

宮古島の地下水予測に関するシステム理論的研究

田中, 宏平
九州大学農学部排水干拓工学教室

四ヶ所, 四男美
九州大学農学部排水干拓工学教室

<https://doi.org/10.15017/22275>

出版情報 : 九州大学農学部学藝雑誌. 35 (3/4), pp.97-103, 1981-07. 九州大学農学部
バージョン :
権利関係 :

宮古島の地下水予測に関するシステム理論的研究

田中宏平・四ヶ所 四男美
 九州大学農学部排水干拓工学教室
 (1981年2月12日 受理)

A System-Theoretic Study on the Estimation of Ground Water in Miyako Island

KOHEI TANAKA and SHIOMI SHIKASHO
 Laboratory of Land-Drainage and Reclamation, Faculty of Agriculture, Kyushu University 46-05, Fukuoka 812

はじめに

南西諸島の年平均降雨量は 2,000 mm を上回っているが、年ごとの変化が著しく、また月間降雨量も非常にばらつきが大きい。それによつて農作物 もしば

しば旱魃の被害を受けている。宮古島は面積約 159 km² の平坦な地形の島で、農地は透水性の大きいさんご礁石灰岩土壤からなっており、約 7,300 ha にサトウキビが栽培されている。

沖縄開発庁の調査 (1976) によると、平年の降雨量は約 3.6 億 m³ で、そのおよそ 40% が蒸発散、10% が地表流出、50% が地下浸透になるといわれている。一方、この島の水理地質は Fig. 1 に示すように島尻層群 (泥岩) が基盤となり、その上をさんご礁石灰岩 (琉球石灰岩) が島全体を覆っている。

宮古島の地下水はさんご礁石灰岩の中を浸透して、島尻層群の上面に沿つて貯留され、基盤の傾斜に沿つて流動し、海に流出している。

皆福試験地下ダム

この島で地下ダムの計画があり、まず、城辺町字皆福に基盤の泥岩の谷をグラウト工によつて堰止め、上流側に貯水する地下ダム (皆福ダム) が数年前試験的に施工された。

築造された地下ダムの諸元は次のとおりである。

地下ダムの名称	皆福ダム
位 置	宮古島城辺町皆福
長 さ	500 m
高 さ	16.5 m
流 域 面 積	1.7 km ²
かんがい可能面積	150 ha

筆者らは水資源開発の研究の立場から、この流域における降雨と地下ダムの地下水位の動的応答特性を求めるために、非線形スージング解の適用を試みた。

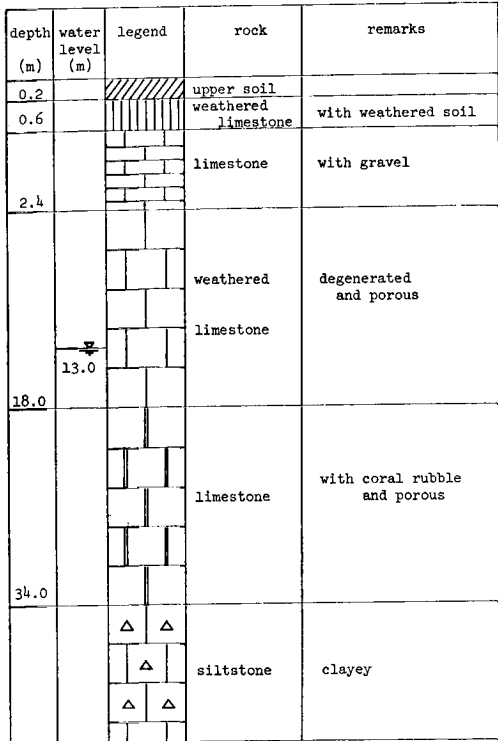


Fig. 1. Geologic section of the limestone in Miyako.

