九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

交互ダ・ヴィンチ・コード64

岩本, 誠一
九州大学大学院経済学研究院 : 名誉教授

木村, 寛
秋田県立大学システム科学技術部 : 准教授

https://doi.org/10.15017/20002

出版情報：經濟學研究. 78 (1), pp.1-26, 2011-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

交互ダ・ヴィンチ・コード64

岩　本　誠　一*
木　村　　寛

概 要

映画「ダ・ヴィンチ・コード」ではフィボナッチ数列の最初の 8 つが暗号【ダ・ヴィンチ・コード】として用いられていた。この暗号は、ある問題対の最適解として浮かび上がってくることが示されてきた。本論文では、この暗号にプラス・マイナスの符号を交互につけた「交互暗号」を考え、これが最適解になる問題対を導入し、数理計画としてのその双対理論を述べる。これまで、(1) フィボナッチ相補、(2) フィボナッチ・シフト、(3) 交互フィボナッチ相補、の 3 つの双対性を報告してきたが、本論文では (4) 交互フィボナッチ・シフト双対性 を導く。すなわち、主問題の最適解には【交互ダ・ヴィンチ・コード】が現れ、双対問題の最適解にはこの交互コードを 1 つシフトしたコードが現れる。さらに最適化の一階条件から 6 : 4 型の交互フィボナッチ分割が新たに導入され、両問題の最適解がこの分割によって得られることを示す。また、フィボナッチ数倍した拡大ラグランジュ乗数を用いて双対問題を導いている。4 変数問題については、主と双対 および 反転主と反転双対 の 2 つの対の間にも交互フィボナッチ・シフト双対性が成り立っていることを示している。

1　はじめに

黄金比は古今東西「美」の象徴とされてきた。フィボナッチ数の比はその生成マシンとして知られ、黄金比の近似あるいは代用とされている [1,2,6–8,24–27]。しかし、最適化分野においては、フィボナッチ数列は必ずしもよく用いられてきたわけではない。

最近、数理計画法の双対理論にフィボナッチ数列が重要な役割を果たしていることが報告された [13–19]。そこでは映画「ダ・ヴィンチ・コード」の暗号に焦点をあて、ある (主) 問題とその双対問題の最適解を交互に組み合わせると、この暗号が出てくることを明らかにしている。これをフィボナッチ**相補**双対性という [16]。また、別の問題対を解けば、主の最適解には直接この暗号が現れ、双対にはこれを 1 桁シフトした暗号が出ることを示した。これをフィボナッチ・**シフト**双対性という [17]。これらの双対理論は 2 次計画に広く適用できることが判明している。[18] では、この暗号にプラス・マイナスの符号を交互にをつけて「交互ダ・ヴィンチ・コード」を導入している。そこでは主と双対の最適解を交互に編むと、この交互暗号が得られ、**交互**フィボナッチ**相補**双対性が報告されている。

*本研究は、科学研究費補助金「平成 23 年度基盤研究 (C)」課題番号 22540144 の助成を受けた。

本論文では、交互暗号が最適解自身に直接現れ、**交互**フィボナッチ・**シフト**双対性が成立することを導く (表 1)。交互フィボナッチ相補双対性の最適解は主問題も双対問題も **4 : 6 型**フィボナッチ分割法によって得られていたが、本論文では新たに **6 : 4 型**を導入して、この型の交互フィボナッチ分割法によって交互フィボナッチ・シフト双対性を満たす最適解が得られることを示す[1]。

第 2 節では 8 変数の 2 次最小化（主）問題と最大化（双対）問題の対を導入している。第 3 節では、この最適解の間に後向きの交互フィボナッチ・シフト双対性があることを示している。また、主と双対の反転問題の間には前向きの交互フィボナッチ・シフト双対性を示している。第 4 節では、最適化の 1 階必要条件から 6 : 4 型の交互フィボナッチ条件を導き、この条件によって所与の区間を逐次分割している。すなわち、最適解がこの (6 : 4 型の) 交互フィボナッチ分割によって容易に得られることがわかる。第 5 節では、主問題から双対問題を直接導いている。ここではラグランジュ乗数を広義に考え、(2×フィボナッチ数）倍したものを双対変数としている。これが本論文のアイディアである。最後の第 6 節では、4 変数問題に対して主と双対の対およびその反転どうしの対に対しても交互フィボナッチ・シフト双対性が成立していることを示している。以下では、フィボナッチを「フィボ」に、ダ・ヴィンチ・コードを「ダ・コード」に適宜に略している。

型 \ 分割（双対性）	46（相補 complementary）	64（シフト shift）
正準 canonical	フィボ相補双対性 （ダ・コード [16]）	フィボシフト双対性 （ダ・コード 64 [17]）
交互 alternate	交互フィボ相補双対性 （交互ダ・コード [18]）	交互フィボシフト双対性 （交互ダ・コード 64[本論文]）

表 1 フィボナッチ双対性とダ・ヴィンチ・コード

2　ダ・ヴィンチ・コード

2.1　フィボナッチ数列

映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006 年) では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

