等価線形法によるタンクモデルのパラメータ推定 : 皆福地下ダム流域への適用例

田中, 宏平
九州大学農学部排水干拓工学教室

四ヶ所, 四男美
九州大学農学部排水干拓工学教室

https://doi.org/10.15017/22309

出版情報：九州大學農學部學藝雜誌. 38 (1), pp.1-8, 1983-07. 九州大學農學部

九大農学芸誌 (Sci. Bull. Fac. Agr., Kyushu Univ.)
第38巻 第1号 1-8 (1983)

等価線形化法によるタンクモデルのパラメータ推定

―― 皆福地下ダム流域への適用例 ――

田 中 宏 平・四ケ所 四男美
九州大学農学部排水干拓工学教室

(1982年12月10日 受理)

Estimation of Parameters of Tank Model by Equivalent Gain Method

Application to Watershed of Minafuku Under Ground Dam

KOHEI TANAKA and SHIOMI SHIKASHO
Laboratory of Land-Drainage and Reclamation, Faculty of Agriculture, Kyushu University 46-05, Fukuoka 812

は じ め に

宮古島の農業開発に必要な水資源の確保のために，この島の南部の数ケ所に地下ダムを建設する構想がたてられている．地下ダムの建設は非常に恵まれた条件のもとでのみ可能といわれているが，この島の場合，試験的に施工された皆福ダムが成功したように，島全体の表層部が porous な石灰岩で覆われており，その基盤に不透水層の島尻泥岩が存在するという好条件を有している．将来，地下ダム群の開発にはかなりの期待が寄せられている．

筆者らは，さきに“宮古島の地下水予測に関するシステム理論的研究”(田中・四ケ所，1981) を発表したが，その中で地下ダムの収支モデルを設定し，その内部の状態（タンクモデルの貯留高の変化，不規則入力，および観測雑音）を知るために Bryson and Frazier (1963) が行つた non-linear smoothing の方法をこの場合の解析に適用した．その結果，今まで明らかにされなかつた地下ダムの水循環プロセスの内部構造をかなり詳細に明らかにすることが出来た．しかし，その解析の中で使用された降雨と地下水補給に関する流出モデルは2段の菅原モデルであつて，そのモデルの諸パラメータの値は地下水位と降雨量の観測データから試行錯誤的に最適値と思われるものに定めて使用した．それは，一般に水文量の観測資料には10～20％程度の誤差が含まれるといわれており，一方上記の諸パラメータを用いて行つた地下水位の推定誤差が約20％であつたことから，ほぼ満足されるモデルであると考えたからである．しかし，水文解析を行う場合，観測値に多くの雑音が含まれることから解析の結果得られる推定誤差が大きいのは当然といえるが，モデルのパラメータを推定する場合これを試行錯誤的に行うのはあまり客観的な方法とはいえない．さらに解析的な方法，例えばパウェル法，ダニエル法などの非線形モデルのパラメータ同定法があり，既にこれらの方法が実用的に使用されている（小林・丸山，1976；永井・角屋，1979）．この論文では上記の方法よりも近似的ではあるが，システム論的手法を用いてパラメータの推定を試みた．

降雨流出現象というのはもともと，非線形性をもつているので両者の間の厳密な形の動特性を示す非線形フィルタを実現させること，つまり，この場合のようにタンクモデルのパラメータを厳密に同定させることは不可能なことである．このことはシステム理論の分野で，非線形フィルタ理論は数学的に厳密なフィルタ方程式を作ることは出来ても，厳密な形の動特性をもつ非線形フィルタを作ることは不可能であるといわれていることと同一である．従つて，工学の分野では非線形フィルタに代わつて近似フィルタを作ることが行われている．そこで，この論文では，さきに用いた地下水補給モデルの未知パラメータを上述のような趣旨をもつ近似フィルタによつて推定することを試みた．

