

確率数値限界解析を用いた粘性土地盤の支持力特性

Kasama, Kiyonobu

Department of Construction Design, Graduate School of Engineering, Kyushu University

Zen, Kouki

Department of Construction Design, Graduate School of Engineering, Kyushu University

Whittle J., Andrew

Massachusetts Institute of Technology

<https://hdl.handle.net/2324/21970>

出版情報：応用力学論文集. 11, pp.291-298, 2008-08. 公益社団法人土木学会

バージョン：

権利関係：



KYUSHU UNIVERSITY

確率数値限界解析を用いた粘性土地盤の支持力特性

Bearing capacity characteristics of cohesive ground using random field numerical limit analyses

笠間清伸*・善功企**・Andrew J. Whittle***

Kyonobu Kasama, Kouki Zen and Andrew J. Whittle

* 博(工) 九州大学助教 大学院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地)

** 博(工) 九州大学教授 大学院建設デザイン部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地)

*** Ph.D. Prof. Massachusetts Institute of Technology (77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139-4307)

This paper describes a probabilistic study of the two dimensional bearing capacity of a vertically loaded strip footing on spatially random, cohesive soil using Random Field Numerical Limit Analyses. The analyses use a Cholesky Decomposition technique to represent the spatial variation in undrained shear strength within finite element meshes for both upper and lower bound analyses, assuming an isotropic correlation length. Monte Carlo simulations are then used to interpret the bearing capacity for selected ranges of the coefficient of variation in undrained shear strength and the ratio of correlation length to footing width.

Key Words: Bearing capacity, limit analysis, Random field, Probabilistic analysis

キーワード：支持力、極限解析、ランダム場、確率解析

1. はじめに

土質や岩盤などの地盤材料を対象とする各種構造物の設計に際して、弾性係数や強度などの地盤諸係数がばらついていることはよく知られており、土構造物の安全性評価においては、上記の不確定量を合理的かつ定量的に取り扱う必要がある。確率・統計論に基づく信頼性理論は、これら不確定量を合理的かつ定量的に取り扱う手法であり、信頼性理論を構造物の設計に適用することにより、構造物の安全性を安全性指標または破壊確率として評価することが可能となる。これまでに、地盤材料を対象とした信頼性設計では、盛土、擁壁および斜面安定などに適用した研究¹⁾があるが、地盤の支持力に関して信頼性設計を適用した研究は、あまり多くない。例えば、Griffiths and Fonton²⁾、Griffiths et al.³⁾やPopescu et al.⁴⁾は、材料定数の空間的な不均一性を考慮し、従来の弾塑性有限要素解析によるモンテカルロシミュレーションを用いて、平面ひずみ状態における粘性地盤上の平板基礎の支持力特性を明らかにしている。両者の解析では、同様に弾塑性有限要素法を用いているが、各有限要素の材料定数の決定法が異なる。Popescu et al.は、地盤のせん断強度をベータ関数もしくはガンマ関数で近似し、強度の空間的不均一性をmid-point法⁵⁾を用いて再現している。一方、Griffiths and Fontonは、せん断強度を対数正規分布で表現し、各有限要素の材料定数の決定についてはLocal Area Subdivision法(LAS法)⁶⁾を用いている。また、限界状態設計法における浅い基礎の支持力に関して、Foye et al.⁷⁾は信頼性設計をもとに支持力の低減係数を、砂地盤および粘土地盤において詳細に検討している。

地盤のせん断強度のばらつきは、設計時における地盤の支持力の決定に影響することが予想され、地盤のばらつきや局所性(ローカリティ)を考慮した支持力算定手法が求められている。本論文では、地盤のせん断強度をランダム場理論で表現し、数値極限解析を用いたモンテカルロシミュレーションにより、強度の空間的ばらつきを考慮した支持力解析を行った。その結果を用いて、強度の空間的ばらつきが地盤の支持力係数、破壊メカニズムおよび支持力の信頼性に与える影響について確率統計的に考察した。

2. 確率数値極限解析

本論文では、地盤の支持力を数値解析的に求める手法として、数値極限解析(Numerical Limit analyses, NLA)^{8,9)}を用いた。数値極限解析は、上界数値極限解析と下界数値極限解析からなり、地盤を剛塑性体と仮定し、有限要素法と同様に各メッシュの節点の変数(上界数値極限解析では、変位、下界数値極限解析では応力)を離散化した後、上界定理(下界定理)を利用して、変形を受けた際の地盤の内部消散仕事が最小(最大)となるときの変数を線形計画法によって求める解析手法である。数値極限解析のメリットは、1)支持力は、上界・下界数値極限解析から得られる上限値と下限値で挟まれた区間の形で得られる、2)線形計画法により、自動的に最適な破壊モードを計算できる、3)粘土地盤の支持力を±5%の精度で計算できる¹⁰⁾、4)解析に必要な定数がせん断強度のみであるなどがある。

地盤の強度定数の空間的なばらつきを表現するために、ランダム場理論を用いた。地盤の非排水せん断強度 c_u が常

に正の値をとるように対数正規分布で仮定し、変動係数 COV_c と正規化自己相関距離 Θ (=自己相関距離 θ /基礎幅 B) を入力定数として、mid-point 法を用いて空間的ばらつきをモデル化した。つまり、数値極限解析で必要となる解析メッシュにおける要素の中心座標において、ランダム場理論を用いてせん断強度を計算し、各要素の初期強度とした。自己相関係数は、次式で示される水平と鉛直方向の自己相関距離を等しいと仮定した等方マルコフ関数¹¹⁾を用いた。

$$\rho(x_{ij}) = \exp\left\{-\frac{2x_{ij}}{\theta}\right\} \quad (1)$$

ここで、 x_{ij} は、要素 i と j の中心間の距離である。今回使用した Cholesky 分解による手法¹²⁾では、この相関係数を用いて、各要素間の相関係数を表す相関行列 \mathbf{K} を作成する。

