未定乗数である [26]. $\partial J/\partial \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$ より

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_n &= (\lambda I + \mathcal{M}^T \mathcal{M})^{-1} \mathcal{M}^T \mathbf{e} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda + m_{11} & m_{\text{sym}} \\ m_{\text{sym}} & \lambda + m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \mathcal{M}^T \mathbf{e} \\
&= \frac{1}{(\lambda + m_{11})(\lambda + m_{22}) - m_{\text{sym}}^2} \begin{bmatrix} \lambda + m_{22} & -m_{\text{sym}} \\ -m_{\text{sym}} & \lambda + m_{11} \end{bmatrix} \mathcal{M}^T \mathbf{e} \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + (m_{11} + m_{22})\lambda + m_{11}m_{22} - m_{\text{sym}}^2} \left(\lambda I + \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{\text{sym}} \\ -m_{\text{sym}} & m_{11} \end{bmatrix} \right) \mathcal{M}^T \mathbf{e} \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + L\lambda + \det(\mathcal{A})} (\lambda I + \mathcal{A}) \mathcal{M}^T \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

となる (I は単位行列). ここで, 束縛条件 $\mathbf{w}_n^T \mathbf{w}_n = 1$ を用いることで

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^T \mathcal{M} (\lambda I + \mathcal{A})^2 \mathcal{M}^T \mathbf{e} &= [\lambda^2 + L\lambda + \det(\mathcal{A})]^2 \\
\iff \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2L, \quad a_2 = L^2 + 2\det(\mathcal{A}) - \mathbf{e}^T \mathcal{M} \mathcal{M}^T \mathbf{e}, \\
a_1 &= 2[L\det(\mathcal{A}) - \mathbf{e}^T \mathcal{M} \mathcal{A} \mathcal{M}^T \mathbf{e}], \quad a_0 = [\det(\mathcal{A})]^2 - \mathbf{e}^T \mathcal{M} \mathcal{A}^2 \mathcal{M}^T \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

という関係が導ける. 式 (A.7) は必ず 2 つ以上の実解を持つ. なぜなら,

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \\
&= [\lambda^2 + (m_{11} + m_{22})\lambda + \det(\mathcal{A})]^2 - \mathbf{e}^T \mathcal{M} (\lambda I + \mathcal{A})^2 \mathcal{M}^T \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

のように 4 次関数 $F(\lambda)$ を定義すれば

$$F(-\alpha_j) = -(\mathcal{M}^T \mathbf{e})^T (-\alpha_j I + \mathcal{A})^2 \mathcal{M}^T \mathbf{e} < 0 \quad \text{and} \quad F(\infty) > 0 \quad \text{and} \quad F(-\infty) > 0 \tag{A.10}$$

となるためである. ここで, α_j は 2 次対称行列 \mathcal{A} の固有値である ($j = 1, 2$) .

式 (A.7) の実解のうち, 二乗誤差関数 J を最小にするものを λ_{opt} とすれば, 求めたい \mathbf{w}_n は

$$\mathbf{w}_n^{\text{opt}} = (\lambda_{\text{opt}} I + \mathcal{M}^T \mathcal{M})^{-1} \mathcal{M}^T \mathbf{e} \tag{A.11}$$

となる. そして, 本来推定したいパラメータである ψ_n は, $\mathbf{w}_n^{\text{opt}} = [u_n^{\text{opt}} \ v_n^{\text{opt}}]^T = [\cos \psi_n \ \sin \psi_n]^T$ より

$$\psi_n = \tan^{-1} \frac{v_n^{\text{opt}}}{u_n^{\text{opt}}} \tag{A.12}$$

で得られる。

第3章では、周波数引き込み時のパワー変動のデータから、引き込み幅に対応する箇所 ($\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ と対応する e_1, e_2, \dots, e_L) を抜き出し、以上で述べた理論に基づいてフィッティングを行った。ただし、推定の正確性確保のため、パイプ音の自然な周波数の n 倍（式(A.1)中の $n\omega_0$ ）は、 $(\max_l\{\Omega_l\} + \min_l\{\Omega_l\})/2$ として計算した。