地下ダムの水収支式

宮古島の地下ダムに関する水収支を考えると，ダムへの収入は流域の降雨によつてダムに補給される水量である．一方ダムからの支出は流域表面からの蒸発散量と地下ダムからの漏水量である．以上のように考えると，それらの間の関係式は次式で示される．

$$A_0\cdot\Delta h(k)=I(k)-L(k) \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

k : time step（日）

$\Delta h(k)$: $h(k+1)-h(k)$　(mm)

h : 地下水位（mm）

$I(k)$: 地下水補給量（mm）

$L(k)$: 地下ダムからの漏水量（mm）

A_0: 換算係数

(1) の地下ダム水収支式と菅原モデルの計算式によつて上述の地下ダムの水収支モデルを非線形の状態方程式として示すと

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}(k-1)-\boldsymbol{G}\{\boldsymbol{f}_n[\boldsymbol{x}(k-1)]-\boldsymbol{r}(k)+\boldsymbol{W}(k)\} \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

のように表わされる．

また，観測系は

$$y(k)=f_i\boldsymbol{x}(k)-v(k) \quad\cdots\cdots\cdots (3)$$

のように表わされる．

ここで

タンクの貯留高

$$\boldsymbol{x}(k)=[\boldsymbol{x}_1(k),\ x_2(k)]' \quad\cdots\cdots\cdots (4)$$

流域雨量

$$\boldsymbol{r}(k)=[r_1(k),\quad 0\ ]' \quad\cdots\cdots\cdots (5)$$

不規則入力

$$\boldsymbol{W}(k)=[W_1(k),W_2(k)]' \quad\cdots\cdots\cdots (6)$$

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ はタンクモデルの変換マトリックスでこの場合，次のように示される．

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1-\beta_1 & 0\\ \beta_1(1-\beta_1) & 1-\beta_2\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots (8)$$

なお，流出関数 $\boldsymbol{f}_n[\boldsymbol{x}(k)]$ と $f_i[\boldsymbol{x}(k)]$ は

$$\boldsymbol{f}_n[\boldsymbol{x}(k)]=\begin{bmatrix}\alpha_1(x_1-AH_1)+\alpha_2(x_1-AH_2)\\ \alpha_3(x_2-AH_3)\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$f_i[\boldsymbol{x}(k)]=1.89\cdot x_2\cdot\beta_2 \quad\cdots\cdots\cdots (10)$$

また，各確率過程について，通常行われる次の諸仮定を設ける．

$$\left.\begin{aligned}&E[\boldsymbol{W}(k)]=\overline{\boldsymbol{W}(k)},\quad E[v(k)]=\overline{v(k)}\\ &E[\boldsymbol{x}(0)]=\overline{\boldsymbol{x}(0)}\quad ,\\ &E\{[\boldsymbol{x}(0)-\overline{\boldsymbol{x}(0)}][\boldsymbol{x}(0)-\overline{\boldsymbol{x}(0)}]'\}=\boldsymbol{P}\\ &E\{[\boldsymbol{W}(k)-\overline{\boldsymbol{W}(k)}][\boldsymbol{W}(k)-\overline{\boldsymbol{W}(k)}]'\}\\ &\qquad=\boldsymbol{Q}(k)\delta(k-\tau)\\ &E\{[v(k)-\overline{v(k)}][v(k)-\overline{v(k)}]\}\\ &\qquad=R(k)\delta(k-\tau)\\ &E[\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{W}(k)]=E[\boldsymbol{x}(0)v(k)]\\ &\qquad=E[\boldsymbol{W}(k)v(j)]=0\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots (11)$$

未知パラメータの推定

非線形系の動特性の推定に関する研究が既に多く発表されている（砂原，1976）．例えば，Wiener の提案した汎関数による直交展開（Volterra 級数など）を利用する方法もある．しかし，前項で述べたように，厳密な形の動特性をもつ非線形フィルタの実現は困難であるので，近似フィルタの作成が種々試みられている．それらの方法を大別すると，まず第1の方法として，非線形関数を色々の方法を用いて展開する方法である．ただ，この方法では展開の中心をどこに置くかが大きな問題として残される．次に，第2の方法としてやはり非線形関数を展開するのであるが，最初から2次確率モーメントまでを考慮して，それ以上のモーメントを無視する代わりに，この次数の確率モーメントの範囲内において最も良い展開係数を用いて近似線形化関数を見出そうとする方法がある．

椹木・片山（1967 a，b）は第2の方法によつて，非線形制御系の状態変数の推定に関して不規則入力を受ける系の解析に従来から広く用いられている等価線形化手法の概念と同じ方法をカルマン流に用いて非線形特性を線形化した近似フィルタの動特性を導いている（カルマンフィルタ理論はシステム理論とフィルタ理論を結合させたものである）．