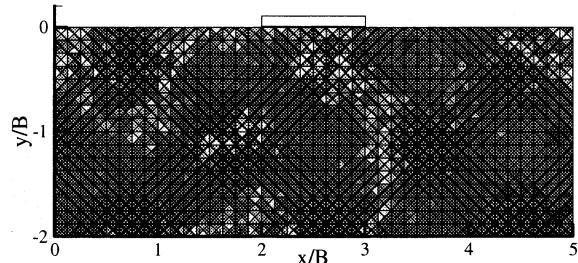
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 n は要素の総数である。さらに、相関行列 \mathbf{K} を上三角形行列 \mathbf{S} と下三角形行列 \mathbf{S}^T に分解した後、 n 個の独立な正規乱数で構成される乱数行列 $\mathbf{R}=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ を用いて、以下の式により要素間の相関性を考慮した正規乱数に変換した。

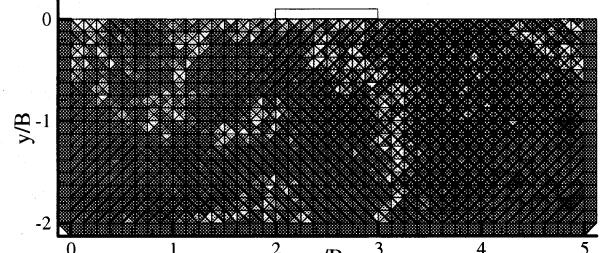
$$\mathbf{R}^* = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \quad (3)$$

式(3)で得られた正規乱数 \mathbf{R}^* 、非排水せん断強度 c_u の平均値 μ_c と変動係数 COV_c を用いて、各要素の強度を決定した。詳しい計算法は、参考文献 12), 13)を参照いただきたい。こうして得られた非排水せん断強度に空間的ばらつきを有する解析メッシュを、それぞれ上界・下界数値極限解析を用いて解析し、ばらつきを有する地盤の鉛直支持力を計算した。さらに、試行回数ごとに独立な乱数行列 \mathbf{R} を発生させ、式(3)より計算した強度分布の異なる解析メッシュを数値解析するモンテカルロシミュレーションを行うことで、確率統計的な観点から支持力特性を評価した。

図-1に解析で用いた二次元平面ひずみでの上界および下界数値極限解析用メッシュ図をそれぞれ示す。各要素に独立な節点を配置し、各要素の接点間の相対移動を可能にしている。また、図-1b)における下界数値極限解析のメッシュでは、無限遠点での境界条件を満足するために必要な拡張要素をメッシュの最端部に配置した⁸⁾。図-1 中の各要素の色の濃淡は、 $\Theta=1.0$ と $COV_c=0.2$ のときの地盤の強度分布の 1 例である。基礎幅 B とすると、基礎を中心とした両側に $2.5B$ 、深度方向に $2B$ の解析領域を設定した。有限要素は正三角形要素とし、要素の斜辺の長さは比較的小さく $1/8B$ に設定し、自己相関距離が小さい場合の強度の空間的ばらつきがうまく表現できるようにした。今回の解析では、地盤の単位体積重量をゼロと仮定し、単位体積重量の空間的なばらつきによる支持力の変化は考慮していない。また、基礎と地盤の境界面は、地盤のせん断強度によって抵抗すると仮定した。表-1に、解析条件を示す。



a) 上界数値極限解析のメッシュ図



b) 下界数値極限解析のメッシュ図

図-1 メッシュ図とせん断強度分布の一例

($\Theta=1.0, COV_c=0.2$)

表-1 解析条件

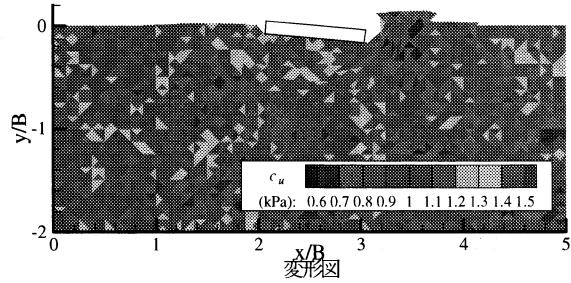
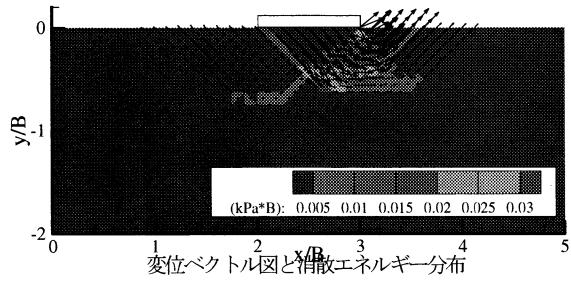
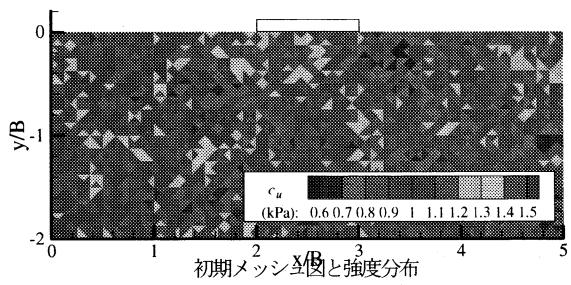
| 入力項目 | 値 |
|----------------------|----------------------------------|
| 荷重の傾斜角 | 0°(鉛直支持力) |
| 平均非排水せん断強度 μ_c | 1.0kPa |
| 強度の変動係数 COV_c | 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 |
| 水平と鉛直自己相関距離の比 | 1.0(等方地盤) |
| 正規化自己相関距離 $\Theta=B$ | Random, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 |
| 解析回数 | 100 |

地盤強度の変動係数を、0.2~1.0 とした。今回用いた Cholesky 分解を用いた自己相関距離を考慮した材料定数の決定法では、良好に計算できる最小と最大の自己相関距離は、それぞれ要素間距離($1/8B=0.125B$)の 2 倍程度(0.25B)と全解析領域(水平領域 5B)程度であること¹³⁾から、正規化自己相関距離を 0.25~4.0 とし、自己相関距離が要素間距離よりも小さい場合を考慮し、要素の強度をランダムに決定した条件(表-1 中では、Random と表記)も計算した。