この解法は Bryson and Frazier (1963) が離散値に対して提唱した non-linear smoothing 法であつて、この方法は既に清水ら (1977) によつて琵琶湖流域の水収支の解析に対して試みられ、解の精度を向上させる点で好結果が得られている。

モデルの設定

この地域の土層の性質を考慮して、降雨と地下水補給に関する流出モデルとして、次の2段式菅原モデル(以下タンクモデルという)を採用した。

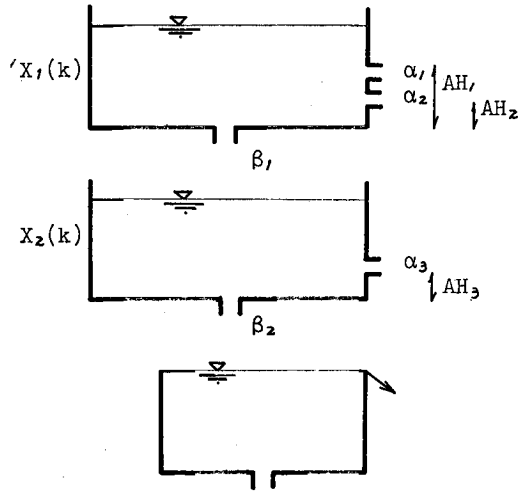
これは、降雨、流域貯留、蒸発散、流出、および地下浸透などの諸現象を含んだ水循環プロセスというシステムの中で、特に地下浸透、つまり地下水補給に重点をおいたモデルとして適当であると考えたからである。当然の事ながら、このモデルの側方からの流出が非線形性を表わしている。この地域の表層の土壌の厚さは約 60 cm と薄く、流出モデルとして2段のタンクモデルで十分であると考えた。

解析の対象としている皆福ダムの流域は、常時、その中には河川らしきものはなく、大きな降雨のたびに流域の低部に一時湛水を生じている。従つて、このモデルのパラメータの同定は、普通の場合のように河川の流量によつて行うわけには行かず、もつぱら、後で述べるように、地下ダムの観測地下水位によつて行うより他に方法がなかつた。

さて、このダムが試験的に施工され、完成すると同時に、地下ダムの水位が上昇し始め、ダムの堤頂を越流する状態になつた。そして、流域内の各所で連続して水位の変動が観測されている。

皆福ダムの流域は比較的小さく、しかも島全域が平坦であるので降雨の不均一性は少ないものと推定した。そのような理由で流域雨量として、宮古気象台(現地より 12 km)で観測された日降雨量を用い、蒸発散高は従来この地方で使用されている月間の平均値 (Table 1) をそれぞれの月に対して使用した。

まず、Fig. 2 に示すような2段のタンクモデルを設定し、地下ダムの地下水位の観測値と上記の入力データをもとにモデルの諸パラメータの同定を試行錯誤的に最小2乗推定によつて行つた。ただこの場合、前記のように表面流出の観測資料が得られないので、こ



$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.2 & \beta_1 &= 0.2 & X_1(0) &= 25.0 \\ \alpha_2 &= 0.2 & \beta_2 &= 0.1 & X_2(0) &= 60.0 \\ \alpha_3 &= 0.03 & AH_1 &= 65.0 & AH_2 &= 18.0 \\ AH_3 &= 5.0 & & & & \end{aligned}$$

Fig. 2. Tank model for water balance in the ground water dam.

れによつてモデルのパラメータ同定を行うわけにはいかない。また、モデルの側方からの流出は全体のシステムの中でさほど大きな割合を持っていないので、もつぱら地下水位の観測資料をもとに、パラメータの同定を行つた。すなわち、資料として、昭和54年1月1日から同年6月30日までの181日間の降雨データと同期間の地下水位の観測データを使用した (Fig. 3)。このモデルによつて求めた地下水補給量と実測された地下水位の変動量の推定誤差は約 22% 程度となつた。地下水位をレベルとして扱つていることや、水文学の観測誤差から考えると、ほぼ妥当なモデルであると考えられる。

次に以上のモデルを用いて、この地下ダムの水収支の関係を非線形の状態方程式として表わしてみる。まず、この地下ダムへの収入は流域に降る雨であり、この降雨は地表約 60 cm の厚さに分布する石灰岩の風化土壌に浸透し、そこを通過して、さらに下層の石灰岩の中に貯留されている。この地下ダムの地表流域は 1.7 km² であり、地下ダムの天端標高 33 m にお

Table 1. Monthly mean evapotranspiration.

