

# Iwasawa theory for representations of knot groups

丹下, 稜斗

<https://hdl.handle.net/2324/2236035>

---

出版情報 : Kyushu University, 2018, 博士 (数理学) , 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名 : 丹下 稜斗

論 文 名 : Iwasawa theory for representations of knot groups  
(結び目群の表現に対する岩澤理論)

区 分 : 甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

本学位論文では, Galois 表現に対する一般化された岩澤理論におけるいくつかのトピックの結び目理論における類似を研究し, 数論的位相幾何学の新たな展開を試みる. 具体的な内容は, 以下の通りである.

第一章では, 代数体の  $S$ -整数環上の結び目群の既約表現に付随するねじれ Alexander 不変量に対する Fox の公式を提示する. ここで,  $S$  は代数体の有限素点の有限集合を表わしている.

古典的な場合の Fox の公式とは, 結び目理論における重要な結果の一つで, Alexander 多項式を用いて結び目上分岐した巡回被覆の 1 次ホモロジー群の位数を表す. この応用として, 位数の漸近値は Mahler 測度を用いて表わされることが示される. これは数論における岩澤漸近公式の類似であることに注意する.

近年, ねじれ Alexander 不変量とよばれる, Alexander 多項式の一般化が Lin や和田によって導入され, 結び目理論において重要な役割を担っている. その知られている結果の一つとして, ねじれ Alexander 不変量は結び目群の表現に付随する結び目補空間のねじれホモロジー群との関係がある. そこで, 第一章の目標はねじれ Alexander 不変量に対して, Fox の公式を一般化することについて考察する. 証明は初等的でイデアルのノルムなどの数論の議論を用いる. 応用としてねじれホモロジー群の位数の漸近公式も Mahler 速度を用いて表せることを示す. この漸近公式は数論における  $p$  進 Galois 表現に付随する Tate-Shafarevich 群, あるいは Selmer 群の類似になっていることに注意する.

数論	結び目理論
$p$ -イデアル類群に対する漸近公式 (岩澤類数公式)	結び目加群に対する漸近公式
Tate-Shafarevich 群・Selmer 群に対する 漸近公式	ねじれ結び目加群に対する 漸近公式

第二章では, 結び目群の  $SL_2$  表現の普遍変形に対するねじれ結び目加群について考察し, それに付随する  $L$ -関数を導入する. これは数論における Galois 表現の普遍変形に対する Selmer 群に付随する代数的  $p$  進  $L$ -関数の類似になっている.

以前から結び目理論の Alexander-Fox 理論と岩澤理論の間に非常に親密な関係があることが知られている。これら二つの理論を群の表現の変形理論の観点から見ると、abelian な変形理論である。Mazur はこれらの類似の非 abelian な場合について問題を提示した。この Mazur の観点のもとに、森下・高倉・寺嶋・植木は結び目群の  $SL_2$ -表現に付随する変形理論の基礎を構築した。本論文ではこの続きとなる研究について考察し、普遍変形に対するねじれ結び目加群に付随する L-関数を導入する。そして、Mazur によって提示された次の二つの 21 世紀の問題に関して考察する。一つ目は、ねじれ結び目加群の普遍変形環上でのねじれ性に関する問題で、この性質についてある条件のもとで示す。二つ目は、L-関数の零点と位数に関する問題で、二橋結び目の場合で具体的計算によって考察することによって肯定的な答えを初めて与える。

数論	結び目理論
Selmer 群	ねじれ結び目加群
Galois 表現の普遍変形に対する Selmer 群に付随する L-関数	結び目群の表現の普遍変形に対するねじれ結び目加群に付随する L-関数