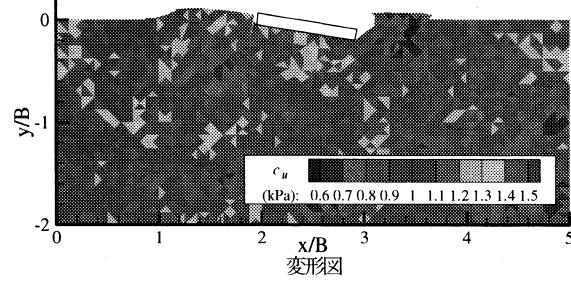
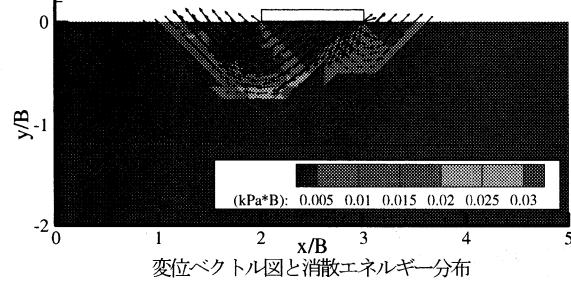
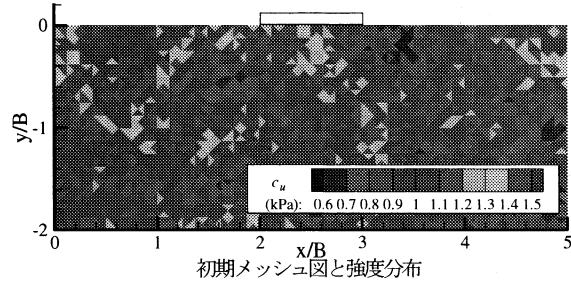
3. 地盤強度の空間的ばらつきを考慮した支持力特性

3.1 鉛直荷重に対する破壊モード

強度に空間的ばらつきを有する地盤の鉛直荷重に対する破壊モードを考察するために、図-2 に $COV_c=0.2$ で正規化自己相関距離が異なる条件における、強度分布を示した初期メッシュ図、上界数値極限解析より得られた変位ベクトル図と消散エネルギーおよび変形図の一例を示す。変位ベクトル図は、基礎中央部が鉛直方向に $0.1B$ 変形した時のものである。初期メッシュ図での要素の色の濃淡が、地盤のせん断強度の大きさを示し、正規化相関距離が大きくなると、地盤の空間的ばらつきの変動が滑らかになるの

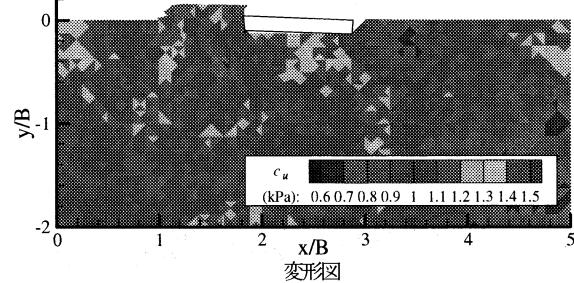
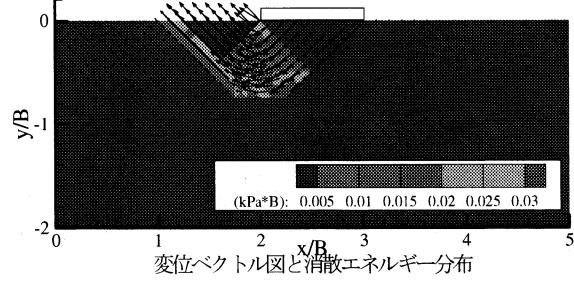
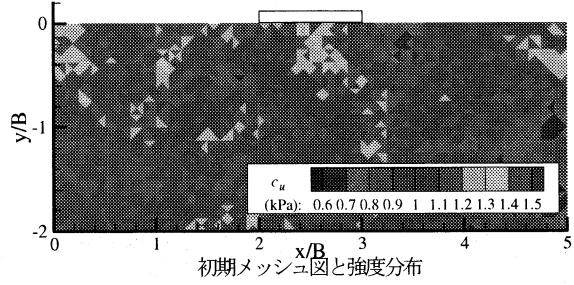


a) $\Theta=0.25, COV_c=0.2$

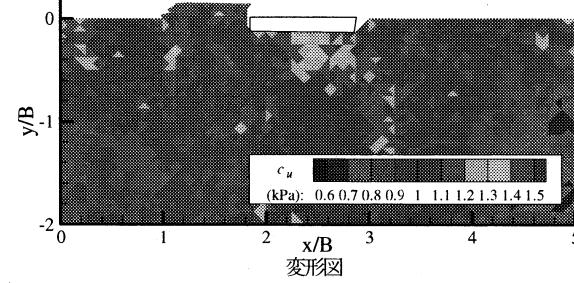
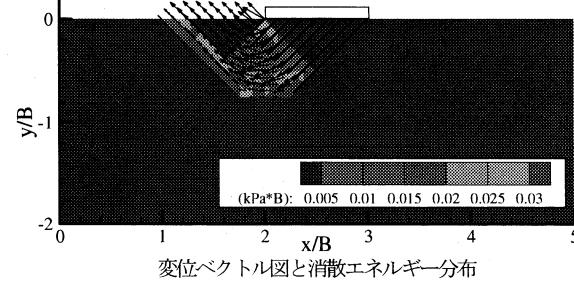
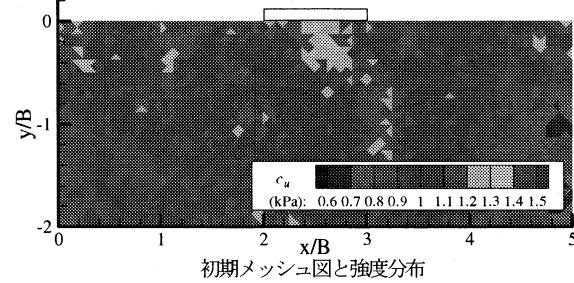


