九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Some attempts to construct geometric theories to represent and explicate physical phenomena

畠山, 優太

https://hdl.handle.net/2324/2236039

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：Public access to the fulltext file is restricted for unavoidable reason (3)

KYUSHU UNIVERSITY

（様式３）

氏　　名　：畠山優太

論 文 名　：Some attempts to construct geometric theories to represent and explicate physical phenomena
（物理現象の記述と解明に動機を得た幾何学的理論構築の試み）

区　　分　：甲

論 文 内 容 の 要 旨

物理現象は数学と密接に結びついており，物理学の理論を数式で記述することは古くから行われている．実現象の数学理論による説明付けには物理，工学，産業的な視点からも重要な意義がある．物理現象から切り離して普遍化された理論は数学の強みである一方，その抽象的な数学理論を用いて再び具体的な実現象の描写を試みる際には困難を伴うことも多い．実現象を抽象化して数学の言葉に置き換え，得られた数学的結論を描写したい物理現象に適用させることが必要となる．

数学理論を用いて物理現象の記述と解明を行うという目的のもとに，本学位論文では以下の研究成果を得た．

(1) 滑らかな曲線の曲率及び捩率の離散曲率及び離散捩率による近似：本研究では空間曲線から定義される曲率と捩率という二つの幾何学量の近似を行った．実現象を解析する場合，幾何学的に滑らかな対象であっても離散的なデータしか得ることができない．したがって，離散的な情報から対象を復元することが重要となる．この観点から，滑らかな曲線に対して，それを離散化した曲線について考えた．３次元ユークリッド空間内の滑らかな曲線の曲がり具合と捻れ具合を表す量として，曲率と捩率という関数が存在する．この二つを定めることによって滑らかな曲線の形が一意に定まる.曲率及び捩率は曲線が陽に与えられている場合のみ計算によって求めることが可能となる．そこで，曲線上の離散点のみの情報から元の曲線を決定するためには離散点から曲線の曲率と捩率を近似する量を求めることが重要となる．本学位論文では，離散化した曲率と捩率（離散曲率と離散捩率）を曲線上の離散点から定義した．曲率の離散化については元の曲率と離散曲率との離散化誤差を２通りの方法で評価した．第一の手法では曲率の二乗の積分である全平方曲率と離散曲率の二乗の積分である全平方離散曲率の差を評価し，第二の手法では曲率と離散曲率の差を L^2 ノルムを用いて評価した．曲率の近似という立場において，先行研究（[2]）では滑らかな曲線の曲率を曲線上の隣接する離散点とその曲線上の中点を通る円の曲率で近似し，元の曲線の曲率からなる全平方曲率と離散点から得た円の曲率の二乗の積分の差を隣接する離散点間の距離によって評価している．本学位論文との違いは，先行研究では曲線が陽に与えられている場合しか曲率の近似が出来ないのに対し，学位論文では曲線の表示に依らずに離散曲率の定義を与えている．捩率の離散化については，曲線の捩率と離散捩率の差を L^2 ノルムによって評価した．捩率の離散化誤差を捩率の二乗の積分である全平方離散捩率を用いて評価する研究は既に存在する．先行研究との違いは，離散化した捩率に新しく符号の定義を加えた点である．滑らかな曲線の捩率は正負両方の値を取り得る為，それを離散化した離散捩率にも符号を定義する事は自然な試みである．また，曲線の曲率と捩率の離散化に様々な方法が提案されており，統一的な方法が存在しない．本学位論文では離散化の新しい

方法を提案し，その妥当性についての評価を行なっている．

（２）螺旋状ワイヤーを張る微小液滴の幾何解析：液体に浸した非常に小さなコイル（螺旋状ワイヤー）をゆっくりと持ち上げると，コイルの内部に微小な液滴が残留する（[5]）．この液滴の表面形状を決定する数理モデルの作成を行った．物理実験の結果から，螺旋状ワイヤーを張る微小液滴の形状は液滴の体積に応じて変化する．ワイヤー内の微小液滴には表面張力のみが作用すると仮定すると，数学的には，微小液滴の表面形状は安定な平均曲率一定曲面であると解釈することができる．更に実験結果から，考察する対象を平均曲率が一定な螺旋曲面（helicoidal surface）に限定する．すなわち，常螺旋を境界とする安定な平均曲率一定螺旋曲面を求めよ，という数学的課題に解を与えたものが本学位論文である．この課題解決に応用可能な手法として，平均曲率が一定な回転面（Delaunay 曲面）の安定性についての先行研究が存在する（[4]）．本学位論文では Delaunay 曲面である nodoid の安定領域を，安定性を保ったまま変形させ，境界が螺旋状ワイヤー（常螺旋）となる為の条件を求めた．任意の平均曲率一定螺旋曲面は，局所的にはある Delaunay 曲面を等長かつその平均曲率を保つように変形することによって得られる（[1]）ことが知られており，この変形が nodoid の安定領域の安定性を保つ曲面の変形となっている．安定性を保つ根拠として，平均曲率一定曲面の面積汎関数の第二変分から得られるヤコビ作用素の固有値問題等による安定性の判定（[3]）が重要な要素となっている．安定な平均曲率一定螺旋曲面は無数に存在するが，それらは常に一つの常螺旋を境界とする訳ではない．本論文では曲面の自己交差と境界の様子を調べ，常螺旋を張る安定な平均曲率一定螺旋曲面の導出を行った．

参考文献

[1] M. do Carmo, M. Dajczer, *Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*, Tohoku Math. Journ. **34**, 425-435 (1982).

[2] K. Enomoto and M. Okura, *The total squared curvature of curves and approximation by piecewise circular curves*. Results.Math.**64** (2013), 215-218.

[3] M. Koiso, *Deformation and Stability of Surfaces with Constant Mean Curvature*, Tohoku Math. Journ.**54**, 145-159 (2002)

[4] M. Koiso, B. Palmer, *Higher Order Variations of Constant Mean Curvature Surfaces*, Calc. Var.**56**: 159, 1-28 (2017).

[5] 横浜国立大学・田中良己氏による実験(2016). 直径約 1.2mm, ピッチ約 0.8mm のコイルに残留する液滴の実験観察, personal communication.