さらに，砂原（1976）は等価線形化の手法と第1の方法に属する Taylor 級数展開における2次の項までを考慮した近似手法を比較して総合的な見地から前者が優れていることを述べている．

さて，以上のような非線形系に対する椹木らの近似手法をこの場合に適用して，(2) を書き改めると，

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & 0 \\ \beta_1(1-\beta_1) & 1-\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(x_1(k-1)-AH_1)+\alpha_2(x_1(k-1)-AH_2) \\ \alpha_3(x_2(k-1)-AH_3) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} r(k-1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1(k-1) \\ W_2(k-1) \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

(12) において $k \to k+1$ と書き改めて整理すると

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k)\{(1-\beta_1)-\alpha_1-\alpha_2\}+(\alpha_1 AH_1+\alpha_2 AH_2) \\ x_1(k)\{\beta_1(1-\beta_1)-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_1\}+x_2(k)\{(1-\beta_2)-\alpha_3\}+(\alpha_1\beta_1 AH_1+\alpha_2\beta_1 AH_2+\alpha_3 AH_3) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} r(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1(k) \\ W_2(k) \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

次に，(13) において α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 を未知パラメータとし，また，W_1, W_2 および v は互いに独立な正規性白色過程でそれらの平均値は共に零，分散はそれぞれ q_1, q_2 および $\boldsymbol{R}$ とする．

いま，$\alpha_1=x_3(k)$, $\alpha_2=x_4(k)$, $\alpha_3=x_5(k)$, $\beta_1=x_6(k)$, $\beta_2=x_7(k)$, $AH_1=x_8(k)$, $AH_2=x_9(k)$ および $AH_3=x_{10}(k)$ とおき合計8個の未知パラメータを求めることにする．従つてこの場合の状態ベクトルを

$$\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k),\ x_2(k),\ x_3(k),\ x_4(k),\ x_5(k),\ x_6(k),\ x_7(k),\ x_8(k),\ x_9(k),\ x_{10}(k)] \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

と定義する．

また，考察すべき系は

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), k)+\boldsymbol{r}(k)+\boldsymbol{W}(k) \qquad \cdots(15)$$

および

$$y(k+1)=\boldsymbol{H}(k+1)\boldsymbol{x}(k+1)+v(k+1) \qquad \cdots(16)$$

となる．

但し，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), k)=\begin{bmatrix} x_1(k)\{(1-x_6(k))-x_3(k)-x_4(k)\} +x_3(k)\cdot x_8(k)+x_4(k)\cdot x_9(k) \\ x_1(k)\{x_6(k)(1-x_6(k)) -x_3(k)x_6(k)-x_4(k)x_6(k)\} +x_2(k)\{(1-x_7(k))-x_5(k)\} +x_3(k)x_6(k)x_8(k) +x_4(k)x_6(k)x_9(k)+x_5(k)x_{10}(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \\ x_9(k) \\ x_{10}(k) \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$\boldsymbol{W}(k) = [W_1(k),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]' \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\boldsymbol{H}(k+1) = [0,\ 1.89x_7(k),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

従つて $\boldsymbol{W}$ および v の共分散行列は

$$\boldsymbol{Q}(k) = \begin{bmatrix} q & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

$$R(k) = \boldsymbol{R} \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

となる．

さて，(15) の非線形特性 $\boldsymbol{f}$ を状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k)$, および $\boldsymbol{x}(k+1)$ に関して線形化するのは次の方法による．この方法は不規則入力をうける非線形制御系の解析に従来から用いられていた等価線形化法と基本的には同一のものである．

今 $\boldsymbol{x}^*(k/k)$ を観測値 z_k が得られたときの状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k)$ の近似推定値とする．

次に等価ゲイン $\boldsymbol{F}(k)$ を用いて (15) が $\boldsymbol{x}^*(k)$ を中心にして次のように線形化されたとしよう．

$$\boldsymbol{x}(k+1) \cong \boldsymbol{F}(k)[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)] +\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k), k)+\boldsymbol{r}(k)+\boldsymbol{W}(k) \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

(15) と (22) の差を $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}(k))$ として，これの2乗推定が最小になるように $\boldsymbol{F}(k)$ を求めると