b) $\Theta=0.5, COV_c=0.2$

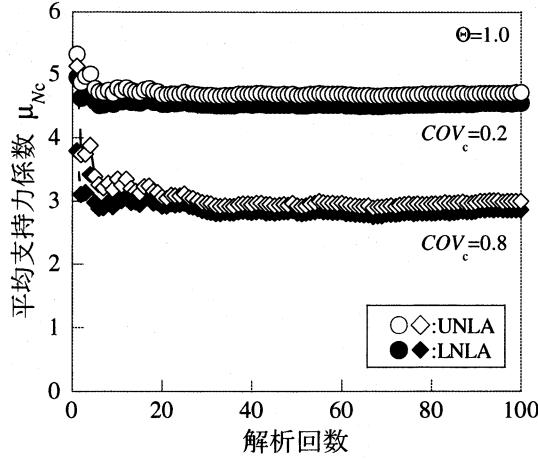
図-2 初期メッシュ図、変位ベクトル図と消散エネルギー分布および変形図



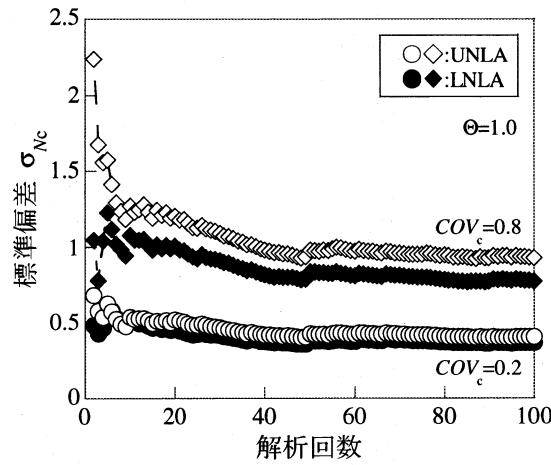
c) $\Theta=1.0, COV_c=0.2$



d) $\Theta=2.0, COV_c=0.2$



a) 平均支持力係数($\Theta=1.0, COV_c=0.2$ と 0.8)



b) 標準偏差($\Theta=1.0, COV_c=0.2$ と 0.8)

図-3 試行回数ごとの平均支持力係数と標準偏差

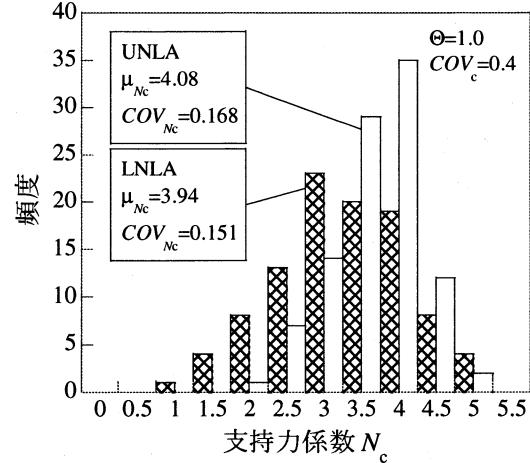
がみてとれる。変位ベクトル図や変形図に着目すると、強度に空間的なばらつきを有する地盤では、左右対称のすべり面は形成されず、基礎に傾斜が生じる結果となった。また、地盤の破壊モードでは、変動係数の違いによらず基礎直下に三角形状のくさび領域が形成され、すべり線が基礎幅以上の深度($y/B < 1$)にまで到達しなかったことから、基礎の設計のさいには、基礎幅と同じ深度までの地盤領域において強度の空間的ばらつきを評価することが重要であることを示唆する。

3.2 支持力係数の統計値

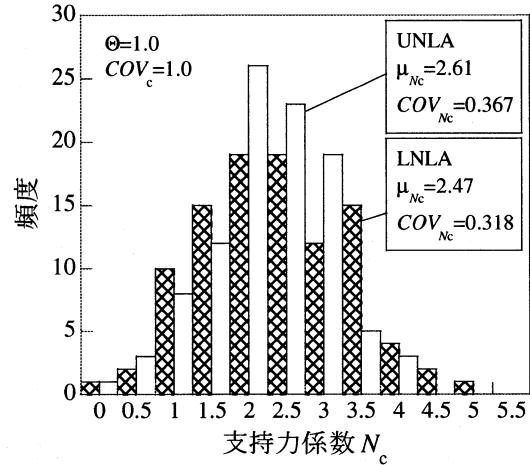
非排水せん断強度に空間的ばらつきを有する地盤の鉛直荷重に対する支持力特性を評価するために、モンテカルロシミュレーション i 回目の解析により得られた地盤支持力 q_{fi} を用いて、支持力係数 N_{ci} を以下の式で計算した。

$$N_{ci} = q_{fi}/\mu_c \quad (4)$$

さらに、モンテカルロシミュレーション i 回目での平均支持力係数 μ_{Nc} と標準偏差 σ_{Nc} を以下の式で計算した。



a) $\Theta=1.0, COV_c=0.4$



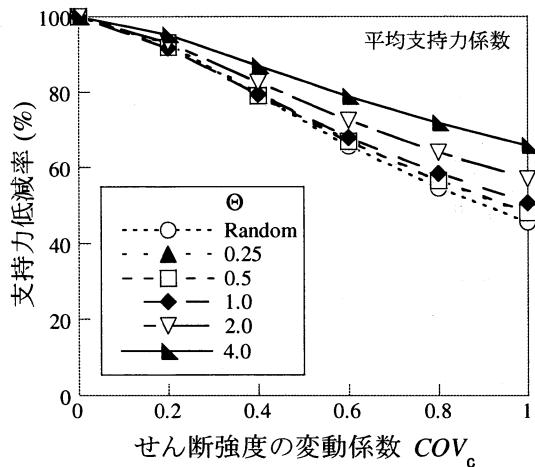
b) $\Theta=1.0, COV_c=1.0$

図-4 支持力係数のヒストグラム

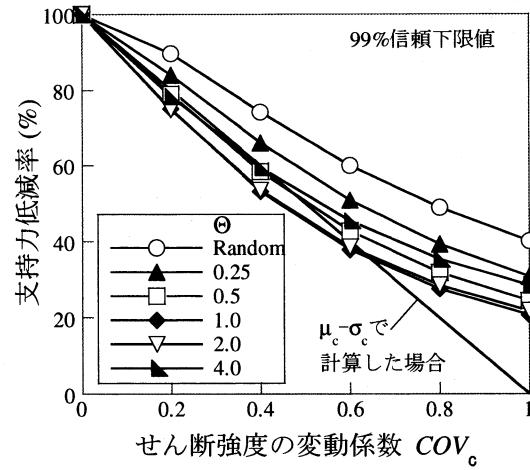
$$\mu_{Nc} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{ci} \quad (5)$$

$$\sigma_{Nc} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_{ci} - \mu_{Nc})^2} \quad (6)$$