Month	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ET(mm/day)	1.5	1.3	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	5.0	4.0	3.0	2.5	2.0

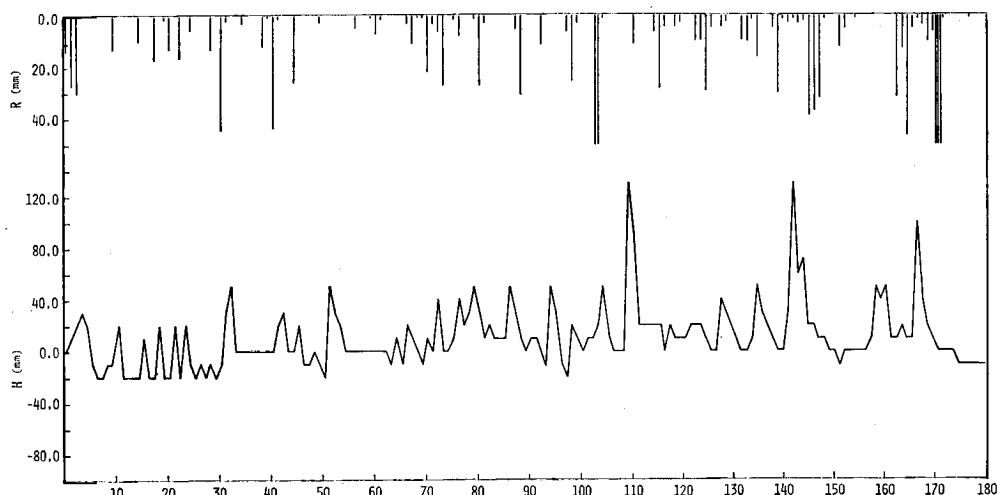


Fig. 3. Observed rainfall and ground water level.

ける満水面積が 0.9 km^2 であるので、地下ダムへの流入高はその満水面付近で約 1.89 倍の貯水高の増分となっている。さらに、貯留層となっている石灰岩の空隙率が 13% であるので、実際に測定された地下水位から求められる貯留高も補正が必要とされる。

一方、支出の方は、地表面からの蒸発散量と石灰岩貯留層からの漏水量である。地下水の流れは一般に遅いので時間単位を 1 日とし、地下水の補給量の推定高さの精度を高めるために、1 日前の補給量との平均を取る方法を用いた。

以上のような諸条件の設定のもとに、地下ダムの水収支の関係式が次のように表わされる。

$$A_0 \cdot \Delta h(k) = aI(k) + bI(k-1) - L(k) \quad \dots(1)$$

ここに k ; time step (日)

$$\Delta h(k) = h(k+1) - h(k) \quad (\text{mm})$$

h ; 地下水位 (mm)

Δh ; 地下水位の増分 (mm)

$I(k)$; 地下水補給量 (mm に換算)

$L(k)$; 地下ダムからの漏水量 (mm に換算)

A_0 ; 面積換算係数

a, b ; 定数

次に、(1)の地下水収支式とタンクモデルの計算式にもとづいた地下ダムの水収支モデルを非線形状態方程式として表わすと、

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(k-1) - \mathbf{G}[\mathbf{f}_n[\mathbf{x}(k-1)] - \mathbf{r}(k) + \mathbf{W}(k)] \quad \dots(2)$$

又、観測方程式は (1) にもとづいて、

$$y(k) = a \cdot f_1[\mathbf{x}(k)] + b \cdot f_1[\mathbf{x}(k-1)] - v(k) \quad \dots(3)$$