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}(k))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k),k)-\boldsymbol{F}(k)[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_1^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(k)}=-2\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]\cdot\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k/k),k)\}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$+2\boldsymbol{F}(k)\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

$$\boldsymbol{F}(k)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k),k)\}\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]^2\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

但し，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ は入力 $\boldsymbol{x}(k)$ の確率密度関数

今，$\boldsymbol{M}(k)$ は $n\times n$ の共分散行列であり (24) で定義されるものとする．

$$\boldsymbol{M}(k)=E\{[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)][\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)]'/z_k\} \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

(24) を用いて (23) を書き改めると

$$\boldsymbol{F}(k)=E\{[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*(k/k)][\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k),k)]/z_k\}\boldsymbol{M}^{-1}(k) \qquad \cdots\cdots(25)$$

で与えられる．

なお，入力 z_k が正規分布に従う場合の等価ゲイン $\boldsymbol{F}(k)$ は (23) を書きかえて，

$$\boldsymbol{F}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),k)}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

で定義されるとしてよい．

以上のようにして等価ゲイン行列が求まると，近似フィルタの構造は次の差分方程式によつて順次求められる．

$$\boldsymbol{x}^*(k+1/k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k),k)$$
$$+\boldsymbol{\Delta}(k+1)[\boldsymbol{y}(k+1)-\boldsymbol{H}(k+1)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(k/k),k+1)] \qquad \cdots\cdots(27)$$

$$\boldsymbol{\Delta}(k+1)=\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{H}'(k+1)\times[\boldsymbol{H}(k+1)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{H}'(k+1)+\boldsymbol{R}(k+1)]^{-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

また，推定誤差の共分散行列 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{P}(k+1)=\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{M}(k)\boldsymbol{F}'(k)+\boldsymbol{Q}(k) \qquad \cdots\cdots(29)$$

$$\boldsymbol{M}(k+1)=\boldsymbol{P}(k+1)-\boldsymbol{\Delta}(k+1)\boldsymbol{H}(k+1)\boldsymbol{P}(k+1) \qquad \cdots\cdots\cdots(30)$$

で与えられる．

さて，本題に戻つて，(17) の非線形特性を等価ゲインを用いて線形化するわけであるがタンクモデルの場合，タンクの中の貯留高の状態によつて非線形特性が色々と変化する．この場合，2段のタンクを使用しているが，貯留高の状態によつて6種類の非線形特性を示すことが考えられる．今，その非線形特性 $\boldsymbol{f}$ を線形化した場合の一般的な等価ゲイン行列を示すと次のようになる．この場合にも (17) の各条件の取り扱いが同様に適用される．

$$\boldsymbol{fF}(k)=\begin{bmatrix}
1-x_6^*-x_3^*-x_4^* & 0 & -x_1^*+x_8^* & -x_1^*+x_9^* & 0 & -x_1^* & 0 & x_3^* & x_4^* & 0\\
\begin{matrix}x_6^*-x_6^{*2}-M_{66}\\-x_3^*x_6^*-M_{36}\\-x_4^*x_6^*-M_{46}\end{matrix} & \begin{matrix}1-x_7^*\\-x_5^*\end{matrix} & \begin{matrix}-x_1^*x_6^*\\-M_{16}\\+x_6^*x_8^*\\+M_{68}\end{matrix} & \begin{matrix}-x_1^*x_6^*\\-M_{16}\\+x_6^*x_9^*\\+M_{69}\end{matrix} & \begin{matrix}-x_2^*\\+x_{10}^*\end{matrix} & \begin{matrix}x_1-2x_1^*x_6^*-M_{14}\\+M_{38}-2M_{16}-x_1^*x_3^*\\+x_3^*x_8^*+M_{49}-M_{13}\\-x_1^*x_4^*+x_4^*x_9^*\end{matrix} & -x_2^* & \begin{matrix}x_3^*x_6^*\\+M_{36}\end{matrix} & \begin{matrix}x_4^*x_6^*\\+M_{46}\end{matrix} & x_5^*\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(31)$$

地下ダム水収支モデルのパラメータ推定

前項で述べた近似手法を用いて，宮古島の皆福ダムの地下水収支を示す2段タンクモデル (**Fig.** 1) のパラメータ推定を次のように行った．使用した降雨量および地下水位の観測値は昭和54年3月12日から同年6月30日までのもので，沖縄開発庁八重山宮古総合農業開発調査事務所で測定された資料である (**Fig.** 2, **Table** 1).