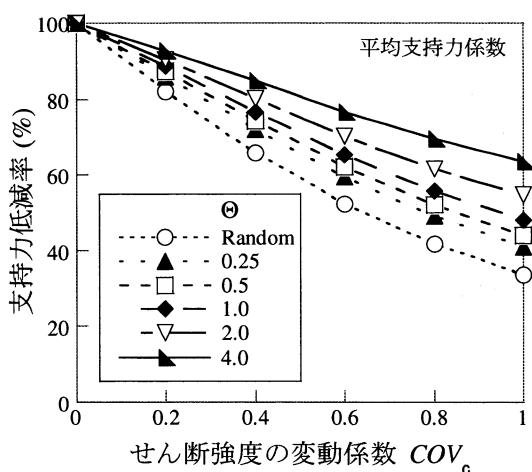
図-3 に、 $COV_c=0.2$ と 0.8 、 $\Theta=1.0$ におけるモンテカルロシミュレーション過程における平均支持力係数、標準偏差と解析回数の関係を示す。図-3a)に示す平均支持力係数では、解析回数 20 回程度までの変動が大きいが、60 回以降での変動はきわめて小さい結果が得られた。上界数値極限解析(UNLA)と下界数値極限解析(LNLA)による収束値を比較すると、UNLA による平均支持力係数が常に大きく、今回の入力定数における支持力係数の範囲を上限値と下限値による区間値によって推定できている。また、図-3b)に示す標準偏差についても、平均支持力係数と同様の結果が得られた。今回は、解析回数が 100 回と非常に少ないにもかかわらず、平均支持力係数と標準偏差の変動は小さく、ほぼ一定値を示したが、今後解析回数を増やし、十分な統計値が得られる解析回数の検討が必要である。



a) 上界数値極限解析



a) 上界数値極限解析



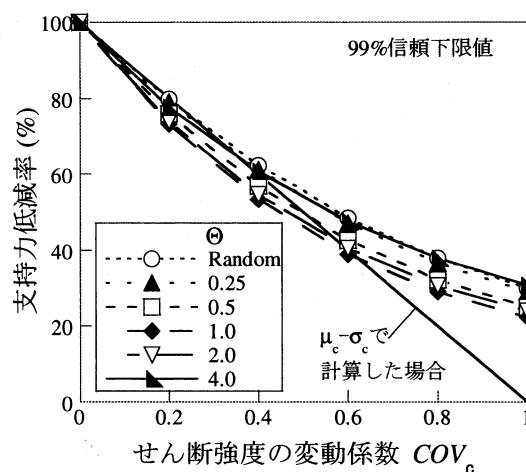
b) 下界数値極限解析

図-5 平均支持力係数による支持力低減率と変動係数

図-4は、 $\Theta=1.0$ 、 $COV_c=0.4$ と1.0における支持力係数のヒストグラムである。上界・下界数値極限解析で得られたヒストグラムの形状は、それぞれ平均値付近にピークが存在し、山型の分布形状を示した。下界数値極限解析の分布型は、上界数値極限解析の結果よりも若干なだらかな形状を示したが、分布型の適合度検定(χ^2 検定)から、強度に空間的なばらつきを有する地盤の支持力係数は、正規分布と対数正規分布の両者に5%の有意水準で適合した。

3.3 強度の空間的ばらつきに起因した支持力低減率

强度の空間的ばらつきに起因した支持力の低減割合を評価するために、図-5は、縦軸には平均支持力係数 μ_{nc} をプラントルによる理論解 $N_{Dc}=[2+\pi]$ で正規化(以下、支持力低減率とよぶ)した値とし、横軸を変動係数で示した図である。図-5a)と5b)に、それぞれ上界と下界数値極限解析による結果を示す。上界・下界数値極限解析のいずれにおいても、変動係数の増加とともに支持力低減率は、ほぼ直線的に減少した。ただし、その減少傾向は、正規化自己相関距離が小さくなるほど顕著であり、低減率はラン



b) 下界数値極限解析

図-6 99%信頼下限値による支持力低減率と変動係数

ダム地盤(自己相関距離が小さく、要素ごとにランダムに強度を決定した地盤)の場合が最も大きい結果となった。

図-5より、変動係数0.2~0.4程度の自然堆積地盤^{12),14)}では、平均支持力は60~80%に減少すると推定される。一方、軟弱地盤の強度増加や砂質地盤の液状化対策を目的として地盤改良された地盤は、対象地盤の不均質性や改良材の不均一性などの要因によって、強度に空間的ばらつきが生じているため、自己相関距離が0.15~12mと小さく、強度の変動係数は0.14~0.99と自然堆積粘土に比べて不均質性が大きいと報告¹⁵⁾されている。このように強度の空間的ばらつきの大きい改良地盤では、支持力が50%程度まで大きく減少する可能性があることを示唆する。

図-6には、平均支持力係数 μ_{nc} と標準偏差 σ_{nc} より計算した支持力の99%信頼下限値を用いて評価した支持力低減率と変動係数の関係を示す。99%信頼下限値による支持力低減率は、変動係数が小さい範囲で急激に減少する曲線形状を示した。図-5の平均支持力係数の場合とは異なり、上界・下界数値極限解析においても、ランダム地盤の低減率が最も小さい結果となり、 $\Theta=1.0$ の低減率が最も大きい結果を示した。以上のことから、支持力の下限値において

