Equilibrium and Non-Equilibrium Steady States on Boson Systems with BEC

神田, 智弘

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：　神田　智弘

論 文 名　：　Equilibrium and Non-Equilibrium Steady States on Boson Systems with BEC
(ボーズ・アインシュタイン凝縮を伴うボゾン系の平衡状態と非平衡定常状態)

区　　分　：　甲

論　文　内　容　の　要　旨

ボーズ・アインシュタイン凝縮の数学的な研究には長い歴史がある．実数体の場合は J. T. Lewis と J. V. Pule の論文においてボーズ・アインシュタイン凝縮(以下，BEC と略す)が起こっている場合の平衡状態は非因子的であることが示唆されている．T. Matsui の論文においてはグラフ上のランダムウォークの観点から自由ボーズ粒子の BEC を研究した．また，F. Fidaleo らはグラフの隣接行列の hidden spectrum と自由ボーズ粒子 BEC について研究を行った．彼らの研究によって，グラフ上の自由ボーズ粒子が BEC を起こす基準が得られた．しかしながら，系の平衡状態の因子性については研究が完全に終わっていない．なので，この論文の第一部において，自由ボーズ粒子系において BEC が起こっている平衡状態について研究し以下の結果を得た．

定理 1.　BEC が起こっている時の平衡状態は非因子的であり，起こっていないときは因子的である．

また，BEC が起こっている時の平衡状態の因子分解を書き下した．この分解では，一般化されたコヒーレント状態というものを用いている．この一般化されたコヒーレント状態についても研究し，因子性，忠実性などの必要十分条件を書き下した．

通常のコヒーレント状態というのは，ワイル CCR 環を生成するワイル作用素 W(f)と線形写像 q に対して

$$\omega\big(\mathrm{W(f)}\big) = \exp(\ -\|f\|^2 + \mathrm{i}\ \ \mathrm{Re}\ \ \mathrm{q(f)}\ \ )$$

と表される．ここで，f はヒルベルト空間の部分空間$\mathfrak{H}$の元である．状態が一般化されたコヒーレント状態であるとは$\mathfrak{H}$上の半双線形形式Sと実線形写像qに対して，

$$\omega\big(\mathrm{W(f)}\big) = \ \exp(-S(f,f)^2 + iq(f))$$

と表されることである．

第二部においては，一つの量子力学的粒子といくつかの BEC が起こっている熱浴のモデルにおける非平衡定常状態（以下では省略して NESS とかく.）について研究を行った. 熱浴は N 個存在し，実空間上，もしくはグラフ上の自由ボーズ粒子からなる．一つの量子力学的粒子の生成演算子と消滅演算子をそれぞれ$a^\dagger$とaで表し，k 番目の熱浴の生成，消滅演算子についてはそれぞれ$a_{p,k}^\dagger$と$a_{p,k}$で表すことにする．これらの演算子は以下の正準交換関係式を満たす：

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad \left[a_{p,k}, a_{q,l}^\dagger\right] = \delta_{k,l}\delta(p-q), \qquad k, l = 1, \ldots, N.$$

この系のハミルトニアン H は形式的に以下の形式で与えられているとする：

$$H = H_0 + \lambda \sum_{k=1}^{N} W_k$$

ここで，$\lambda > 0$ で

$$H_0 = \Omega a^\dagger a + \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} dp \; \frac{p^2}{2} a_{p,k}^\dagger a_{p,k}, \qquad W_k = \int_{\mathbb{R}^d} dp \; \left(\overline{g_k(p)} a^\dagger a_{p,k} + g_k(p) a a_{p,k}^\dagger\right)$$

である．グラフの場合を考えるときには，H_0やW_kの式における積分をグラフの頂点についての和に，また$|p|^2/2$を隣接行列に変更する．D. Ruelle の定義に基づき，状態が NESS であるとは状態が集合

$$\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \omega_0 \circ \alpha_t dt \,\middle|\, T > 0 \right\}$$

の弱*位相における集積点となっていることと定義する．ここで，ω_0は初期状態，α_tは熱浴同士を 1 粒子と繋いだ際のハイゼンベルグの時間発展，つまり，量子力学的可観測量Qに対して$\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{-itH}$で定義されるものである．初期状態は有限系の状態と熱浴における凝縮した状態の積状態として定義される．以上のような設定の下で，NESS の公式を得た．この公式を用いることでモデルにおけるカレント，エントロピー生成についての公式を得た．この公式より次の結果を得た．

定理 2．エントロピー生成は，いくつかの条件のもとで真に正となる．

いくつかの条件についてはここでは明示しないが，カレントの期待値が真に正，つまり流が発生していればエントロピー生成は真に正となることを示した．また，エントロピー生成の公式を用いることで Josephson カレントがエントロピー生成なしで流れ得ることも分かった．