On the asymptotic behavior and regularity estimates for patial differential equations with conservation laws

中村, 謙太

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：中 村 謙 太

論 文 名　：On the asymptotic behavior and regularity estimates for partial differential equations with conservation laws
(保存則を持つ偏微分方程式の漸近挙動と正則性評価について)

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では保存則をもつ偏微分方程式の漸近解析および正則性評価に関して，第 I 部ではある緩和的双曲系に対する全空間および半空間における希薄波の漸近安定性を，第 II 部では幾何学的二重非線形方程式に対する時間局所解の存在および正則性評価に関する考察を行った．

第 I 部では気体分子運動のモデルとなる緩和的保存則の単独方程式に Cattaneo 則を連立させた緩和的双曲系の初期値境界値問題を全空間または半空間上で考察し，初期値の空間無限遠における定数状態への収束を仮定した際の，時間大域解の存在および希薄波への漸近安定性を証明した．ここで希薄波とは，波が引き伸ばされて生じる連続であるが微分可能でない非線形波であり，特に Riemann 問題と呼ばれる初期値が原点で枝分かれするような初期値問題の連続な弱解（Riemann 解）により特徴付けられる．また漸近安定性とは，初期摂動が十分小さい場合に解の長時間挙動が定数状態に近づくことを意味する．時間大域解の存在と漸近安定性は，漸近形の近似解の構成，およびその近似解の小近傍における解の先験的評価を導出し，その小近傍において時間大域解の存在およびその漸近形への収束を得ることで証明される．希薄波の漸近安定性は古くから研究されており，Il'in-Oleinik (1960) による Riemann 解に対応した粘性保存則の解の漸近挙動に関する研究を発端に，その後 Harabetian (1988)，服部-西原（1991）によって希薄波への漸近率が研究された．また松村-西原によって 1 次元圧縮性粘性流の Barotropic モデルに対する希薄波の漸近安定性が示されている．また，Liu-Matsumura-Nishihara (1998), Nakamura (2003)により半空間における希薄波への漸近安定性および漸近率が示されている．第 I 部の構成は以下の通りである．第 2 章においては，対象とする方程式系における希薄波の漸近安定性を数学的に定式化し，主定理を述べる．第 3 章以降は主に第 2 章で述べた主定理の証明を行う．第 3 章では非粘性 Burgers 方程式の解を用いた近似解の構成を行う．従来の松村-西原の方法に従い，滑らかな近似解を非粘性 Burgers 方程式の解で近似することで構成し，その近似解に対する L^p (1≦p≦□評価を与えた．第 4 章では希薄波の滑らかな近似の摂動項に対する方程式の導出，およびその時間大域解の存在を証明した．第 5, 6 章では，摂動項に対する非線形問題に対して L^2 エネルギー法を用いて解の先験的評価を示した．Appendix では証明中に用いた基本的事項と粘性 Burgers 方程式の解を用いた近似解の L^p (1≦p≦□評価の証明を与えた．

第 II 部では古典的山辺流を含む p-Sobolev 流とよばれる幾何学的二重非線形方程式の初期値境界値問題に対して，時間局所解の存在および種々の正則性評価を与える．一般に滑らかな n (≧3)次

元コンパクト Riemann 多様体上の時間変化する Riemann 計量に対して多様体の体積が 1 のもとで，その Riemann 計量が誘導するスカラー曲率の満たす時間発展方程式の初期値問題のことを山辺流という．山辺流はリッチ流，平均曲率流と並んで幾何学的に重要な時間発展方程式の一つである．山辺流は 1989 年に Hamilton によって所謂「山辺の問題」の一連の研究中に導入されたものである．山辺流を特徴付けるものとして，山辺定数がある．山辺定数は解析的な情報と幾何的な情報を関係付ける役割を担い，特に，関数空間 W^{1,2}から L^{2n/(n-2)}への Sobolev 埋め込み不等式の最良定数に密接に関係している．スカラー曲率正の場合に Ye（1994）が時間大域解の存在を，Schwetlick-Struwe (2003) がスカラー曲率正および次元と山辺定数について適切な条件のもと，時間無限大での山辺流の解に対してその同伴する Riemann 計量が定スカラー曲率になることを示した．これは山辺の問題の解を構成することに相当する．本研究では，一連の先行結果の幾何的条件に含まれていない曲率零の Euclid 空間内の有界領域上において, 凸性などの幾何学的条件を一切仮定せずに, 主要項をより非線形性の高い p-Laplacian に置き換えた山辺流を含む p-Sobolev 流および p-Sobolev 流型二重非線形方程式の時間局所解の存在と種々の正則性評価を，初期値の属する関数空間を設定することにより与えた．また解析的な観点から見ると p-Sobolev 流および p-Sobolev 流型二重非線形方程式は速い拡散方程式を表している．
拡散方程式は主に DiBenedetto, Gianazza, Vespri による時間発展 p-Laplacian 型，Caffarelli, Friedman, Vazquez による porus medium 型，Trudinger による同次系非線形方程式型などに代表されるが，冪が非同次である p-Sobolev 流および p-Sobolev 流型二重非線形方程式はこれらの方程式のいずれにも含まれておらず，解析的な側面から見てもその解の構造を研究することは大いに意味がある. 第 II 部の構成は以下の通りである. まず第 8 章では初期値の属する関数空間が W^{1,p} かつ L^{□}の場合に p-Sobolev 流のある種のエネルギークラスにおける時間局所解の存在を示した. これは時間微分項を後ろ向き差分に置き換えることで同方程式を楕円型方程式に帰着させ，Galerkin 法と冪特有の性質を反映させた Monotone 法を用いて近似解を構成し, 近似解の収束を得ることで証明される．第 9 章以降では様々な正則性評価を従来の関数解析的な手法に加えて，変分的方法および De Giorgi-Giaquinta-Giusti によって確立された非線形楕円型・放物型方程式における正則性理論を用いることにより証明した．具体的には，第 9 章では p-Sobolev 流型二重非線形方程式とよばれる低階項付きの二重非線形方程式に対する解の先験的評価を与える．特に解の非負値性，有界性そして比較定理を確立する．第 10 章では解の正値性の伝播を，考える領域が球，凸，非凸の 3 つの場合に分けてそれぞれ導出することに成功した. 特に非凸の場合には, Harnack chain と呼ばれるある種の被覆議論を駆使することにより証明を与えた．第 11 章では解の有限時間消滅性を第 8 章で導出した比較原理を用いることで示した．更に p-Sobolev 流に対しては有限時間消滅が起こらないことも証明する．第 12 章では p-Sobolev 流に対して，体積保存の条件と解の正値性の伝播を組み合わせて無限時間における解の正値性の伝播を導出し，方程式を時間発展 p-Laplacian に帰着させることで解のヘルダー正則性を導出することに成功した. Appendix では本文の証明中に用いた基本的事項とエネルギー計算・近似解の構成に関する証明を与えた．