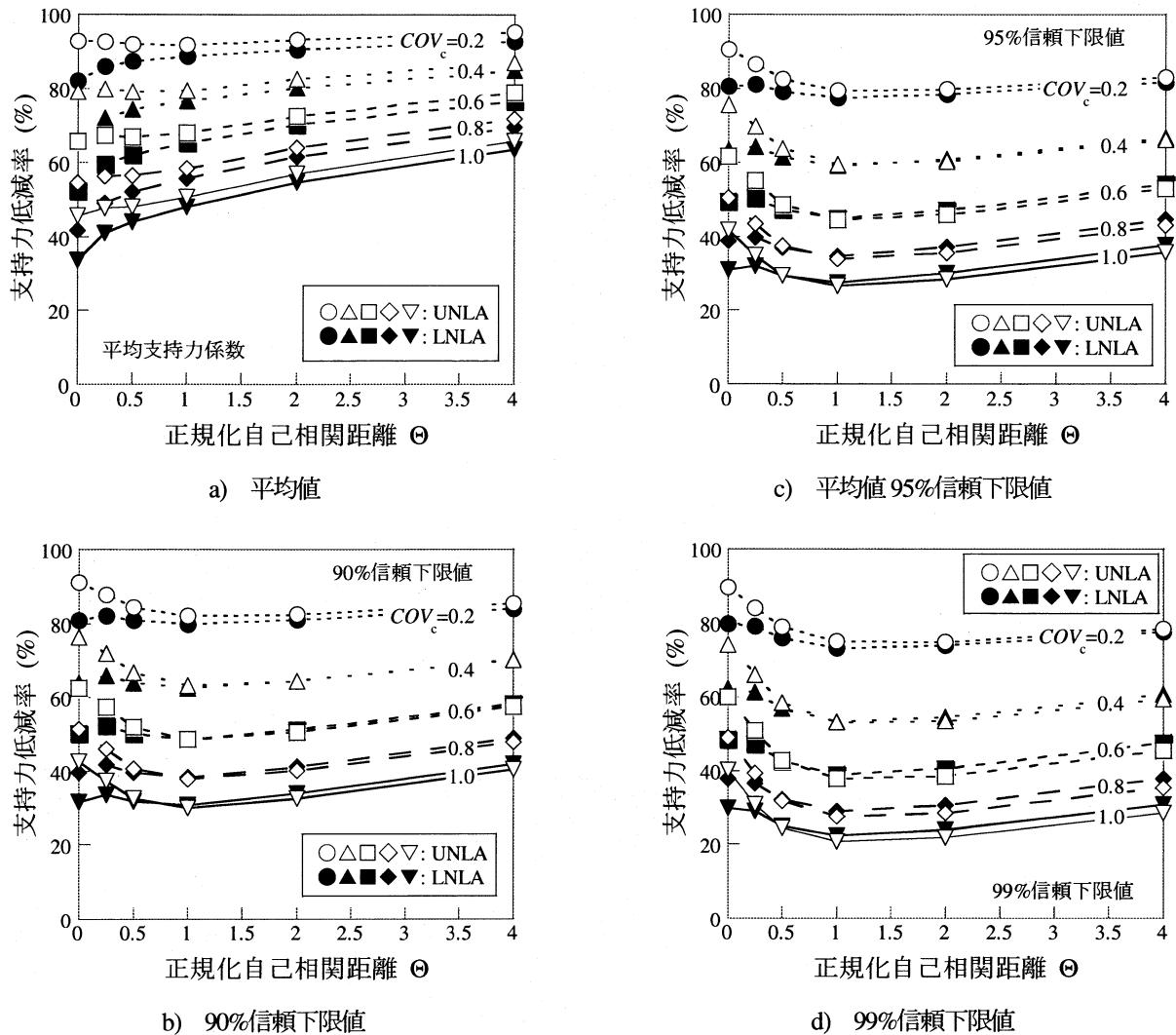


図-7 支持力低減率と正規化自己相関距離

は、変動係数と自己相関距離に影響され、影響が最も顕著になる自己相関距離が存在することを示唆する。また、実務においては、強度のばらつきを考慮し安全側の支持力を計算することを目的として、地盤の平均強度から標準偏差を引いた設計強度($\mu_c - \alpha \cdot \sigma_c$)と理論解 $N_{c\text{Det}}$ を用いた支持力算定がよく行われる。図中には、設計強度($=\mu_c - 1 \cdot \sigma_c; \alpha=1$)として評価した支持力低減率を示すが、99%信頼下限値による支持力低減率が小さくなる範囲があり、 $\alpha > 1$ 以上を設定する必要がある。

図-7に支持力低減率と正規化自己相関距離の関係を示す。図-7a), b), c)およびd)は、それぞれ平均支持力係数 μ_{Nc} 、90%、95%および99%信頼下限値を用いた支持力低減率である。ランダム地盤の結果は、 $\Theta=0$ の座標にプロットした。上界と下界数値極限解析による解析結果の差は、 $\Theta < 0.5$ で特に大きいが、それ以外の箇所では、支持力低減率を狭い区間値として評価できた。図7a)に示す平均値支持力で評価した支持力低減率は、変動係数によらず正規化自己相関距離の増加とともに、徐々に增加了。一方、図7b), c)およびd)に示す90%、95%および99%信頼下限値による支持力低減率は、変動係数によらず正規化自己相関距離の増加とともに、徐々に增加了。

数の値によらず、正規化支持力係数 Θ が1.0付近で最小値を示した。しかしながら、本解析で行った $0 < \Theta \leq 4.0$ の範囲では、支持力低減率の差は10%程度であり、自己相関距離は変動係数ほど大きく支持力係数には影響しないといえる。つまり、強度の空間的なばらつきの指標としては、自己相関距離よりも変動係数の方が支持力係数に対して大きな影響をおよぼすと考えられる。

4. 強度の空間的ばらつきによる支持力低減率

本節では、地盤の支持力の安全性について確率統計的な観点からの検討を試みる。空間的なばらつきを有する地盤の支持力係数が、均一強度の地盤として得られた支持力係数 $N_{c\text{Det}}$ を下回る確率 $p_r[N_c < N_{c\text{Det}}/F_s]$ を計算した。支持力係数 N_c が対数正規分布に近似できる場合、確率 $p_r[N_c < N_{c\text{Det}}/F_s]$ は、以下の式になる。

$$p_r[N_c < N_{c\text{Det}}/F_s] = \Phi\left(\frac{\ln([2 + \pi]/F_s) - \mu_{\ln N_c}}{\sigma_{\ln N_c}}\right) \quad (7)$$