のように表わされる。

ここで

タンクの貯留高

$$\mathbf{x}(k) = [X_1(k), X_2(k)]' \quad \dots(4)$$

流域雨量

$$\mathbf{r}(k) = [r_1(k), 0]' \quad \dots(5)$$

不規則入力

$$\mathbf{W}(k) = [W_1(k), W_2(k)]' \quad \dots(6)$$

流域雨量は降雨時のデータを 1 段のタンクに入力し、無降雨時にはあらかじめ定められた月別蒸発散量を (-) 値として入力する。

又、不規則入力 $\mathbf{W}(k)$ は流域雨量や蒸発散量の算定誤差にもとづくもので、システム雑音である。なお、(3) の $v(k)$ は地下水位の測定誤差などの観測雑音である。

又、(2) の \mathbf{F} および \mathbf{G} はタンクモデルの計算式によつて、この場合、次のマトリックスで与えられる。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 & 0 \\ \beta_1(1 - \beta_1) & 1 - \beta_1 \end{bmatrix} \quad \dots(7)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(8)$$

さらに、流出関数 $f_n[\mathbf{x}(k)]$ と、 $f_1[\mathbf{x}(k)]$ は

$$\mathbf{f}_n[\mathbf{x}(k)] = \begin{bmatrix} \alpha_1(X_1 - AH_1) + \alpha_2(X_1 - AH_2) \\ \alpha_3(X_2 - AH_3) \end{bmatrix} \quad \dots(9)$$

$$f_1[\mathbf{x}(k)] = 1.89 X_2 \cdot \beta_2 \quad \dots(10)$$

それぞれの値は流出高によつて表現することとする。

又、各確率過程について、通常行われる次の諸仮定を設ける。

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{W}(k)] &= \overline{\mathbf{W}(k)}, & E[v(k)] &= \overline{v(k)} \\ E[\mathbf{x}(0)] &= \overline{\mathbf{x}(0)}' \\ E\{[\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}(0)}][\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}(0)}]'\} &= \mathbf{P} \\ E\{\mathbf{W}(k) - \overline{\mathbf{W}(k)}\}[\mathbf{W}(\tau) - \overline{\mathbf{W}(\tau)}]'\} & \\ &= \mathbf{Q}(k)\delta(k-\tau) \\ E\{[v(k) - \overline{v(k)}][v(\tau) - \overline{v(\tau)}]'\} & \\ &= \mathbf{R}(k)\delta(k-\tau) \\ E[\mathbf{x}(0), \mathbf{W}(k)] &= E[\mathbf{x}(0), v(k)] \\ &= E[\mathbf{W}(k), v(j)] = 0 \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

非線形スージング解

既に先の方法によつて一応タンクモデルの最適パラメータが同定されたので、これを基礎的なモデルとして、水循環プロセスの内部の状態を構成する諸量、すなわち、貯留高、不規則入力、および観測雑音の変化を非線形状態推定法によつて求めた。つまり、地下水水位予測モデルの精度を向上させることを試みた。

この場合、水収支のモデルが非線形の状態方程式として(2)、(3)で与えられているので、これの最適解を求めることは、等式非線形制約条件を持つ場合の極値問題に相当している。従つて、まず、最尤法による非線形状態推定を行う場合に必要とされる最小2乗推定の動作指標 $J(T)$

$$\begin{aligned} J(T) &= \frac{1}{2} \left\| \mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}(0)} \right\|^2 \mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^T \left\| \mathbf{W}(k) \right. \\ &\quad \left. - \overline{\mathbf{W}(k)} \right\|^2 \mathbf{Q}(k)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^T \frac{1}{\mathbf{R}(k)} \left[v(k) - \overline{v(k)} \right]^2 \dots(12) \end{aligned}$$