付録B 位相振動子モデルによる共鳴管の効果に関する考察

付録として、第3章で考察した共鳴管の影響について、位相振動子モデルを用いて考えておく。

外力が共鳴管を通じてジェットを内外から加振する場合、位相振動子モデルは次のように表されると考えられる。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \tilde{Z}(\theta)[u_{\text{ext}}(t) + u_{\text{int}}(t)] \quad (\text{B.1})$$

ただし、 $\tilde{Z}(\theta)$ はジェットが示すであろう位相感受関数、 u_{ext} や u_{int} はそれぞれジェットに外側／内側からはたらく外力である。なお、外力の次元は、空気の流れ（流量）であるジェットに作用する粒子速度としている。

今、外力が正弦的（基本角周波数 Ω_0 ）で、かつその波面が平面である場合、 $y_0 = 1/(\rho_0 c)$ を空気の特性アドミッタンス (ρ_0 : 空気の密度、 c : 空気中での音速)、 $y(\Omega_0) = v(\Omega_0)/S$ を共鳴管の入力アドミッタンス $v(\Omega_0)$ (ジェット側から見たパイプのアドミッタンス) を共鳴管の断面積 S で割ったもの、 p_{ext} と p_{int} をそれぞれ u_{ext} 、 u_{int} に対応する音圧とすれば、上式は

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \tilde{Z}(\theta) \left[y_0 p_{\text{ext}}(t) + |y(\Omega_0)| p_{\text{int}} \left(t + \frac{\angle y(\Omega_0)}{\Omega_0} \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

と書ける。さらに、外力の周波数 Ω_0 がパイプ音の第 n 次倍音の周波数に近いとき（すなわち、 $\Omega_0 \approx n\omega_0$ ），共鳴管内の定在波（第 n 次共鳴）の位相関係から $p_{\text{int}}(t) \propto (-1)^n p_{\text{ext}}(t)$ という関係があると考えられ、このとき、 v を比例定数とすれば

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \tilde{Z}(\theta) \left[y_0 p(t) + v(-1)^n |y(n\omega_0)| p \left(t + \frac{\angle y(n\omega_0)}{\Omega_0} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

となる（図3.6参照）。ここで、表記の単純化のため、下添え字の ext は外した。そして、

$p(t) = 2|P_1| \cos(\Omega_0 t + \angle P_1) = |P_1| \exp[i(\Omega_0 t + \angle P_1)] + |P_1| \exp[-i(\Omega_0 t + \angle P_1)]$ より, $\Gamma_{1,n}(\varphi)$ は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,n}(\varphi) &= |P_1| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{Z}\left(\frac{\Omega_0}{n}s + \varphi\right) \left[y_0 e^{i(\Omega_0 s + \angle P_1)} + y_0 e^{-i(\Omega_0 s + \angle P_1)} \right. \\
&\quad \left. + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{i(\Omega_0 s + \angle P_1)} + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{-i(\Omega_0 s + \angle P_1)} \right] ds \\
&= |P_1| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{Z}_k| e^{i(k\varphi + \angle \tilde{Z}_k)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y_0 e^{i\angle P_1} e^{i(k+n)\frac{\Omega_0}{n}s} + y_0 e^{-i\angle P_1} e^{i(k-n)\frac{\Omega_0}{n}s} \right. \\
&\quad \left. + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{i\angle P_1} e^{i(k+n)\frac{\Omega_0}{n}s} + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{-i\angle P_1} e^{i(k-n)\frac{\Omega_0}{n}s} \right] ds \\
&= |P_1| |\tilde{Z}_n| e^{-i(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n)} \left[y_0 e^{i\angle P_1} + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{i\angle P_1} \right] \\
&\quad + |P_1| |\tilde{Z}_n| e^{i(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n)} \left[y_0 e^{-i\angle P_1} + \nu(-1)^n y(n\omega_0) e^{-i\angle P_1} \right] \\
&= 2 |\tilde{Z}_n| |P_1| \operatorname{Re} \left[\{y_0 + \nu(-1)^n y^*(n\omega_0)\} e^{i(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1)} \right]
\end{aligned} \tag{B.4}$$

と書くことができる。

さて、ここからの議論を簡単にするため、共鳴管の入力アドミッタンス $y(\Omega_0)$ は正の実数とする。すなわち、 $y(\Omega_0)$ はコンダクタンス（抵抗の逆数）を意味し、 $\Gamma_{1,n}(\varphi)$ は

$$\Gamma_{1,n}(\varphi) \approx 2[y_0 + \nu(-1)^n y(n\omega_0)] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1) \tag{3.5'}$$