この場合の状態ベクトルは

$$\boldsymbol{x}(k)=[x_1(k)\quad x_2(k)\quad x_3(k)\quad x_4(k)\quad x_5(k)\quad x_6(k)\quad x_7(k)\quad x_8(k)\quad x_9(k)\quad x_{10}(k)]' \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

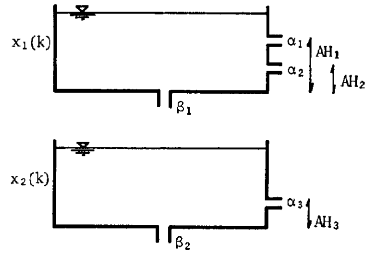

Fig. 1. Tank model for water balance in the ground water dam.

また，考察すべき系は (15), (16) の両式からなり，$y(k+1)$ が地下水位の観測値（日変動量）を示す．なお，(15) の非線形特性 $\boldsymbol{f}$ の具体的な値は (17) によって示されている．2段タンクの貯留高の状態によっ

Table 1. Monthly mean evapotranspiration

Month	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ET (mm/day)	1.5	1.3	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	5.0	4.0	3.0	2.5	2.0

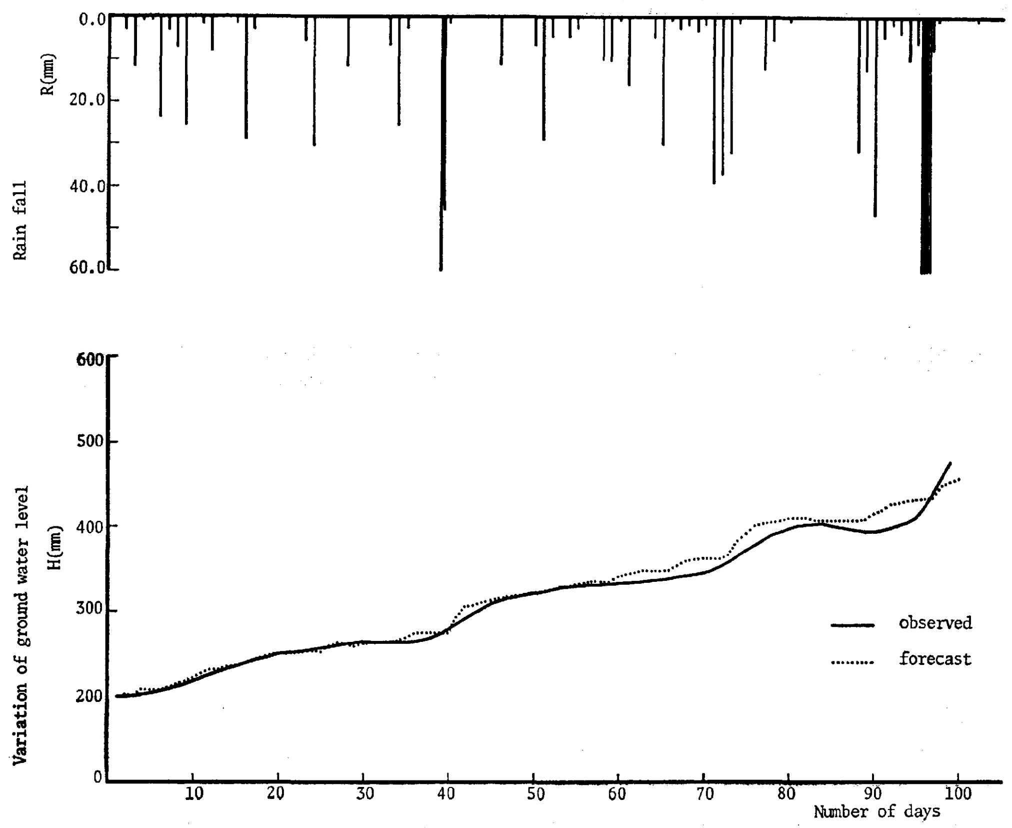

Fig. 2. Observed rainfall and variation of ground water level.