に Lagrange multiplier ベクトル λ_n をそれぞれの非線形制約条件に乗じて加えたものを Hamiltonian $H(T)$ と定義する。

$$\begin{aligned} H(T) &= -J(T) + \sum_{k=1}^T \lambda'(k) \{ \mathbf{x}(k) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{G} [f_n[\mathbf{x}(k-1)] - r(k) + \mathbf{W}(k)] \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^T \xi(k) \{ y(k) - a f_i[\mathbf{x}(k)] \\ &\quad - b f_i[\mathbf{x}(k-1)] + v(k) \} \dots(13) \end{aligned}$$

結局、この問題は $H(T)$ を最小にする問題に帰着される。

言葉をかえていえば、この問題は(2)、(3)の非線形制約条件の下にコスト関数(12)を最小にする最適制御の問題とみなされる。

さて、この地下ダムで水位が観測されているので、

前記の諸データを用い、Bryson and Frazier (1963) が離散値の問題に適用した非線形スージング解法をこの場合に試みた。それはスージング問題を適用する方がフィルタ問題を用いる場合より情報が豊富になり、それだけ質のよい推定値が得られると考えたからである。

この解法を用い、以下にのべる順序に従い解を進め、結局 $J(T)$ を最小にする未知変数、 $\mathbf{x}(0)$ 、 $\mathbf{W}(k)$ 、 $v(k)$ の値を求めた。方法は、こう配法を利用したもので、まず、第ゼロ近似の $\mathbf{W}(k)$ と $\mathbf{x}(0)$ 、および観測雨量 $r(k)$ を与え、(2)によつて次のステップの $\mathbf{x}(k)$ を求める。その $\mathbf{x}(k)$ と観測された地下水水位 $y(k)$ の値を(3)の観測方程式に代入して逆に $v(k)$ の値を求める。さらに、この $v(k)$ の値から次式によつて $\xi(k)$ の値を求める。

$$\xi^{(0)}(k) = \frac{1}{\mathbf{R}(k)} (v^{(0)}(k) - \overline{v(k)}) \dots(14)$$

0; 第ゼロ近似を意味する

次に、(14)の $\xi^{(0)}(k)$ と(15)の $\lambda^{(0)}(T)$ を(16)の $\lambda^{(0)}(k+1)$ に代入して $\lambda^{(0)}(k)$ を逆順に求めていく。

$$\lambda^{(0)}(T) = a \xi^{(0)}(T) \frac{\partial f_i[\mathbf{x}^{(0)}(T)]}{\partial \mathbf{x}} \dots(15)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)}(k) &= \left\{ \mathbf{F}' - \frac{\partial f_n[\mathbf{x}^{(0)}(k)]}{\partial \mathbf{x}(k)} \cdot \mathbf{G}' \right\} \lambda^{(0)}(k+1) \\ &\quad + a \xi^{(0)}(k) \frac{\partial f_i[\mathbf{x}^{(0)}(k)]}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ &\quad + b \xi^{(0)}(k+1) \frac{\partial f_i[\mathbf{x}^{(0)}(k)]}{\partial \mathbf{x}(k)} \dots(16) \end{aligned}$$

以上の結果から、こう配法によつて、まず $H(T)$ を $\mathbf{W}(k)$ と $\mathbf{x}(0)$ で微分して、 $\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{W}(k)}$ 、 $\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{x}(0)}$ を求める。次に、ある適当な小さな正の定数 $\varepsilon_1^{(0)}$ と $\varepsilon_2^{(0)}$ を用いて次式から $\mathbf{W}(k)$ と $\mathbf{x}(0)$ の修正値を求める。

$$\mathbf{W}^{(1)}(k) = \mathbf{W}^{(0)}(k) + \varepsilon_1^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{W}(k)} \dots(17)$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \mathbf{x}^{(0)}(0) + \varepsilon_2^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mathbf{x}(0)} \dots(18)$$

以上の計算の結果から(12)の $J(T)$ の値を求める。次に新しい第1近似の列 $\mathbf{W}^{(1)}(k)$ と $\mathbf{x}^{(1)}(0)$ を(2)、(3)に代入して以下同様の計算を繰り返す。その結果 $J(T)$ の減少割合が予め定めておいた適当な小さい数 ε_3 より小さくなつて計算を終わる。