となる。さらに、以下の 4 つの場合にわけて考える（ここで、 $y_0 > 0$ であることに注意されたい）。

- $0 \leq \nu y(n\omega_0) \leq y_0$ の場合

$$\Gamma_{1,n}(\varphi) \approx 2[y_0 + \nu(-1)^n y(n\omega_0)] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1) \tag{B.5}$$

- $y_0 < \nu y(n\omega_0)$ の場合

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,n}(\varphi) &\approx 2(-1)^n [(-1)^n y_0 + \nu y(n\omega_0)] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1) \\
&= 2[\nu y(n\omega_0) + (-1)^n y_0] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1 + n\pi)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

- $-y_0 \leq \nu y(n\omega_0) < 0$ の場合

$$\Gamma_{1,n}(\varphi) \approx 2[y_0 - |\nu|(-1)^n y(n\omega_0)] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1) \tag{B.7}$$

- $\nu y(n\omega_0) < -y_0$ の場合

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,n}(\varphi) &\approx 2(-1)^{n+1} [(-1)^{n+1} y_0 + |\nu| y(n\omega_0)] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos(n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1) \\
&= 2[|\nu| y(n\omega_0) - (-1)^n y_0] |\tilde{Z}_n| |P_1| \cos[n\varphi + \angle \tilde{Z}_n - \angle P_1 + (n+1)\pi]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

したがって、式(3.5)と比較することで

$$|Z_k| = \begin{cases} |y_0 + \nu(-1)^k y(k\omega_0)| |\tilde{Z}_k| & \text{for } 0 \leq \nu \\ |y_0 - |\nu|(-1)^k y(k\omega_0)| |\tilde{Z}_k| & \text{for } \nu < 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\angle Z_k = \begin{cases} \angle \tilde{Z}_k & \text{for } -y_0 \leq \nu y(k\omega_0) \leq y_0 \\ \angle \tilde{Z}_k + k\pi & \text{for } y_0 < \nu y(k\omega_0) \\ \angle \tilde{Z}_k + (k+1)\pi & \text{for } \nu y(k\omega_0) < -y_0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

と書ける。以上より、 $0 < \nu$ であれば、 $|y_0 + \nu(-1)^k y(k\omega_0)|$ の効果だけ、 $|Z_k|$ は奇数次よりも偶数次の方が大きい傾向にあると言える。なお、 $\nu < 0$ のとき、この大小関係は逆転する。

加えて、第2章において、周波数比1:4の引き込み現象の程度が小さかったのは、パイプの入力アドミタンスの大きさ $|y(\Omega_0)|$ の値が小さいことが原因だと考えられる。多くの場合、共鳴管の入力アドミッタンスのピーク周波数は正確に整数倍とはならず、実際に発音されるパイプ音の第n倍音の周波数と入力アドミッタンスの第nピークの周波数とには乖離が生じる。そのため、パイプ音の第4倍音の周波数を持つ（すなわち、 $\Omega_0 \approx 4\omega_0$ である）外力によってパイプを外から駆動しても、その周波数に対応するパイプの入力アドミッタンス $(|y(4\omega_0)|)$ が小さく、ジェットを効率よく加振できなかつたと推測される。

付録C パルス外力を用いた位相感受関数の推定における誤差の検討

ここでは、次に示すファンデルポール振動子 [3] を用いて、外力パルスにオーバーシュートが付随している場合の位相感受関数の測定精度に関する数値シミュレーションを示す。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ \mu(1-x^2)v - \omega^2 x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

ここで、数値解法には4次のルンゲクッタ法を用いた。なお、離散幅は $\Delta t = 1/(2f_s) \approx 1.13 \times 10^{-5}$ とした ($f_s = 44100$ Hz は音響測定でのサンプリング周波数)。また、パラメータには $\mu = 10000$, $\omega/(2\pi) = 1600$ を選んだ。このとき、自然な周波数は $\omega_0/(2\pi) \approx 1510$ Hz となつた。加えて、随伴法 [6] によって計算した $p_x(t)$ に対する位相感受関数 $Z_x(\theta)$ は図 C.1 のようになつた。

