Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms

松坂, 俊輝

https://hdl.handle.net/2324/2236044

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：松坂 俊輝

論 文 名　：Fourier coefficients of polyharmonic weak Maass forms
（多重調和弱マース形式のフーリエ係数）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

古典的な(弱)正則モジュラー形式の一つの一般化としてマース形式と呼ばれる対象がある．これは上半平面上における正則性の代わりに，双曲ラプラシアンの固有関数となることを課すことで定義される関数であり，特に固有値が 0 のものは調和マース形式と呼ばれる．2002 年以降の Zwegers らの研究によって，Ramanujan のモックテータ関数が重さ 1/2 の調和マース形式の正則部分として実現されることが明らかになり，今日ではより一般に調和マース形式の正則部分のことをモックモジュラー形式と呼ぶ.

一方で実解析的アイゼンシュタイン級数 E(z,s)について，s=1 まわりのローラン展開の定数項は Kronecker の第一極限公式において与えられるが，その高次係数についてはあまり多くのことは知られていない．2016 年 Lagarias と Rhoades は，この高次係数が双曲ラプラシアンの複数回の作用で消えることに着目し，これを多重調和マース形式と呼び，いくつかの基本的な性質を調べている．特に上記の極限公式は重さ 0，深さ 3/2 の多重調和マース形式の一例を与える．

本研究ではこれらを全て統合する「多重調和弱マース形式」と呼ぶべき対象を導入し，その種々の性質を調べた．第一に Lagarias らの結果の拡張・補完として，SL_2(Z)に関する多重調和弱マース形式のなす C 上ベクトル空間の基底を明示的に与えた．これはアイゼンシュタイン級数の代わりにマース・ポアンカレ級数を用いることで構成することが可能となる．また半整数重さの場合についても同様の結果を得ることができた．特にこの基底はξ作用素に関する，ある微分関係式を満たすこともわかった．これは Lagarias らの与えたランプ関係式と呼ばれる多重調和マース形式の満たす微分関係式の拡張となっている．

第二に多重調和弱マース形式の正則部分，つまりはモックモジュラー形式のある種の一般化を定式化し，そのフーリエ係数を考察した．Zagier（2002）および Duke-Imamoglu-Tóth（2011）に続くいくつかの先行研究により，整数重さ 2k の調和マース形式に対し CM 値（但し k≦0 のとき）およびサイクル積分（但し k≧0 のとき）のある種の平均（トレース）を適切に定義するとき，その母関数が半整数重さ k+1/2 または 3/2-k，深さ 3/2 以下の多重調和弱マース形式の正則部分に現れることが知られている．本研究では Duke らの手法を拡張することで，k の符号によらず任意の整数重さ 2k，深さ r の多重調和弱マース形式に対し，その CM 値およびサイクル積分のトレースを定義し，上記の結果が同様に成り立つことを明らかにした．さらに先のξ-微分関係式を用いることで，この非正則部分についても明示的な表示を与えることができた．また系として，Kronecker の

極限公式のトレースについて古典的に知られているいくつかの結果に対し，多重調和弱マース形式の枠組みで自然な別証明を与えることができた．

本論文は四つの章からなる．第一章で研究の動機および主結果を述べる．第二章は特殊関数やマース・ポアンカレ級数など，基本事項についてまとめている．第三章において，第一の主結果である多重調和弱マース形式の構成を行う．そして第四章では，適切にトレースを定義したのち，第二の主結果であるトレースの母関数についての定理の証明を与える．