さて、以上の解法を宮古島の地下ダムの地下水水位予

測に適用したが、降雨量と地下水位の観測資料は前記のものを使用した。

プロセス内部の初期の状態、つまり初期貯留高は最小2乗推定で試行錯誤的に求めた前記のタンクモデルの値をそのまま使用した。

(1) 初期貯留高

$$x(0) = \begin{bmatrix} 25 \\ 60 \end{bmatrix} \quad \text{共分散 } P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 不規則入力

この入力雑音 $W^{(0)}(k)$ は無降雨日のときは蒸発計による蒸発散量の観測値に、又、降雨日には流域雨量の算定誤差に基づくものと考えた。そして、ここで行った計算は1月～6月のものであるので、 $W(k)$ の第ゼロ近似値と共分散の値として、次のような比較的小さい値を設定した。

$$W^{(0)}(k) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad Q(k) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 観測雑音

この場合、観測雑音は地下水位の測定誤差によるものであるが、算定誤差の平均値は0と仮定している。又、共分散 $R(k)$ は一様に100として与えた。これは降雨時、つまり、地下ダムへ地下水の補給が行われるとき、実際の補給量と地下水位の測定値との間にはこの程度の測定誤差が生じるものと考えたからである。もつとも、この中には地下ダムの満水面積が正確に測定できないので、これからの算定誤差も含まれていると解釈される。

解析結果

以上の解法を皆福ダムの地下水予測に適用したが、この場合の地下水収支モデルは次のようになる。

まず、状態方程式として

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.16 & 0.9 \end{bmatrix} x(k-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2[X_1(k-1) - 65 + 0.2[X_1(k-1) - 18] \\ 0.03[X_2(k-1) - 5] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \dots(19)$$

と表わされ、また観測方程式は

$$y(k) = \frac{1}{0.13} [1.89 \times 0.5 \beta_2 [X_2(k) + X_2(k-1)] + 0.1 - v(k)] \quad \dots(20)$$

この式で、石灰岩の空隙率は0.13、地下ダムの流域面積と満水面積の換算率は1.89 また、最後から2番目

の項は地下ダムからの漏水量を示している。皆福ダムの底盤は島尻泥岩であるので、底面からの漏水はほとんどないものと考えられるが、地下ダムの遮水壁(最高部の高さ 16.5 m, 全長 500 m)からはほぼ定常的に漏水があるものとしている。実際には地下ダムの水位が若干変動しているが、それは降雨の影響による分がほとんどで、漏水はそれに比べて小さく、ほぼ定常的なものであると仮定した。その漏水量を漏水高さで表わして、最初のタンクモデルのパラメータ同定のときに求めた結果、0.1 mm/day という値が得られた。

貯留高

タンクモデルを用いて流出現象を解析する場合、一般には各タンクの貯留高は状態推定値として求められる。又、各タンクのパラメータ同定は河川の流量を対象に行われる。従つて、calibrationのために地下水を実測することはほとんど行われぬ。しかし、地下ダムの場合は、少し様子が違っていて、地下水位そのものが実測値として与えられ、特にこのダムの場合、河川らしきものが存在しないのでパラメータの同定はもつぱら地下水位の実測データを対象に行われる。

この場合、流出モデルとしては地表の石灰岩風化土層を対象にしたタンクモデルが用意され、前記のように2段タンクの各貯留高の変化が推定されることになる。

Fig. 4 には最小2乗推定によつて同定したタンクの貯留高の変化の状態と、非線形スムージングを適用した場合のそれとを比較している。図に示されるようにタンクの貯留高が良く改善され、6か月間の変化の様子がうかがえる。

不規則入力

状態方程式の中のシステム雑音が蒸発散高と降雨量の算定誤差に基づくことは前にのべたが、非線形スムージング解を適用した結果をみると、この項は比較的小さな値を示している。このことは、降雨量や蒸発散量の地域偏差が小さいことを示している。具体的には降雨量の算定誤差が1か月平均1.9%と小さく、蒸発散量の算定誤差も同様に1か月平均11%という値を示している (Fig. 5)。

