九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

# Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms

松坂, 俊輝

https://hdl.handle.net/2324/2236044

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

（様式６－２）

| 氏　　名 | 松坂 俊輝 | | | |
|---|---|---|---|---|
| 論 文 名 | Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms（多重調和弱マース形式のフーリエ係数） | | | |
| 論文調査委員 | 主　査 | 九州大学 | 教授 | 金子昌信 |
| | 副　査 | 九州大学 | 准教授 | 権寧魯 |
| | 副　査 | 九州大学 | 准教授 | 樋上和弘 |
| | 副　査 | 徳島大学 | 准教授 | 水野義紀 |

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は，古典的な(弱)正則モジュラー形式の一つの一般化として知られる，調和マース形式と呼ばれる対象を，最大限に一般化した「多重調和弱マース形式」という対象を導入し，その種々の性質を調べるものである．

マース形式とは，複素上半平面上における正則性の代わりに，双曲ラプラシアンの固有関数となることを課すことにより定義される関数であり，特に固有値が 0 のものを調和マース形式と呼ぶ．2002 年の Zwegers の 研究などによって，長年謎に包まれていた Ramanujan の「モックテータ関数」が重さ 1/2 の調和マース形式の正則部分として実現されることが明らかになり，今日ではより一般の重さの調和マース形式の正則部分に現れる関数のことをモックモジュラー形式と呼ぶ．

また，実解析的アイゼンシュタイン級数 $E(z,s)$ を $s=1$ のまわりでローラン展開したときの定数項は， Kronecker の第一極限公式として具体的に与えられるが，その高次の展開係数についてはあまり多くのことは知られていなかったところ，2016 年に Lagarias と Rhoades は，この高次展開係数が双曲ラプラシアンの複数回の作用で消えることに着目し，そのような関数を多重調和マース形式と呼んで，そのいくつかの基本的な性質を調べた．特に上記の Kronecker 極限公式に現れる関数は重さ 0，深さ 3/2 の多重調和マース形式の一例を与えている．

本研究ではこれらを全て統合するような「多重調和弱マース形式」と呼ばれるべき対象を定義し，その基本的な性質を調べた．

まず第一に， Lagarias らの結果の拡張・補完するものとして，モジュラー群 $SL_2(Z)$ に関する多重調和弱マース形式のなす複素数体上のベクトル空間の基底を明示的に与えることに成功した．これは，Lagarias らが用いたアイゼンシュタイン級数の代わりに，マース・ポアンカレ級数という関数を用いることで構成することが可能となった．またこれまでは扱われていなかった，半整数重さの場合についても考察をして同様の結果を得ていることも特筆すべき点である．特にこの基底は $\xi$ 作用素に関する，ある微分関係式を満たすことも示されており，これは Lagarias らの与えた，いわゆるランプ関係式の拡張となっている．この部分の研究が，この理論の基礎を与えるものと言える．

そして第二に，多重調和弱マース形式の正則部分，つまりはモックモジュラー形式のある種の一般化を定式化し，そのフーリエ係数を考察した．これについては，Zagier (2002) および Duke-Imamoglu-Toth (2011) に続くいくつかの先行研究により，整数重さ 2k の調和マース形式に対し CM 値（但し $k \leqq 0$ のとき）およびサイクル積分（但し $k \geqq 0$ のとき）のある種の平均(トレース）を適切に定義するとき，その母関数が（本論文の言葉で）半整数重さ k+1/2 または

3/2-k，深さ 3/2 の多重調和弱マース形式の正則部分に現れることが知られていた．本研究では Duke らの手法を拡張することにより，一般に k の符号によらず，任意の整数重さ 2k，深さ r の多重調和弱マース形式に対し，その CM 値およびサイクル積分のトレースを定義し，上記の Zagier および Duke-Imamoglu-Toth の結果の類似が同様に成り立つことを明らかにした．さらに先の $\xi$-微分関係式を用いることで，その非正則部分についても明示的な表示を与えている．また系として，Kronecker の極限公式のトレースについて古典的に知られているいくつかの結果に対し，多重調和弱マース形式の枠組みで自然な別証明を与えている．

これまでの研究の流れを見ると，本論文で行われた種々の一般化は自然なものと見られるが，実際の計算の遂行にはかなりの解析的な技量と知識が要求され，容易ではない．しかも得られた結果の完成度は高く，今後の研究の基礎となる非常に重要なものである．この分野のここ 20 年来の発展は目覚ましく，かなり競争的な分野であると言えるが，その中で，本論文の前半部は Ramanujan Journal に，後半部は Research in Number Theory にと，いずれも水準の高い英文学術雑誌に既に掲載されている．

以上により，本論文の研究結果は整数論，とくにモジュラー形式や調和マース形式の分野において非常に価値あるすぐれた業績と認められる．よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格が十分にあるものと認める．