まず、理想的なパルスとして、 $p_x(t) = 10000 \sin[200000(t-t_l)]/[200000(t-t_l)]$ を選び、シミュレーションを行つた (t_l はパルス加振のタイミングを表す)。その後、パルス外力を実際の音響測定で用いたものに変更してシミュレーションした。双方のパルスの概形は図 C.2 に示している。シミュレーション後、最小二乗法により位相感受関数を推定した ($L = 30$, $K = 12$)。この結果を図 C.3 と図 C.4 に示す。なお、変動周期検知におけるヒルベルト変換については、第 4 章と同じく、(ア) $0 \sim 2\pi$, (イ) $\pi/2 \sim 5\pi/2$, (ウ) $\pi \sim 3\pi$, (エ) $3\pi/2 \sim 7\pi/2$ の 4 条件に関して検討を行つた。

図 C.3 と図 C.4 によれば、外力パルスが理想的であろうとなからうと、(ア) ~ (エ) すべての条件において、振幅が最大となるフーリエ次数については正しく推定できている。しかし、第 1 ~ 3 次を用いて再構成した位相感受関数そのものは、パルスにオーバーシュートが付随している場合には、正確に推定できていないことがわかる（図 C.1 参照）。すなわち、パルスの時間分解能が位相感受関数の推定において大きな誤差要因になっていることが結論付けられる。

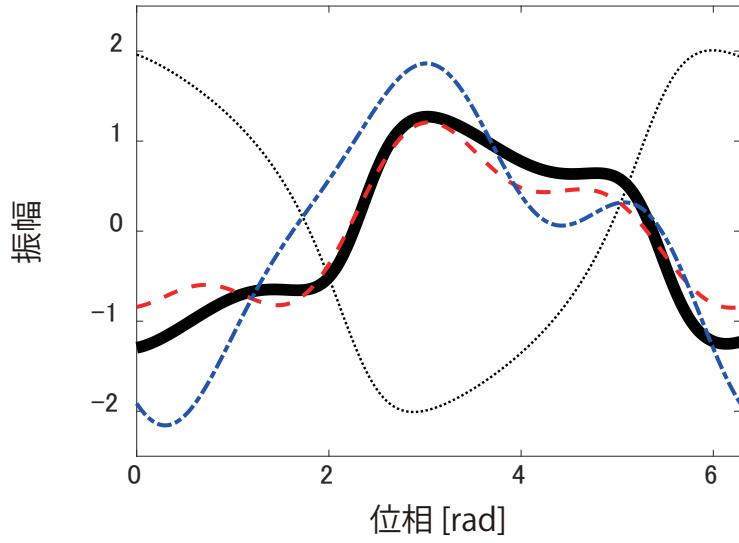


図 C.1: 随伴法 [6] によって計算されたファンデルポール振動子の位相感受関数 $Z_x(\theta)$ (太線) . なお, 参考のために振動波形 $x(t)$ を点線で示している. また, 図 C.3 と図 C.4 の条件 (ア) の結果を, それぞれ赤の破線と青の一点鎖線で併せて載せている.

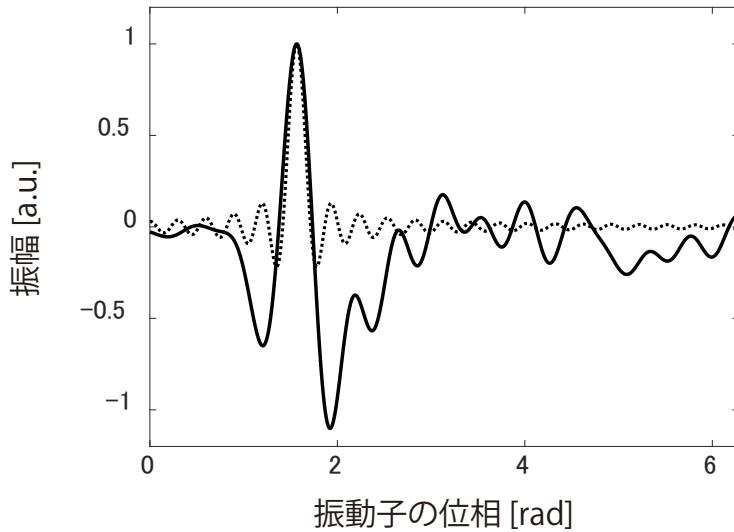


図 C.2: 理想的なパルス (点線) と現実のスピーカから出力されたパルス (実線) の概形. 図に示したのはファンデルポール振動子の $\pi/2$ のタイミングに与えられたものである. なお, 2つのパルスはそれぞれ最大値で基準化している.

