GENERATING MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES BY TORSION ELEMENTS

吉原, 和也

https://hdl.handle.net/2324/2236045

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学），課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：吉原和也

論 文 名　：GENERATING MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES BY TORSION ELEMENTS
（捻れ元による曲面の写像類群の生成）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では曲面の写像類群の有限生成系、特に有限位数の元有限個による生成について考察した。

$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$を、種数$g$、$n$個の点付き有向閉曲面の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類のなす群、$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$を、種数g、n個の点付き非有向閉曲面の微分同相写像のアイソトピー類のなす群とし、どちらも写像類群とよぶ。

古典的な群論において、与えられた群に対して、生成系、あるいは有限位数の元のみからなる生成系を具体的に与える問題がある。写像類群に関しても古くからこの問題についての結果がある。

有向閉曲面の場合、写像類群の生成系を求める研究は Dehn (1938)から始まった。彼は$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$が Dehn twists と呼ばれる写像類により生成されることを示した。そして Humphries (1977)は、$g \geq 3$に対して$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$が$2g+1$個の Dehn twists により生成されることを示した。さらに彼はこれが Dehn twists のみで生成する際の最小個数であることも示した。有限位数の元からなる$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$の生成系についての結果はいくつかある。Luo (2000)は$g \geq 3$、$n=0,1$について$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$が involutions（位数 2 の元）で生成されることを示したが、生成元の個数は種数に依存する。彼は、gやnに依存しない$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$を生成するために必要な有限位数の元の個数の普遍的な上界が存在するか？という問題を提起した。$n=0,1$については Brendle-Farb (2004)が、一般のnについては Kassabov (2003)が、それぞれ肯定的な解答を与えた。Lanier (2018)は$k \geq 6$、$g \geq (k-1)^2+1$について、$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$が位数$k$の元3つで生成されることを示している。また、彼は$k \geq 8$または$k=6$の時に、非負整数$a,b$について$g=ak+b(k-1)>0$を満たすならば位数$k$の元3つ、$g=ak+1$ $(a \geq 1)$を満たすならば位数kの元4つで$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$が生成されることを示した。本論文の最初の主結果は、位数6の元のみからなる$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$の生成系を新しく構成し、彼の結果を$k=6$に限定した時に$g=7,8,9,13,14,19$について改善したことである

定理 1.　$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,0})$は、$g \geq 7$のとき位数6の元3つ、$g=5,6$のとき位数6の元4つにより生成される。

Lanier は$k=6$に限定した場合、種数5,6の閉曲面の$\mathbb{R}^3$での$\pi/3$回転を考え、この回転の軸に沿って連結和をいくつも取ることで位数6の元を構成している。これにより種数に条件が付いている。一方、我々の定理 1 では6個穴あき球面の$\pi/3$回転を構成の基本に考えている。Humphries の生成元の Dehn twists に対応する単純閉曲線たちを含む単純閉曲線で曲面を切り開く。この時、切り取った曲面が6個穴あき球面の和集合になるように切り取る。切り取った6個穴あき球面と残りの曲面で、境界上で一致するように$\pi/3$回転をそれぞれ行い、対応する境界どうしで再度はり合わせることで位数6の元を構成する。残りの曲面が穴あき球面にならない場合は、対応する境界の部分だけを$\pi/3$

回転させ、それ以外の部分は回転させないようにする。これにより、余分な twist を生じるが、chain relation を用いることでキャンセルする。この構成には$g \geq 5$の時、位数6の元をどの種数でも構成できるメリットがある。

次に、非有向閉曲面の写像類群について考える。Lickorish (1963)により$\mathrm{Mod}(N_{g,0})$が Dehn twists のみでは生成できないこと、Dehn twists と Y-同相写像類と呼ばれる写像類により生成されることが示された。Szepietowski (2013)はg個の Dehn twists と1つの Y-同相写像類からなる$\mathrm{Mod}(N_{g,0})$の生成系を発見した。さらに Hirose (2018)はこの生成系が Dehn twists と Y-同相写像類からなる生成系で最小であることを示した。Involutions による$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の生成系は Szepietowski (2004)により与えられた。彼は$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$が involutions により生成できることを示したが、この生成元の個数は種数と点の個数に依存する。そこで、非有向曲面版の Luo の問題が考えられる。すなわち、involutions のみからなる生成系で生成元の個数がgやnに依存しないようなものが構成できるかという問題である。$n=0$の場合、Szepietowski (2006)は$\mathrm{Mod}(N_{g,0})$が4つの involutions で生成できることを示し、肯定的な解答を与えた。$n \neq 0$の場合には、この問題に対する解答は知られていなかった。これに対して、本論文で次の結果を得た。

定理 2. 任意の$n \geq 0$に対し、$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$は、gが奇数かつ$g \geq 13$の時8個、gが偶数かつ$g \geq 14$の時11個の involutions により生成される。

証明のアイデアは以下の通りである。まず、純写像類群と呼ばれる、n個の点を pointwise に止める微分同相写像類からなる$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の部分群に対する Korkmaz (2002)の生成系を考える。この生成系は Dehn twists と Y-同相写像類、puncture slides と呼ばれる写像類からなる。この生成系の中の Dehn twist と puncture slide それぞれ1つと Y-同相写像類を$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の involutions の積で書き表す。これらの involutions はn個の点を setwise に止めるもので、各点は動かすかもしれない。次にこの Dehn twist と puncture slide に対応する単純閉曲線をそれぞれ他の生成元である Dehn twists と puncture slides に対応する単純閉曲線に写すような involutions を構成する。これにより、構成した involutions で生成される部分群Gが純写像類群を含むことが分かる。$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$のn個の点への作用により n次対称群への全射準同型写像が定まるが、Gへの制限がn次対称群への全射になるように注意して上の構成を行う。この時、Gが$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$に一致することが分かる。

点付き非有向閉曲面の写像類群の可換化は、種数が7以上の場合には位数2の巡回群3つの直和に同型となることが知られている。これと本論文の結果を合わせると、$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$を生成するために必要な involutions の最小個数は、gが奇数の時は3以上8以下、gが偶数の時は3以上11以下であることが分かるが、この個数を決定することは今後の課題である。また$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の表示は Szepietowski、Omori などによりいくつか与えられているが、ある位数のみの生成元を持つ表示は知られていない。定理 2 はこのような表示を得るためのアプローチの1つと考えられる。さらに、定理2の系として、8 個もしくは 9 個の生成元を持つ Coxeter 群から$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$への全射準同型写像を構成できる。この核が有限生成であれば involutions のみを生成元にもつような$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の表示を得ることができる。この全射準同型の核を調べることが今後の課題である。

定理 2 の系として、Dehn twist や Y-同相写像類、puncture slide が2つの involutions の積になることが分かる。一般に$\mathrm{Mod}(N_{g,n})$の任意の元を involutions の積で書いた時の個数がある整数C以下になるような、gやnに依存しないCは存在するかという問題が考えられるが、これは未解決である。本論文の手法を拡張することで、この問題に対する解答が得られることも期待される。