

GENERATING MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES BY TORSION ELEMENTS

吉原, 和也

<https://hdl.handle.net/2324/2236045>

出版情報 : Kyushu University, 2018, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	吉原 和也
論 文 名	GENERATING MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES BY TORSION ELEMENTS (捻れ元による曲面の写像類群の生成)
論文調査委員	主 査 九州大学 教授 佐伯 修 副 査 九州大学 教授 岩瀬 則夫 副 査 九州大学 准教授 高田 敏恵 副 査 岡山大学 准教授 門田 直之

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

曲面の同相写像のイソトピー類全体は、写像の合成を自然な積として群をなす。写像類群はこのように定義こそ単純であるが、トポロジーのみならず、リーマン面のモジュライ空間の理論など、数学の広い分野に関わる非常に重要な研究対象である。特に最近では、4次元可微分多様体の重要なクラスとして、曲面をファイバーとして持つ曲面上のレフシェッツ束が注目を浴びているが、こうした束の構造は、モノドロミー表現を通して、底空間の基本群からファイバーの写像類群への表現で決定されることが知られている。さらに、切断を持つレフシェッツ束に対しては、点付き曲面の写像類群への表現が重要な役割を果たす。こうして、点付き曲面の写像類群の研究も重要と考えられ、多くの研究がこれまでに行われている。

たとえば通常の向き付け可能な閉曲面の写像類群は、その曲面の基本群の外部自己同型群と同型になることが Dehn, Nielsen, Baer により古くから知られているが、その生成元と関係式を具体的に求めることは難しく、20世紀半ば頃から多くの研究が行われている。特に、デーツイストでの生成についてかなりのことがわかっている。ここで、デーツイストは一般に無限位数の元となることに注意する。一方、写像類群には有限位数の元が多く含まれている。これは、曲面や点付き曲面の対称性に由来するものである。そこで、有限位数の元だけで写像類群が生成されるか、生成されるとすれば有限個で生成されるか、その場合、最低で何個の有限位数元で生成されるか、などが自然に問題となる。このような問題は写像類群のみならず広範囲にわたり（特に有限群に対して）研究されてきた。そして、写像類群に対するこの問題に関しては、本学位論文の序章でも触れられているように、これまで多くの結果が知られている。その顕著な応用として、たとえば Maclachlan (1971)や Patterson (1979)は、写像類群が有限位数の元で生成されることを示すことにより、リーマン面のモジュライ空間が位相空間として単連結であることを示している。向き付け可能閉曲面の写像類群がいくつの有限位数元で生成されるかという問題について、最近では、たとえば Monden (2011)は、種数が3以上の場合、写像類群が位数3の元3つで生成されること、位数4の元4つでも生成されること、を示している。さらに Lanier (2018)は、曲面をユークリッド空間に埋め込んでそこでの対称性を用いることで、与えられた自然数 $k \geq 6$ に対して、位数 k の元有限個による写像類群の生成を研究し、その際に必要な個数の上からの評価を与えた。なお、種数1以上の向き付け可能閉曲面の写像類群はすべて、位数2, 3, 4, 6の元を持つことが知られていることに注意する。

そうした状況の中、本学位論文ではまず、向き付け可能な（点付きでない）閉曲面の写像類群について、種数が7以上であれば位数6の元3個で生成され、種数が5や6のときは位数6の元4個

で生成されることを示している。この結果は多くの場合、上で言及した Lanier の結果に含まれるが、いくつかの種数の場合に、生成に必要な元の個数の新しい上からの評価を与えている。証明は、まず閉曲面を巧妙に分割し、それぞれの成分で位数 6 の回転で与えられるものとして位数 6 の写像類を作り、それにより、写像類群を生成するデーンツイストに対応する単純閉曲線を都合の良い位置に移動するという、かなり技術的に複雑な手法により行われている。アイデアは単純であるものの、これを実際に実現する位数 6 の元を構成することはかなりの困難が伴うが、それを実行した本学位論文の結果は高く評価できる。

次に本学位論文では向き付け不可能な点付き曲面の写像類群について調べている。点付きでない場合は、Szepietowski (2013) が、種数が 4 以上であれば 4 つの対合 (位数 2 の元) で生成されることを示しているが、点付きの場合には同様の結果は知られていなかった。そこで本学位論文では点付きの場合を考え、当該写像類群が、曲面の (向き付け不可能) 種数が 13 以上であれば 8 個の対合で生成され、種数が 14 以上であれば 11 個の対合で生成されることを示した。向き付け不可能な場合には、デーンツイストだけではなく、Y 同相写像も考えなければならないが、これらを巧妙な方法で対合の積で書くことにより証明が行われている。さらに点も動かさなければならないため、これに適合した移動を行う対合も、ユークリッド空間の鏡映をうまく用いて構成している。これは、該当の写像類群が、ある種のコクセター群の商群となることが系としてわかるなど、今後の向き付け不可能点付き曲面の写像類群の研究に影響を与える、意味のある結果であり、高く評価できる。

以上のことから、本研究者は博士 (数理学) の学位を受ける資格があるものと認める。