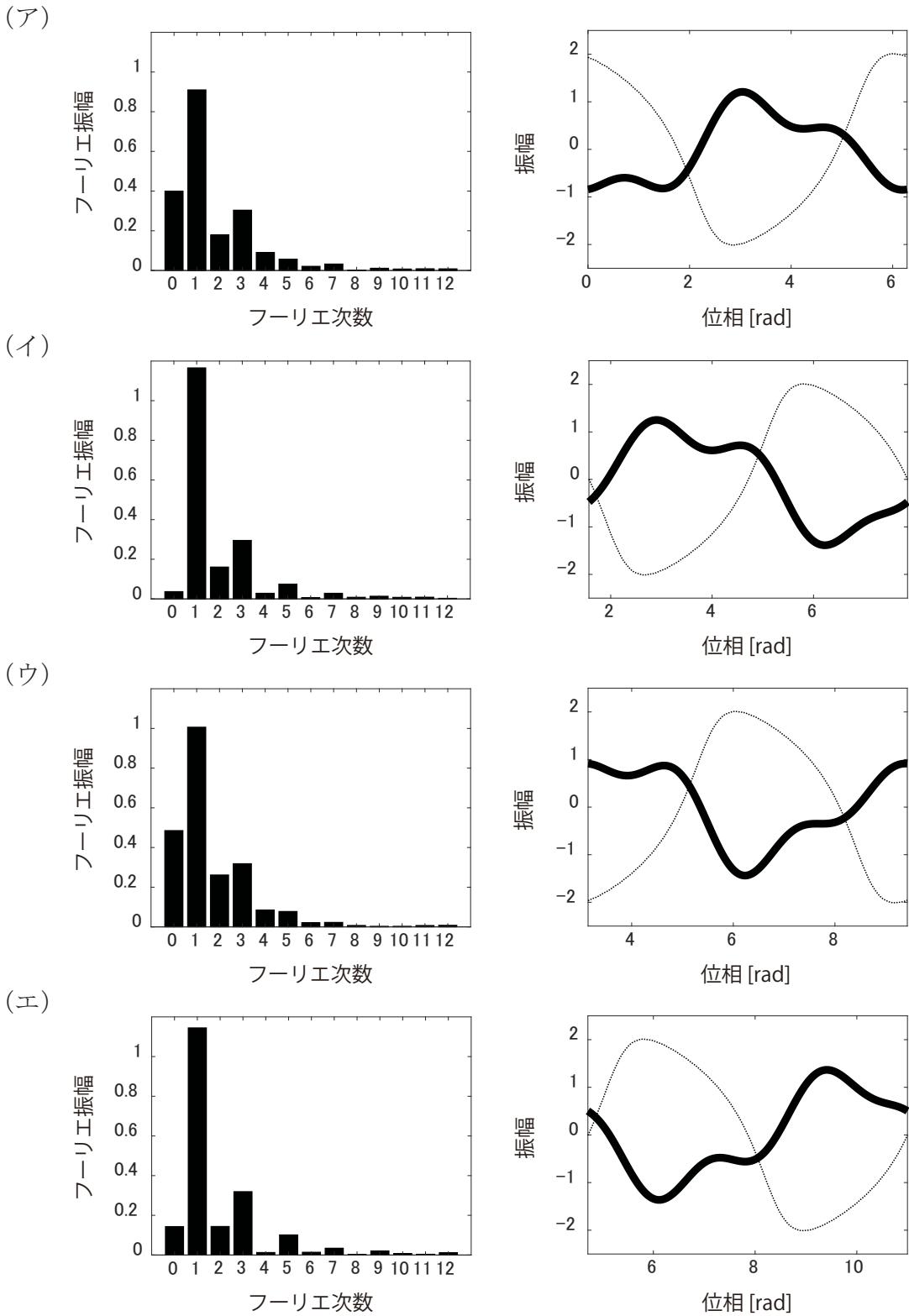


図 C.3: 理想的なパルスで加振した場合のシミュレーション結果。左図は推定されたフーリエ振幅、右図は第 1 ~ 3 次のフーリエ係数を用いて構成した位相感受関数（太線）である。（ア）～（エ）は閉じ込める 2π の区間に関する条件を表している。なお、参考のために振動波形 $x(t)$ を点線で示している。