て (17) の値は 6 種類に変化し，これに伴つて等価ゲイン値も変わる．$\boldsymbol{W}(k)$ と $\boldsymbol{H}(k+1)$ の値は (18), (19) で表わされる．従つて共分散行列は (20), (21) となる．ここで行つた計算では $q=0.1$, $R=0.1$ を与えている．初期条件として

$$\boldsymbol{x}^*(0/0)=[10.0\quad 50.0\quad 0.01\quad 0.01\quad 0.001\quad 0.2\quad 0.2\quad 35.0\quad 6.0\quad 5.0]'$$

$$\boldsymbol{M}(0)=\begin{bmatrix} 1.0 & & & & & & & & & \\ & 10.0 & & & & & & & & \\ & & 0.001 & & & & & 0 & & \\ & & & 0.001 & & & & & & \\ & & & & 0.001 & & & & & \\ & & & & & 0.01 & & & & \\ & & & & & & 0.01 & & & \\ & & 0 & & & & & 1.0 & & \\ & & & & & & & & 1.0 & \\ & & & & & & & & & 100.0 \end{bmatrix}$$

計算の結果を示すと，Fig. 3 は推定値 $x_1^*(k/k)$, $x_2^*(k/k)$ の値を示している．Fig. 4, Fig. 5 は未知パラメータ $x_3(k)$, $x_4(k)$, $x_5(k)$, $x_6(k)$, $x_7(k)$, $x_8(k)$, $x_9(k)$, $x_{10}(k)$ の値が k の増大につれて収束する様子を示している．その中で $x_3(k)$, $x_4(k)$, $x_5(k)$ は 2 段タンクから側方に流出する流出孔の大きさを示しているが，この試験地のような石灰岩の風化土壌ではほとんど表面流出や中間流出が生じないことから，これら 3 者の値はいずれも零に近い値を示している．そして，2 段タンクのそれぞれから真下に流下する流出孔の大きさは k の増大するにつれてある一定の収束値を示している．

また，Fig. 6 は推定誤差の共分散 $\boldsymbol{M}_{ii}(k)$ ($i=1,10$) の変化の様子を示している．

結　　　言

先年，宮古島において施工された試験地下ダム（皆福ダム）が期待通り完成し，地下水位の上昇を見ることができた．この論文では降雨→地下水→地下ダム貯留といつた一連の地下水収支モデルを非線形のタンクモデルを用いてシステム論的に表現した．そして，そこで使用される 2 段タンクの未知パラメータを推定する問題を扱つた．解析の方法としては雑音下における非線形制御系のパラメータの推定問題を考え，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k)$ の事後確率密度関数が正規性であるという仮定のもとに等価線形化手法の概念を適用して非線形特性を線形化し，カルマン流の状態変数の推定問題

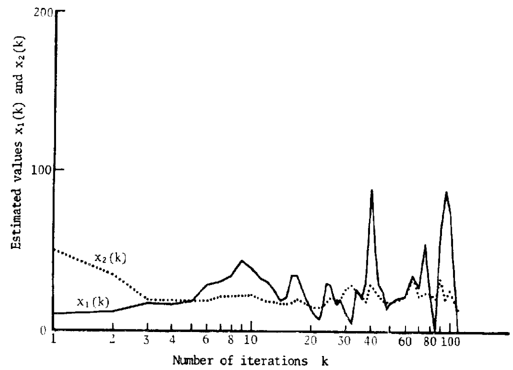

Fig. 3. Variation of estimated values of state variable $x_1(k)$ and $x_2(k)$.

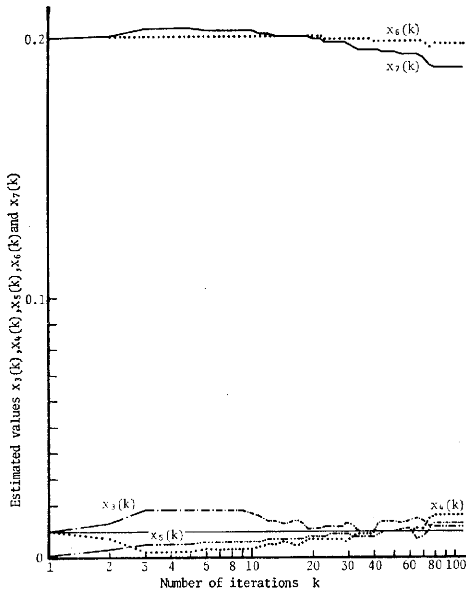

Fig. 4. Variation of estimated values of unknown paramenters $x_3(k)$, $x_4(k)$, $x_5(k)$, $x_6(k)$ and $x_7(k)$.

