国際貿易空間均衡モデルにおける線形相補性問題の解の存在とそのアルゴリズムについて

川口, 雅正
九州大学大学院農学研究院農業資源経済学部門農業関連産業組織学講座農業計算学研究室

庄野, 千鶴
精華女子短期大学 | 九州大学大学院農学研究院農業資源経済学部門農業関連産業組織学講座農業計算学研究室

https://doi.org/10.15017/21071

出版情報：九州大学大学院農学研究院学芸雑誌. 55 (1), pp.77-81, 2000-11. 九州大学大学院農学研究院
バージョン：
権利関係：

九大農学芸誌（Sci. Bull. Fac. Agr., Kyushu Univ.）
第55巻　第1号　77-81　(2000)

国際貿易空間均衡モデルにおける線形相補性問題の解の存在とそのアルゴリズムについて

川　口　雅　正*・庄　野　千　鶴**
九州大学大学院農学研究院農業資源経済学部門
農業関連産業組織学講座農業計算学研究室
（2000年7月7日受付，2000年8月18日受理）

On the Existence of A Solution to Linear Complementarity Problem in Spatial Equilibrium Model of International Trade and Its Algorithm

Tsunemasa KAWAGUCHI* and Chizuru SHONO**
Laboratory of Quantitative Analysis of Agribusiness Organization, Division of Industrial Organization of Agribusiness, Department of Agricultural and Resource Economics, Faculty of Agriculture, Kyushu University, Fukuoka 812-8581

1. 課　　　題

庄野・川口（1999a，1999b，2000）の関税を導入した国際貿易空間均衡モデルの均衡条件はすべて線形相補性問題（Linear Complementarity Problem：以降LCPと略記）として定式化された．そしてそれらの論文のなかで，数多くの具体的な事例を示し均衡解が得られることを示してきた．しかしそのLCPに必ず解が存在するという一般的かつ数学的な証明は行っていなかった．

そこで，本稿ではそのLCPに解が存在することを証明し，またそのアルゴリズムについて考察する．なお，本稿は平成11年12月に東京大学で開催されたTEA研究会での筆者の報告を加筆訂正したものである．

2. 問題の変形

庄野・川口（1999a，1999b，2000）のモデルの均衡条件はすべて次のようなLCPとして定式化されている．

$$W=B+AP \quad \cdots\cdots(1\text{-}1)$$

$$W'P=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{-}2)$$

$$W\geqq 0,\ P\geqq 0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}3)$$

ここで，WとPは変数列ベクトル，Bは定数列ベクトル，Aは定数正方行列，行列やベクトルの右上の ' はその転置を示し，これらのベクトルや正方行列の次数は庄野・川口（1999a，1999b）のモデルでは $(3n+2n^2)$，庄野・川口（2000）のモデルでは $(4n+2n^2)$ である．ただしnはモデルにおける国の数で $n\geqq 2$ なる条件を満たすものとする．

庄野・川口（1999a，1999b，2000）のモデルの均衡条件はそのままでは取り扱いにくいので，次のように変形しておく．この変形は説明を簡単にするためのものであり，解の存在やアルゴリズムという点では元のモデルと同じである．まず（1-1）式を図2−1のように小行列を利用して表す．

なお，図2−1における3nの部分は庄野・川口（1999a，1999b）のモデルでは3nであるが，庄野・川口（2000）のモデルでは4nである．

** 九州大学大学院農学研究院学術共同研究者，精華女子短期大学専任講師
* Corresponding author (E-mail: kawamasa@agr.kyushu-u.ac.jp)
** Academic joint researcher, Faculty of Agriculture, Graduate School, Kyushu University; Full-time Lecturer, SEIKA Women's Junior College

図2－1　小行列を用いて表示した（1-1）式

$$\begin{array}{c} 3n \updownarrow \\ 2n^2 \updownarrow \end{array} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\ \overleftrightarrow{3n} \quad \overleftrightarrow{2n^2} \end{array} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \updownarrow 3n \\ \updownarrow 2n^2 \end{array}$$

ここで，

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ なる関係が成立している．

そして，図2−1の小行列 A_{21}（および B_2）の要素の中に分数で表されたものがあるので，分母の値をそれぞれの行に乗じて A_{21}（および B_2）の要素の分数をなくす．つまり，A_{21} と B_2 の要素の分数表示をなくすよう（1-1）式の最後の $2n^2$ 個の行に上の方の行から順に $(1+\alpha_{11})$，$(1+\alpha_{21})$，・・・・・，$(1+\alpha_{n1})$，・・・・・，$(1+a_{nn})$ を乗じる．ただし，小行列 A_{22} に分数の要素が残っていてもよい．