ここで、支持力係数を対数正規分布で近似したのは、支持

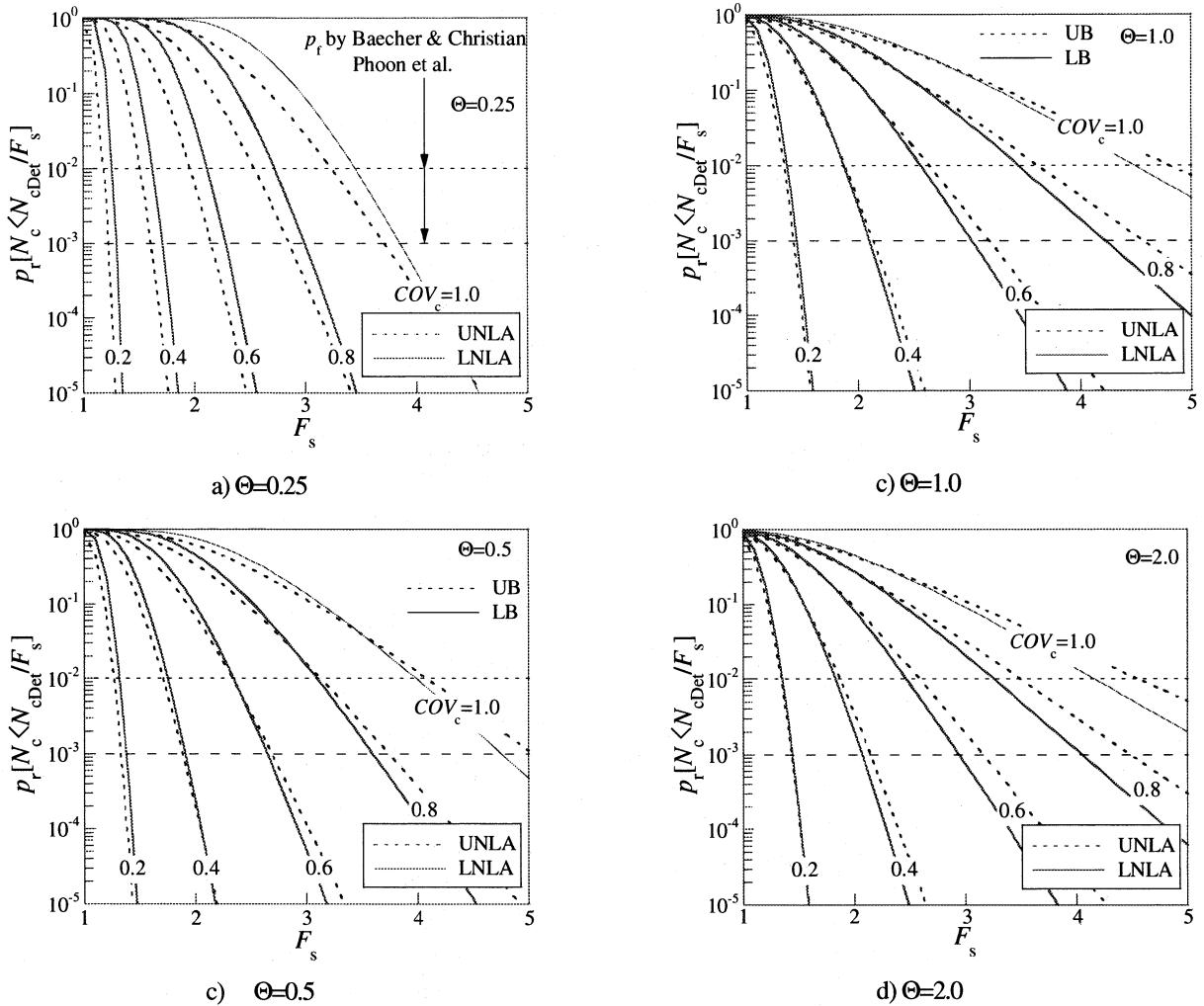


図-8 確率 $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ と必要安全率

力係数が必ず正の値をとるようにしたためである。式中の Φ は、累積標準正規分布関数である。また、 $\mu_{\ln N_c}$ と $\sigma_{\ln N_c}$ は、対数正規分布に変換した際の支持力係数の平均値と変動係数であり、 $COV_{N_c} = \sigma_{N_c}/\mu_{N_c}$ を用い、次の式で計算できる。

$$\sigma_{\ln N_c} = \sqrt{\ln(1 + COV_{N_c}^2)} \quad (8)$$

$$\mu_{\ln N_c} = \ln \mu_{N_c} - 0.5 \cdot \sigma_{\ln N_c}^2 \quad (9)$$

図-8 には、正規化自己相関距離 Θ が 0.25~2.0 における確率 $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ と安全率の関係を示す。図中には、Baecher & Christian¹²⁾ と Phoon et al.¹⁶⁾ による、限界状態設計法での浅い基礎に対する目標確率 $p_f = 10^{-2} \sim 10^{-3}$ を示す。 $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ は、安全率が増加すると減少し、その減少傾向は変動係数が小さいほど顕著であった。また、 $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ は、正規化自己相関距離が 0.25 から 1.0 へと増加するほど増加し、 $\Theta=1.0$ のとき最も大きな結果となった。地盤強度の変動係数 COV_c が、自然堆積地盤のような 0.2~0.4 の範囲では、安全率 F_s が 2.0~3.0 において目標確率 p_f が満足されており、許容応力度設計法における地盤の基礎に関する安全率 $F_s=2 \sim 3$ に整合する形となった。しかしながら、人工的に改良を施した改良地盤のような $COV_c > 0.6$ 以上になると、目標確率を満足するためには 3.0 以上の安全

率が必要となると考えられる。

本論文で計算した $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ と Griffiths et al.³⁾ による有限要素法と LAS 法を組合せた確率有限要素法で計算した結果を比較するために、図-9 には、正規化自己相関距離 Θ が 1.0, 2.0 および 4.0 における $p_r[N_c < N_{\text{Def}}/F_s]$ と地盤の変動係数の関係である。 $\Theta=1.0$ の条件では、Griffiths et al. の結果とほぼ近い値となったが、 $\Theta=2.0$ と 4.0 では、本論文の解析結果の方が小さい確率を示した。これらの違いについては、有限要素法を用いた場合の地盤支持力の決定法や地盤定数の空間的ばらつきの再現方法の違いに着目して検討していく必要がある。

5. まとめ

本論文では、強度の空間的なばらつきを考慮した地盤の支持力特性を、確率数値極限解析を用いて明らかにした。得られた結論をまとめると以下のようになる。

- 1) 強度の空間的ばらつきを考慮した地盤の支持力係数は、正規分布および対数正規分布の両者で適合した。
- 2) 地盤の平均支持力係数は、強度の変動係数が増加するほど直線的に減少し、その傾向は自己相関距離が小さいほど顕著である。一方では、支持力係数の 99% 信頼下限値に