流域が大きな地域を対象にした場合には当然この不規則入力の値が大きくなり、状態方程式の中で重要な意味を持つことが予想される。

観測雑音

(3) の $v(k)$ で示される観測雑音は地下水位の観測

値の誤差を意味している。スムージング解の結果は、その一例として Fig. 6 に示されるように、比較的大きな値を示している。そして、雑音の変化の傾向も地下水水面の変動の大きさにほぼ比例する傾向を示してい

る。この雑音は観測技術の程度による誤差の外に観測方程式の中の誤差つまり地下ダム地下水水面が正確に

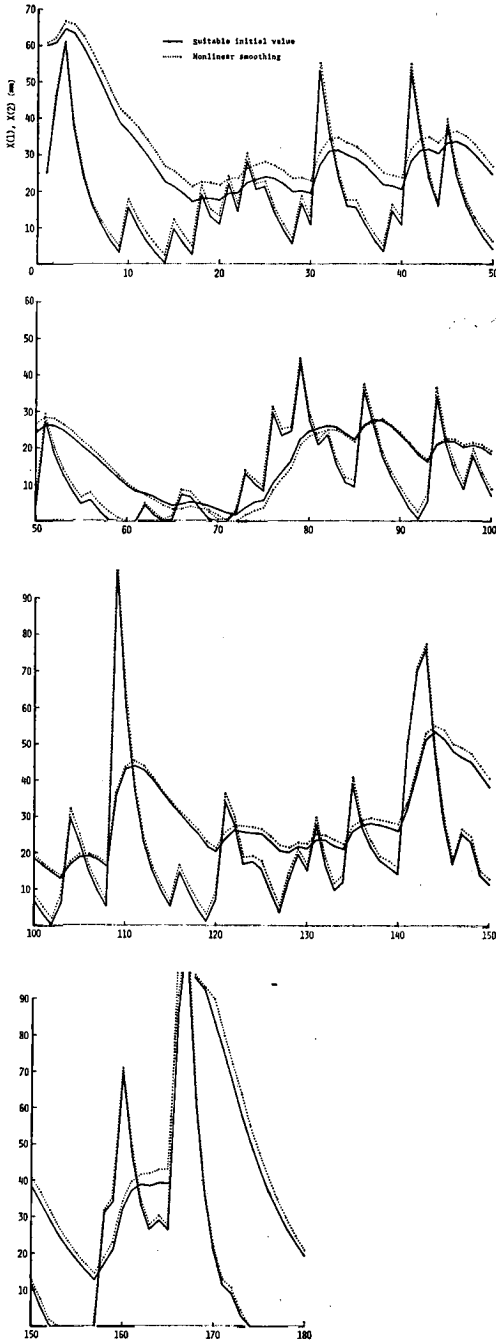


Fig. 4. Water storage level.

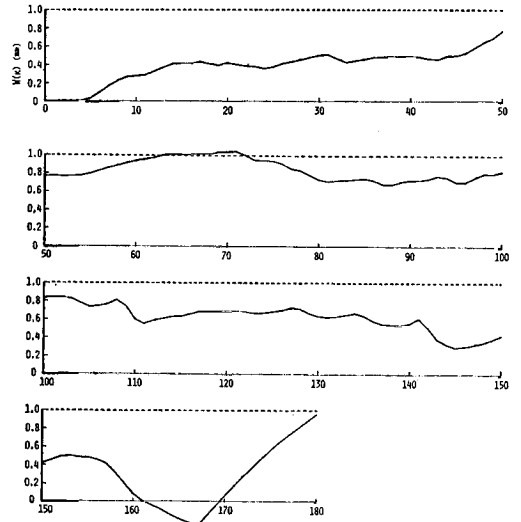


Fig. 5. Random noise in this analysis.