すると，（1-1）式は次の図2−2のように変形される．

図2－2　小行列を用いて表示した変形後の（1-1）式

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

なお，この式を新たに $W=B+AP$ と表し，このように変形された W を用いて，$W'P=0$，$W \geqq 0$，$P \geqq 0$ なる条件も表されるものとする．

ここで，図2−2の網掛け部分は各行が $(1+\alpha_{ij})$ ないし $(1+a_{ij})$ 倍されて A_{21} と B_2 に分数の要素がなくなっていることを示す．このように変形されたモデルを改めて（1-1），（1-2），（1-3）式で表すものとする．

以上のような変形の仕方を方程式ごとに分かりやすく説明すると，例えば庄野・川口（1999a）の CIF 価格ベースのモデルの均衡条件は次のように変形される．特に（7）から（24）までの各式が，定数 $(1+\alpha_{ij})$ ないし $(1+a_{ij})$ を乗じた結果として，以下のように書き改められる点に注意してほしい．なお，スラック変数を含むすべての変数は非負であるものとする．

第j国における市場価格 PD_j

（1）$V_1=-\gamma_1+\lambda_1 PD_1+X_{11}+X_{21}+X_{31}+Xs_{11}$
$+Xs_{21}+Xs_{31}$
$PD_1V_1=0$

（2）$V_2=-\gamma_2+\lambda_2 PD_2+X_{12}+X_{22}+X_{32}+Xs_{12}$
$+Xs_{22}+Xs_{32}$
$PD_2V_2=0$

（3）$V_3=-\gamma_3+\lambda_3 PD_3+X_{13}+X_{23}+X_{33}+Xs_{13}$
$+Xs_{23}+Xs_{33}$
$PD_3V_3=0$

第i国における産地価格 PS_i

（4）$v_1=-\mu_1+\eta_1 PS_1-X_{11}-X_{12}-X_{13}-Xs_{11}$
$-Xs_{12}-Xs_{13}$
$PS_1v_1=0$

（5）$v_2=-\mu_2+\eta_2 PS_2-X_{21}-X_{22}-X_{23}-Xs_{21}$
$-Xs_{22}-Xs_{23}$
$PS_2v_2=0$

（6）$v_3=-\mu_3+\eta_3 PS_3-X_{31}-X_{32}-X_{33}-Xs_{31}$
$-Xs_{32}-Xs_{33}$
$PS_3v_3=0$

第i国から第j国の第1次税率市場への出荷量 X_{ij}

（7）$Y'_{11}=(T_{11}+I_{11})(1+\alpha_{11})+\beta_{11}-PD_1$
$+PS_1(1+\alpha_{11})$
$X_{11}Y'_{11}=0$

（8）$Y'_{21}=(T_{21}+I_{21})(1+\alpha_{21})+\beta_{21}-PD_1$
$+PS_2(1+\alpha_{21})+SP_1$
$X_{21}Y'_{21}=0$

（9）$Y'_{31}=(T_{31}+I_{31})(1+\alpha_{31})+\beta_{31}-PD_1$
$+PS_3(1+\alpha_{31})+SP_1$
$X_{31}Y'_{31}=0$

（10）$Y'_{12}=(T_{12}+I_{12})(1+\alpha_{12})+\beta_{12}-PD_2$
$+PS_1(1+\alpha_{12})+SP_2$
$X_{12}Y'_{12}=0$

（11）$Y'_{22}=(T_{22}+I_{22})(1+\alpha_{22})+\beta_{22}-PD_2$
$+PS_2(1+\alpha_{22})$
$X_{22}Y'_{22}=0$

（12）$Y'_{32}=(T_{32}+I_{32})(1+\alpha_{32})+\beta_{32}-PD_2$
$+PS_3(1+\alpha_{32})+SP_2$
$X_{32}Y'_{32}=0$

（13）$Y'_{13}=(T_{13}+I_{13})(1+\alpha_{13})+\beta_{13}-PD_3$
$+PS_1(1+\alpha_{13})+SP_3$
$X_{13}Y'_{13}=0$