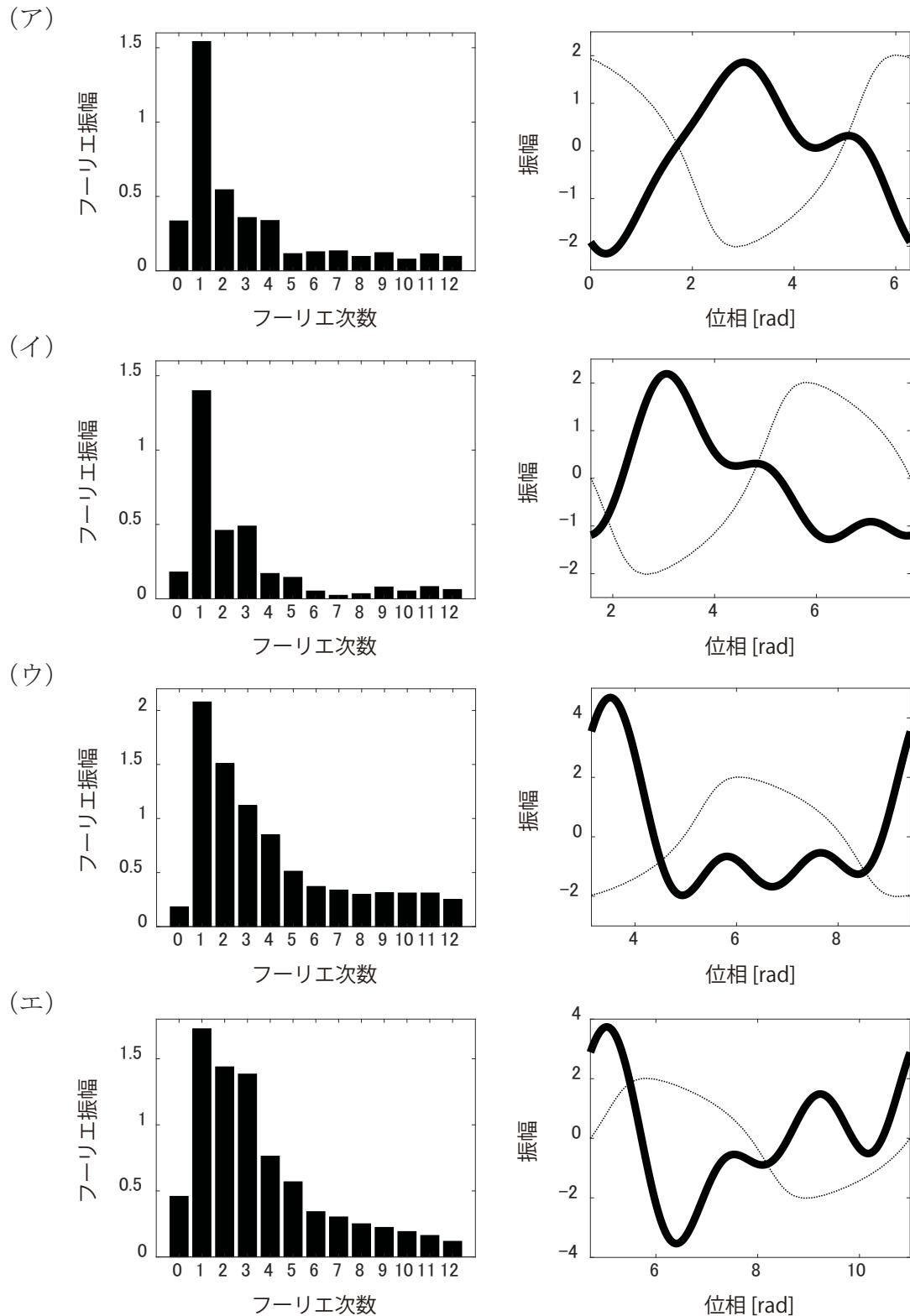


図 C.4: 現実のスピーカから出力されたパルスを用いた場合のシミュレーション結果. 図の配置や記号等は図 C.3 と同じである.