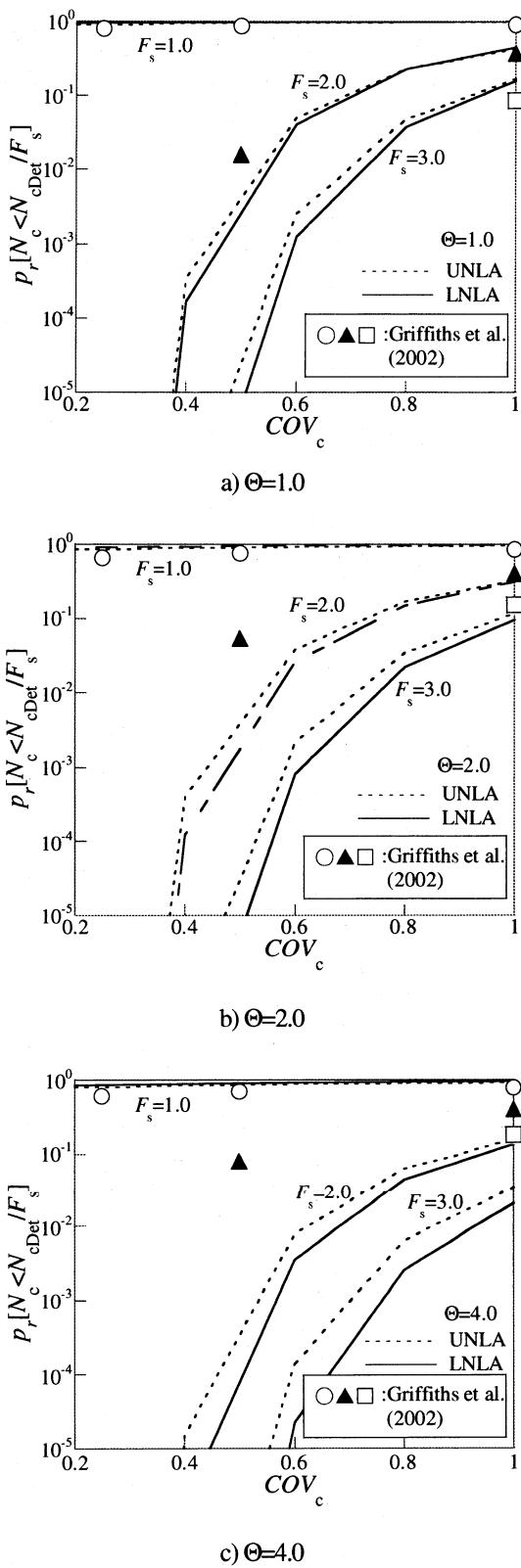


図-9 $p_r[N_c < N_{c\text{Det}}/F_s]$ と変動係数の関係

は、支持力減少率が最大となる自己相関距離が存在し、今回の解析では $\Theta=1.0$ であった。

3) 浅い基礎の安全率は、強度の変動係数 0.2~0.4 の範囲では、従来の安全率 F_s の範囲 2~3 において目標確率 $10^2 \sim 10^3$ が満足されるが、変動係数が 0.6 以上になると、3.0 以上の安全率が必要となると考えられる。

参考文献

- 1) 松尾稔: 地盤工学—信頼性設計の理念と実際、技報堂出版, 1984.
- 2) Griffiths, D.V. and Fenton, G.A.: Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited. Geotechnique, 51(4), 351-359, 2001.
- 3) Griffiths, D.V., Fenton, G.A. and Manoharan, N.: Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: probabilistic study, J. Geotech. Eng., ASCE, 128(9), 743-755, 2002.
- 4) Popescu, R., Deodatis, G. and Nobahar, A.: Effects of random heterogeneity of soil properties on bearing capacity, Probabilistic Engineering Mechanics, 20, 324-341, 2005.
- 5) Matthies, H.G., Brenner, C.E., Bucher, C.G. and Guedes Soares, C.: Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements, Structural Safety, 19(3), 283-336, 1997.
- 6) Fenton, G.A. and Vanmarcke, E.H.: Simulation of random fields via local average subdivision. J. Eng. Mech., ASCE, 116(8), 1733-1749, 1990.
- 7) Foy, K.C., Salgado, R. and Scott, B.: Assessment of Variable Uncertainties for Reliability-Based Design of Foundations, J. Geotech and Geoenv. Eng., ASCE, 128(9), 743-755, 2002.
- 8) Lyamin, A.V. and Sloan, S.W.: Lower bound limit analysis using non-linear programming, Int'l. Journal for Numerical Methods in Engineering, 55(5), 573-611, 2002.
- 9) Sloan, S.W. and Kleeman, P.W.: Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 127, 293-314, 1995.
- 10) Ukrichon, B., Whittle, A.J. and Sloan, S.W.: Undrained limit analyses for combined loading of strip footing on clay, J. Geotech. Eng., ASCE, 124(3), 265-276, 1998.
- 11) Vanmarcke, E.H.: Random fields: Analysis and synthesis, MIT press, Cambridge, Mass, 1984.
- 12) Baecher, G.B. and Christian, J.T.: Reliability and statistics in geotechnical engineering, John Wiley & Sons, Ltd., 2003.
- 13) Kasama, K. and Whittle, A.J.: Bearing Capacity of Spatially Random Cohesive Soil Using Numerical Limit Analyses, J. Geotech. and Geoenv. Eng., ASCE, 2008, (accepted).
- 14) Phoon, K.K. and Kulhawy, F.H.: Characterization of geotechnical variability, Canadian Geotechnical Journal, 36, 612-624, 1999.
- 15) 馬場崎亮一, 寺師昌明, 鈴木健夫, 前川淳, 川村政史, 深沢栄造: 安定処理土の強度に及ぼす影響因子, セメント系安定処理土に関するシンポジウム発表論文集, 地盤工学会, 20-41, 1996.
- 16) Phoon, K.K., Kulhawy, F.H. and Grigoriu, M.D.: Reliability-based design for transmission line structure foundations, Computers & Geotechnics, 26, 169-185, 2000.

(2008年4月14日受付)