（14）$Y'_{23}=(T_{23}+I_{23})(1+\alpha_{23})+\beta_{23}-PD_3$

均衡条件式の番号	スラック変数列ベクトル W		PD1	PD2	PD3	PS1	PS2	PS3	SP1	SP2	SP3	X11	X21	X31	X12	X22	X32	X13	X23	X33	Xs11	Xs21	Xs31	Xs12	Xs22	Xs32	Xs13	Xs23	Xs33		変数列ベクトル P		定数列ベクトル B
(1) →	V1		λ1									1	1	1							1	1	1								PD1		-γ1
(2) →	V2			λ2											1	1	1							1	1	1					PD2		-γ2
(3) →	V3				λ3													1	1	1							1	1	1		PD3		-γ3
(4) →	v1					η1						-1			-1			-1			-1			-1			-1				PS1		-μ1
(5) →	v2						η2						-1			-1			-1			-1			-1			-1			PS2		-μ2
(6) →	v3							η3						-1			-1			-1			-1			-1			-1		PS3		-μ3
(25) →	Z1								0				-1	-1																	SP1		CA1
(26) →	Z2									0					-1		-1														SP2		CA2
(27) →	Z3										0							-1	-1												SP3		CA3
(7) →	Y'11		-1			(1+α11)																									X11		(T11+I11)(1+α11)+β11
(8) →	Y'21		-1				(1+α21)		1																						X21		(T21+I21)(1+α21)+β21
(9) →	Y'31		-1					(1+α31)	1																						X31		(T31+I31)(1+α31)+β31
(10) →	Y'12			-1		(1+α12)				1																					X12		(T12+I12)(1+α12)+β12
(11) →	Y'22			-1			(1+α22)																								X22		(T22+I22)(1+α22)+β22
(12) →	Y'32			-1				(1+α32)		1																					X32		(T32+I32)(1+α32)+β32
(13) →	Y'13	=			-1	(1+α13)					1																			×	X13	+	(T13+I13)(1+α13)+β13
(14) →	Y'23				-1		(1+α23)				1																				X23		(T23+I23)(1+α23)+β23
(15) →	Y'33				-1			(1+α33)																							X33		(T33+I33)(1+α33)+β33
(16) →	Ys'11		-1			(1+a11)																									Xs11		(T11+I11)(1+a11)+b11
(17) →	Ys'21		-1				(1+a21)																								Xs21		(T21+I21)(1+a21)+b21
(18) →	Ys'31		-1					(1+a31)																							Xs31		(T31+I31)(1+a31)+b31
(19) →	Ys'12			-1		(1+a12)																									Xs12		(T12+I12)(1+a12)+b12
(20) →	Ys'22			-1			(1+a22)																								Xs22		(T22+I22)(1+a22)+b22
(21) →	Ys'32			-1				(1+a32)																							Xs32		(T32+I32)(1+a32)+b32
(22) →	Ys'13				-1	(1+a13)																									Xs13		(T13+I13)(1+a13)+b13
(23) →	Ys'23				-1		(1+a23)																								Xs23		(T23+I23)(1+a23)+b23
(24) →	Ys'33				-1			(1+a33)																							Xs33		(T33+I33)(1+a33)+b33

27×27行列 A

W'P=0（スラック変数ベクトル W の第 i 番目のスラック変数と変数列ベクトル P の第 i 番目の変数の積はすべての i について 0 である）
（W≧0, P≧0　変数は非負である）

表２－１　線形相補性問題として定式化された均衡条件（完全競争市場の場合）

$+PS_2(1+\alpha_{23})+SP_3$

$X_{23}Y'_{23}=0$

(15) $Y'_{33}=(T_{33}+I_{33})(1+\alpha_{33})+\beta_{33}-PD_3$
$+PS_3(1+\alpha_{33})$