参考文献

本文中で引用したもの

- [1] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, 2nd ed. (Springer, New York, 1998).
- [2] B. Fabre and A. Hirschberg, “Physical modeling of flue instruments: A review of lumped models,” *Acust. Acta Acust.* **86**, 599–610 (2000).
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Westview Press, Cambridge, 2000).
- [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, New York, 2003).
- [5] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Dover Publications, New York, 2003).
- [6] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich, *Weakly Connected Neural Networks* (Springer, New York, 1997).
- [7] A. T. Winfree, “Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators,” *J. Theoret. Biol.* **16**, 15–42 (1967).
- [8] K. Ota, T. Omori, S. Watanabe, H. Miyakawa, M. Okada, and T. Aonishi, “Measurement of infinitesimal phase response curves from noisy real neurons,” *Phys. Rev. E* **84**, 041902 (2011).
- [9] G. B. Ermentrout, R. F. Galán, and N. N. Urban, “Relating neural dynamics to neural coding,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 248103 (2007).
- [10] J. W. Coltman, “Jet drive mechanisms in edge tones and organ pipes,” *J. Acoust. Soc. Am.* **60**, 725–733 (1976).

- [11] K. Takahashi, S. Iwagami, T. Kobayashi, and T. Takami, “Theoretical estimation of the acoustic energy generation and absorption caused by jet oscillation,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **85**, 044402 (2016).
- [12] J. Rayleigh, *The Theory of Sound, Vol. II* (Dover Publications, New York, 1945).
- [13] M. Abel, S. Bergweiler, and R. Gerhard-Multhaupt, “Synchronization of organ pipes: Experimental observations and modeling,” *J. Acoust. Soc. Am.* **119**, 2467–2475 (2006).
- [14] M. Abel, K. Ahnert, and S. Bergweiler, “Synchronization of sound sources,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 114301 (2009).
- [15] J. L. Fischer, R. Bader, and M. Abel, “Aeroacoustical coupling and synchronization of organ pipes,” *J. Acoust. Soc. Am.* **140**, 2344–2351 (2016).
- [16] J. Sawicki, M. Abel, and E. Schöll, “Synchronization of organ pipes,” *Eur. Phys. J. B* **91**, 24 (2018).
- [17] G. B. Ermentrout, “ $n : m$ phase-locking of weakly coupled oscillators,” *J. Math. Biology* **12**, 327–342 (1981).
- [18] K. A. Blaha, A. Pikovsky, M. Rosenblum, M. T. Clark, C. G. Rusin, and J. L. Hudson, “Reconstruction of two-dimensional phase dynamics from experiments on coupled oscillators,” *Phys. Rev. E* **84**, 046201 (2011).
- [19] 菊地, 宮崎, 田中, “引き込みのロバスト性による位相応答曲線の推定手法の提案,” *信学技報 NLP2008-16*, 43–48 (2008).
- [20] 吉川, 西山, 田中, “ノイズ環境下での周波数引き込みによる位相応答曲線の推定,” *信学技報 NLP2012-148*, 25–26 (2013).
- [21] S. Hong, Q. Robberechts, and E. De Schutter, “Efficient estimation of phase-response curves via compressive sensing,” *J. Neurophysiol.* **108**, 2069–2081 (2012).
- [22] R. F. Galán, G. B. Ermentrout, and N. N. Urban, “Efficient estimation of phase-resetting curves in real neurons and its significance for neural-network modeling,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 158101 (2005).
- [23] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing* (Prentice Hall, New Jersey, 1989).

