

Equilibrium and Non-Equilibrium Steady States on Boson Systems with BEC

神田, 智弘

<https://hdl.handle.net/2324/2236040>

出版情報 : Kyushu University, 2018, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	神田智弘		
論 文 名	Equilibrium and Non-Equilibrium Steady States on Boson Systems with BEC (ボーズ・アインシュタイン凝縮を伴うボゾン系の平衡状態と 非平衡定常状態)		
論文調査委員	主 査	九州大学	職名 教授 氏名 松井 卓
	副 査	九州大学	職名 教授 氏名 原 隆
	副 査	九州大学	職名 教授 氏名 廣島文生

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

この論文では、正準交換関係が定める CCR 代数(CCR = Canonical Commutation Relations)のヒルベルト空間上での表現及び数理解物理の問題を作用素環論的手法で研究するために導入された Weyl CCR 代数、一般化されたコヒーレント状態の同値性条件と因子状態への分解の研究、さらに 2000 年に David Ruelle が導入した無限量子系の非平衡定常状態におけるエントロピー生成、粒子流の研究の成果が述べられている。

一般化されたコヒーレント状態は理想ボーズ気体が低温 BEC(Bose Einstein Condensation ボーズ・アインシュタイン凝縮) を起こす際に純粋相を記述するところで登場する。理想ボーズ気体のボーズ・アインシュタイン凝縮の数学的厳密な研究は、古くは M.Kac や 1970 年代の J.Lewis と J.Pule の共同研究に坂戻れるが、近年、物性物理の発展に刺激を受けて楕型グラフや星状グラフなど無限グラフ上を動く粒子系の研究が行われるようになった。通常の 3次元空間上での BEC の場合に長距離秩序を持つ平衡状態を純粋相に対応する状態への分解は、既に知られていたが、上述のようなグラフ上の BEC を起こした状態の因子状態への分解を記述する一般的な定理がなかった。これは、退化したシンプレクティック形式に付随する CCR 代数の一般化されたコヒーレント状態の準同値性の条件を具体的に確かめる事が可能な形で表した定理がなかったためである。

この学位論文の第一部では、コヒーレント状態の準同値性の条件を与える定理を証明し、応用として、グラフ上を動く自由ボーズ粒子系が低温で BEC を起こしている場合の KMS 状態の因子状態への分解を具体的に表示した。通常のユークリッド空間上で BEC を考える場合 1 係数積分表示に分解が知られている。しかし、この学位論文の結果によれば、グラフ上のボーズ粒子系などより一般の場合には準自由状態のコヒーレント状態への分解は 2 係数積分表示になることが分かった。これまで意識されなかった新しい発見であり、グラフ上の BEC を起こしている KMS 状態に関して残っていた問題に決着をつけている事は高く評価できる。一般化されたコヒーレント状態に関する成果は Rev.Math.Phys に発表されている。

この学位論文の後半では BEC を起こしている KMS 状態を熱浴とする量子系の非平衡状態とエントロピー生成、ジョセフソン流の研究成果を述べている。

2000 年に D. Ruelle は無限自由度の量子系に対して作用素環論的な設定で非平衡定常状態の

概念を導入し、エントロピー生成の非負性を証明した。その後、V.Jacsik と C.A.Pillet がフォンノイマン代数のモジュラー理論における相対モジュラー作用素のスペクトル測度を使いエントロピー生成が表示できることを証明したが、エントロピー生成が真に正であるかどうかは、現時点で一般論はないので個々の具体例において研究されている。様々な研究者による先行研究で D.Ruelle の非平衡定常状態を使うと久保の線形応答の理論や金属中の電子のカレントに関するランダウアーの公式などを数学的に証明できることが分かり物理的な妥当性が認識されている。

これまでの研究では熱浴に対応する部分は自由フェルミ粒子系である場合が中心で、特に熱浴に対応する部分が相転移を起こして初期状態が異なった相にある時に得られる非平衡定常状態のエントロピー生成と相転移との関係の先行研究はなかった。

この学位論文では自由ボーズ粒子系が BEC を起こし $U(1)$ ゲージ対称性の自発的破れがある熱浴での非平衡定常状態の具体的な表示を散乱理論を使い求めた。その結果、このモデルではエントロピー生成は $U(1)$ ゲージ対称性を表すパラメータには依存しないことが分かった。温度、化学ポテンシャルが異なる時はエントロピー生成が真に正であることも証明できた。初期状態で熱浴の温度、化学ポテンシャルが異なる時はエントロピー生成は零であるが粒子の流れは $U(1)$ ゲージ対称性を表すパラメータの差の非自明な関数になることが分かる。複数の超電導物質をつないだ時に流れるジョセフソン流の類似の粒子の流れが起きる事がこの論文のモデルで厳密に証明された。これまでもジョセフソン流を計算する論文は多数あるが形式的（数学的には厳密ではない）摂動論に基づく結果であり、本学位論文とは別のレベルにある。非平衡定常状態に関する結果は *J.Math.Phys.* に出版された。

本論文の数学的側面で興味深い点は、主に以下の二点である。

(1) 非平衡定常状態を散乱理論で記述するためにはグラフのスペクトルの構造の理解が必要である。そこで、この学位論文では楕円グラフなどの無限グラフ上の隣接行列とその有限階摂動から定まる作用素のスペクトルの研究を行っている。技術的仮定のもとでシュレディンガー作用素における Mourre の Positive Commutator の方法を応用して特異スペクトルの非存在を証明した。

(2) フェルミ粒子の熱浴を初期状態とする非平衡定常状態の記述には標準的な L_2 空間上の散乱理論が応用できる。一方、BEC を起こした平衡状態で系の時間発展を記述するには、 L_2 空間上の散乱理論と L_1 空間上の散乱理論の両方を同時に展開する必要がある。シュレディンガー作用素あるいは隣接行列の有限階摂動が生成する 1 係数ユニタリー群の具体的な積分表示を導いた。この表示は通常の散乱理論の文献には書かれていない独自の公式である。

以上述べたように本学位論文ではシュレディンガー作用素の散乱理論、無限グラフ上の隣接行列のスペクトル理論、退化したシンプレクティック形式から定まる CCR 代数の準自由状態と一般化されたコヒーレント状態の分類という複数のテーマに関して興味深い成果を得られており成果は既に専門誌に発表されており、数理解物理の分野において独創性と価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。