$X_{33}Y'_{33}=0$

第 i 国から第 j 国の第 2 次税率市場への出荷量 Xs_{ij}

(16) $Ys'_{11}=(T_{11}+I_{11})(1+a_{11})+b_{11}-PD_1$
$+PS_1(1+a_{11})$

$Xs_{11}Ys'_{11}=0$

(17) $Ys'_{21}=(T_{21}+I_{21})(1+a_{21})+b_{21}-PD_1$
$+PS_2(1+a_{21})$

$Xs_{21}Ys'_{21}=0$

(18) $Ys'_{31}=(T_{31}+I_{31})(1+a_{31})+b_{31}-PD_1$
$+PS_3(1+a_{31})$

$Xs_{31}Ys'_{31}=0$

(19) $Ys'_{12}=(T_{12}+I_{12})(1+a_{12})+b_{12}-PD_2$
$+PS_1(1+a_{12})$

$Xs_{12}Ys'_{12}=0$

(20) $Ys'_{22}=(T_{22}+I_{22})(1+a_{22})+b_{22}-PD_2$
$+PS_2(1+a_{22})$

$Xs_{22}Ys'_{22}=0$

(21) $Ys'_{32}=(T_{32}+I_{32})(1+a_{32})+b_{32}-PD_2$
$+PS_3(1+a_{32})$

$Xs_{32}Ys'_{32}=0$

(22) $Ys'_{13}=(T_{13}+I_{13})(1+a_{13})+b_{13}-PD_3$
$+PS_1(1+a_{13})$

$Xs_{13}Ys'_{13}=0$

(23) $Ys'_{23}=(T_{23}+I_{23})(1+a_{23})+b_{23}-PD_3$
$+PS_2(1+a_{23})$

$Xs_{23}Ys'_{23}=0$

(24) $Ys'_{33}=(T_{33}+I_{33})(1+a_{33})+b_{33}-PD_3$
$+PS_3(1+a_{33})$

$Xs_{33}Ys'_{33}=0$

シャドウプライス SP_j

(25) $Z_1=CA_1-X_{21}-X_{31}$

$SP_1Z_1=0$

(26) $Z_2=CA_2-X_{12}-X_{32}$

$SP_2Z_2=0$

(27) $Z_3=CA_3-X_{13}-X_{23}$

$SP_3Z_3=0$

このような方程式ごとの変形に対応して，庄野・川口（1999a）の表 4－2 の行列とベクトル記号を用いて表示した CIF 価格ベースの均衡条件は，次の表 2－1 のように書き改められることになる．

3．解の存在証明

行列 A が次の条件を満たすことは直接容易に確かめられる．

（a）任意の $P\geqq 0$ に対して $P'AP\geqq 0$ が成立する．
つまり，行列 A は Copositive 行列である．

行列 A と定数ベクトル B が次の条件を満たすことも直接容易に確かめられる．

（b）$P'AP=0$，$AP\geqq 0$，$P\geqq 0$ なる任意の P に対して $P'B\geqq 0$ が成立する．

なお，庄野・川口（1999a，1999b，2000）のモデルでは，$P'AP=0$，$P\geqq 0$ なる任意の P に対して $P'B\geqq 0$ が成立する．

条件（a）と（b）が成立すれば，この LCP は解をもつ．つまり（1-1），（1-2），（1-3）式を満たすベクトル W と P の値が存在する（Cottle, *et al.*, 1992, 179頁，Theorem 3.8.6 を参照）．

4．アルゴリズムと今後の課題

これまでの計算では，ベクトル B のパラメトリックな変化に対する解の軌跡を求めることも含めて，例外なく symmetric PPPM 法で解が容易に得られた．この解法（symmetric parametric principal pivoting method, Cottle, *et al.*, 1992, 293-296頁，および川口・李，1992，177-198頁，特に192-195頁，を参照）は行列 A が sufficient 行列（Cottle, *et al.*, 1992, 157頁を参照）であれば有効であることが知られている．しかし，直感的には A が sufficient 行列ないし非負定符号行列に近いと推察されるが，行列 A が sufficient 行列であるかどうか詳細な分析は行っていない．

大規模な計算（行列 A の次数が数百以上となる場合）では上述のような Pivoting method よりも行列 A の分割（splitting）を利用する繰り返し法（変分不等式法や内点解法なども含む）が効率的と考えられる．そのような繰り返し法による計算もこれまで試みているが，本格的な分析は今後の課題である．

文　献

Cottle, R. W., J.-S. Pang and R. E. Stone 1992 *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, Inc., Boston

川口雅正・李 鐘相 1992 空間均衡分析における均

衡解の一意性について—Ｉ．理論的考察—．九大農学芸誌，46(3・4)：177-198
庄野千鶴・川口雅正　1999a　関税を導入した国際貿易空間均衡モデルの展開—完全競争市場の場合—．九大農学芸誌，53(1～4)：79-88
庄野千鶴・川口雅正　1999b　関税を導入した国際貿易空間均衡モデルの展開—寡占市場の場合—．九大農学芸誌，54(1・2)：85-96
庄野千鶴・川口雅正　2000　関税を導入した国際貿易空間均衡モデルへの輸出割当と最低輸出価格の導入—完全競争市場及び寡占市場の場合—．九大農学芸誌，54(3・4)：157-170

Summary

Shono and Kawaguchi (1999a, 1999b, 2000) present Spatial Equilibrium Model of international trade under tariff quota system with specific and ad valorem duties, and specify the equilibrium condition of the model as Linear Complementarity Problem (LCP). They also present several examples of the LCP and solve the example problems to show that the LCP has a solution. But they give no general mathematical proof of the existence of a solution to the LCP.

In this paper, we give a general mathematical proof of the existence of a solution to the LCP, and we discuss efficient algorithm to solve the LCP on the basis of our computational experience.