- [24] T. A. Saifee, M. J. Edwards, P. Kassavetis, and T. Gilbertson, “Estimation of the phase response curve from Parkinsonian tremor,” *J. Neurophysiol.* **115**, 310–323 (2016).
- [25] I. Tokuda and A. Kuwahara, “Synchronization analysis of choir singing,” *Nonlinear Theory Its Appl., IEICE* **3**, 215–221 (2012).
- [26] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning* (Springer, New York, 2006).
- [27] K. Ota, M. Nomura, and T. Aoyagi, “Weighted spike-triggered average of a fluctuating stimulus yielding the phase response curve,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 024101 (2009).
- [28] T. Imai and T. Aoyagi, “Improvement effect of measuring phase response curves by using multicycle data,” *Nonlinear Theory Its Appl., IEICE* **7**, 58–65 (2016).
- [29] T. Imai, K. Ota, and T. Aoyagi, “Robust measurements of phase response curves realized via multicycle weighted spike-triggered averages,” *J. Phy. Soc. Jpn.* **86**, 024009 (2017).
- [30] 西口磯春 編著, 音響サイエンスシリーズ9 ピアノの音響学 (コロナ社, 東京, 2014).
- [31] U. Abraham, A. E. Granada, P. O. Westermark, M. Heine, A. Kramer, and H. Herzel, “Coupling governs entrainment range of circadian clocks,” *Mol. Syst. Biol.* **6**, 438 (2010).
- [32] T. Harada, H. Tanaka, M. J. Hankins, and I. Z. Kiss, “Optimal waveform for the entrainment of a weakly forced oscillator,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 088301 (2010).
- [33] H. Tanaka, “Optimal entrainment with smooth, pulse, and square signals in weakly forced nonlinear oscillators,” *Physica D* **288**, 1–22 (2014).

その他参考にしたもの

- [34] M. Abel and S. Bergweiler, “Synchronization of higher harmonics in coupled organ pipes,” *Int. J. Bifurcation Chaos* **17**, 3483–3491 (2007).
- [35] I. Aihara and K. Tsumoto, “Nonlinear dynamics and bifurcations of a coupled oscillator model for calling behavior of Japanese tree frogs (*Hyla japonica*),” *Math. Biosci.* **214**, 6–10 (2008).
- [36] I. Aihara, R. Takeda, T. Mizumoto, T. Otsuka, T. Takahashi, H. G. Okuno, and K. Aihara, “Complex and transitive synchronization in a frustrated system of calling frogs,” *Phys. Rev. E* **83**, 031913 (2011).

- [37] T. Funato, Y. Yamamoto, S. Aoi, T. Imai, T. Aoyagi, N. Tomita, and K. Tsuchiya, “Evaluation of the phase-dependent rhythm control of human walking using phase response curves,” PLoS Comput. Biol. **12**, e1004950 (2016).
- [38] J. A. Goldberg, J. F. Atherton, and D. J. Surmeier, “Spectral reconstruction of phase response curves reveals the synchronization properties of mouse globus pallidus neurons,” J. Neurophysiol. **110**, 2497–2506 (2013).
- [39] Y. Hasegawa and M. Arita, “Circadian clocks optimally adapt to sunlight for reliable synchronization,” J. R. Soc. Interface **11**, 20131018 (2014).
- [40] I. Z. Kiss, Y. Zhai, and J. L. Hudson, “Predicting mutual entrainment of oscillators with experiment-based phase models,” Phys. Rev. Lett. **94**, 248301 (2005).
- [41] K. Morinaga, R. Miyata, and T. Aonishi, “Optimal colored noise for estimating phase response curves,” J. Phy. Soc. Jpn. **84**, 094801 (2015).
- [42] B. Torben-Nielsen, M. Uusisaari, and K. M. Stiefel, “A comparison of methods to determine neuronal phase-response curves,” Front. Neuroinform. **4**, 6 (2010).
- [43] K. Ota, T. Omori, H. Miyakawa, M. Okada, and T. Aonishi, “Higher-order spike triggered analysis of neural oscillators,” PLoS ONE **7**, e50232 (2012).
- [44] A. J. Preyer and R. J. Butera, “Neuronal oscillators in *Aplysia californica* that demonstrate weak coupling *in vitro*,” Phys. Rev. Lett. **95**, 138103 (2005).
- [45] H. Tanaka, “Synchronization limit of weakly forced nonlinear oscillators,” J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 402002 (2014).
- [46] H. Tanaka, I. Nishikawa, J. Kurths, Y. Chen, and I. Z. Kiss, “Optimal synchronization of oscillatory chemical reactions with complex pulse, square, and smooth waveforms signals maximizes Tsallis entropy,” Europhys. Lett. **111**, 50007 (2015).
- [47] A. Zlotnik, Y. Chen, I. Z. Kiss, H. Tanaka, and Jr-Shin Li, “Optimal waveform for fast entrainment of weakly forced nonlinear oscillators,” Phys. Rev. Lett. **111**, 024102 (2013).