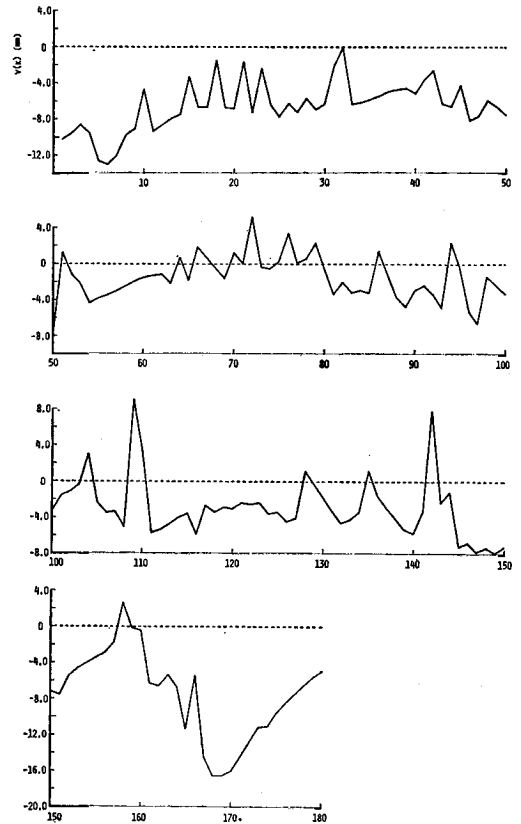


Fig. 6. Observation noise.

測定出来ないために生ずる地下水補給高さの算定誤差もこの中に含まれていると考えられる。このために、他の水文学解析の場合と違って観測の精度を向上させることがそう簡単ではない。

結 論

地下ダムの水収支モデルの解析に非線形スムージングを適用することによって、降雨と地下水貯留の動的応答が精度良く求められることが明らかにされた。スムージングを適用すれば情報が豊富になり、それだけ解の精度が向上するわけである。それと同時に、この場合に適用した非線形の状態推定法によって地下ダム

の水循環プロセスの内部構造を明らかにすることが出来た。

文 献

- Bryson, A. E. and M. Frazier 1963 Smoothing for linear and nonlinear dynamical systems. *U. S. Air Force Tech. Report, ASD-TDR-63-119*: 353-364
- 坂和愛幸 1972 最適システム制御理論. コロナ社, 東京, 169-175 頁
- 清水 光・久保和夫・有本 卓 1977 琵琶湖流域の水の循環に関するシステム理論的考察. 計測自動制御学会論文集, 13 (2) : 200-206

Summary

This system-theoretic study was carried out to analyze the variation of ground water level in the experimental ground water dam in Miyako. Miyako is an island with an area of 159 km², and a coral limestone. The surface soil is about 2 m deep, then the porous limestone lies within about 40 m under surface, and the bottom is impermeable mud stone. The experimental ground water dam was constructed at Minafuku in 1977. It is 16.5 m high, 500 m long and 1.7 km² area of basin. The data of hydrology (daily ground water levels, rainfalls and evapotranspirations) were used to analyze from January 1 to June 30, 1979.

The two-stage tank model was used to describe the recharge of water to the ground water dam, and the identification of parameters of this model was carried out by the method of minimum mean squared. In this case the estimation error was about 20%. However, the data of hydrology usually have fair errors in observation. Thus, A. E. Bryson and M. Frazier's non-linear smoothing method was used to estimate the daily variations of water storage levels in tank model more exactly. The non-linear water balance model was used for the state equation and the ground water model was used for the observation equation too. The principal idea of this analysis is to apply the system-theoretic method of data-smoothing to the above system. Thus, it was possible to describe the hydrologic cycle by the discrete-time dynamical system.

Finally, it was concluded that the water storage levels in tank model were improved by this method and random noise (estimated error of rainfall and evapotranspiration) was small comparatively. The former of estimated error was about 1.9% and the latter one was about 11%. The observation errors of ground water levels were proportionated to the variations of water levels approximately, and its value was about 4.3% on an average.