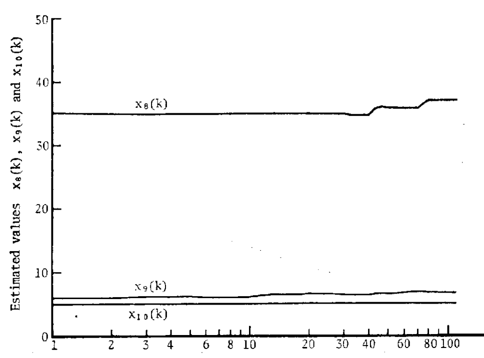

Fig. 5. Variation of estimated values of unknown parameters $x_8(k)$, $x_9(k)$ and $x_{10}(k)$.

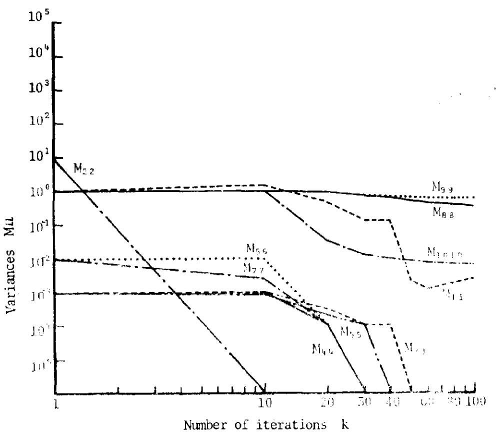

Fig. 6. Variation of variances of estimations errors.

に対する近似解によった.

なお，具体的な計算例として試験地で得られた昭和54年3月12日から同年6月30日までの日観測データを用いて2段タンクのパラメータ推定を行った．その結果，ここで使用された近似フィルタは比較的良い精度で未知パラメータの同定を行うことを可能にした.

文　献

Bryson, A. E. and M. Frazier 1963 Smoothing for linear and non-linear dynamical systems. *U. S. Air Force Tech. Report*, **ASD-TDR-63-119**: 353–364

小林慎太郎・丸山利輔 1976 Powell の共役方向法によるタンクモデル定数の探索. 農土論集, **65**: 42–47

永井明博・角屋 睦 1979 流出モデル定数の最適化手法. 京大防災研年報, **22B-2**: 209–224

椹木義一・片山 徹 1967 a 非線形制御系の状態変数の推定について. 制御工学, **11**: 361–368

椹木義一・片山 徹 1967 b 非線形制御系のパラメータ推定について. 制御工学, **11**: 369–377

砂原善文 1976 非線形濾波理論の展望. 計測と制御, **15**: 923–934

田中宏平・四ケ所四男美 1981 宮古島の地下水予測に関するシステム理論的研究. 九大農学芸誌, **35**: 97–103

Summary

This study was carried out to estimate the parameters of water balance model in the experimental ground water dam in Miyako Island. Miyako is a limestone island with an area of 159 km^2. Its top layer is of 40 m deep of limestone and underneath it is the impermeable mud stone layer.

This experimental ground water dam was constructed in Minafuku in 1977 and is 16.5 m high, 500 m long and has 1.7 km^2 of catchment area. Now that the dam is filled up, it is greatly expected that it may sure to enhance future project of dam of similar nature.

The authors have studied the estimation of ground water level in Miyako Island using the system-theory. In the report, water balance model of ground water dam was made and the non-linear smoothing method was used to analyze the inside state variable (storage depth in model, random noise, and measurement noise). As the result, detail analysis of the structure of water circulation process was made clear and possible. However the parameters of this model were approximated and decided by trial method.

In this study, system-theoretic method, the equivalent gain in paticular was used to determine the parameters of the model. As the precipitation and run-off phenomenon are non-linear in character, it is difficult to obtain a non-linear filter which exhibits the precise dynamic character between them.

Its analog is found in non-linear filter theory of system theory where, though precise mathematical representation of filter equation is possible, it does not mean precise dynamic characteristic filter representation is also possible. Hence, in engineering, instead of non-linear filter, approximate filter is made and often used.

Likewise, in this study, approximate filter is used to determine the unknown parameters.

The analysis show that determination of the unknown parameters could be made with relatively high accuracy with this method.