[1]本表題の「交互ダ・ヴィンチ・コード 64」の 64 は 6 : 4 型フィボナッチ分割法によって交互ダ・ヴィンチ・コードが得られることを示している。64(ロクヨン) か 46(ヨンロク) かは 3 : 2 か 2 : 3 に準じている。この 2, 3 は相い隣るフィボナッチ数 $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ である。

$$1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 1$$

が現れている。前号 [16,18] では、この 10 個の数字は 8 つの数字からなる列

$$\boxed{1}\quad \boxed{1}\quad \boxed{2}\quad \boxed{3}\quad \boxed{5}\quad \boxed{8}\quad \boxed{13}\quad \boxed{21}$$

すなわち、フィボナッチ数列 (表 2) の第 1 項 $F_1 = 1$ から第 8 項 $F_8 = 21$ までの数列

$$\boxed{F_1}\quad \boxed{F_2}\quad \boxed{F_3}\quad \boxed{F_4}\quad \boxed{F_5}\quad \boxed{F_6}\quad \boxed{F_7}\quad \boxed{F_8}$$

に他ならないことを紹介した。さらに、このフィボナッチ数列は数理計画の双対理論と深くかかわっていることも示した。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 2　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{1}$$

の解で定まっている [6,8,10–13,20,24,25]。

本論文でも一対の主（最小化）問題と双対（最大化）問題を解くが、その最小解には交代列の【ダ・ヴィンチ・コード】が現れ、最大解にはこの交代ダ・ヴィンチ・コードを 1 つシフトしたコードが現れることを示す。

2.2　主問題 (P_8)

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える（ [9, p.90–93] [14–16,18] 参照)。

主問題 (P_8)　定数 $c \in R^1$ を与える。最初の変数 x_0 が $x_0 = c$ に固定されているとき、以下の 8 変数 $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_8)$ の値を定めて、全平方和（総費用に相当する量）

$$\begin{aligned} &F_8(x_0 + x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 + F_7(x_1 + x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 + \cdots \\ &\qquad + F_2(x_6 + x_7)^2 + \frac{F_1^2}{F_2}x_7^2 + F_1(x_7 + x_8)^2 + \frac{F_0^2}{F_1}x_8^2 \end{aligned}$$

を最小にせよ。このとき、最小値 m_8 および最小（値を与える）点 $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \ldots,\ \hat{x}_8)$ を求めよ。

この最小化問題は次のようにも表される。

$$
(\mathrm{P}_8) \qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n + x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right] + \frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < x_n < \infty \qquad n = 1, 2, \ldots, 8 & \\ & \text{(ii)}\quad x_0 = c. & \end{array}
$$

主問題 (P_8) は 点

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_7,\ \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{-21},\ \boxed{13},\ \boxed{-8},\ \boxed{5},\ \boxed{-3},\ \boxed{2},\ \boxed{-1},\ \boxed{1}\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

で最小値 $m_8 = \dfrac{\boxed{21\times 13}}{\boxed{34}}c^2$ に達している。

この最敵解はいくつかの方法で求められる。たとえば、次のようである。

1. 完全平方による方法 [4]
2. 微分・偏微分法 (calculus) [4]
3. 行列解析 (matrix analysis) [4]
4. 動的計画法 (dynamic programming) [3,9]
5. 交互フィボナッチ分割法 (alternately Fibonacci section) [15,16,18]

交互フィボ分割法は後述の交互フィボナッチ条件に基づいている。この条件は最適化の 1 階条件を本問題固有の 2 次計画問題に対してさらに詳しく表現したものである。交互フィボ分割法は交互フィボ条件に従って所与の区間を逐次分割する方法である。この分割法は 1 階条件に基づいているという意味では微分・偏微分法とも言える。しかし、この条件は隣接 2 項間の比例関係を与えているのでこの分割法は解法としては簡便である。本論文では、5. 交互フィボ分割法で解く。

2.3 双対問題 (D_8)

今度は、主問題に対する双対問題 (dual problem) として、次の最大化問題を導入しよう ([9, p.211–215, 220] [14–16, 18] 参照)。

双対問題 (D_8)　定数 c は主問題で与えたものとする。条件 $\mu_7 = 0$ の下で、8 変数 $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ \ldots, \ \mu_7)$ の値を定めて、2 次の量**総アドバンテージ** (total advantage)

$$2cF_8\mu_0 - F_8\left[\mu_0^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right)^2\right] - F_7\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2\right)^2\right]$$
$$- \cdots - F_2\left[\mu_6^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_6 + \mu_7\right)^2\right] - F_1F_2\mu_7^2$$

を最大にせよ。このとき、最大値 M_8 および最大点 $\mu^* = (\mu_0^*, \ \mu_1^*, \ \ldots, \ \mu_7^*)$ を求めよ。

この最大化問題は次のようにも表される。

$$(\mathrm{D}_8)\quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad 2cF_8\mu_0 - \displaystyle\sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_7^2 \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, \ldots, 6, \quad \text{(ii)} \ \ \mu_7 = 0. \end{array}$$

総アドバンテージの負の値

$$-2cF_8\mu_0 + F_8\left[\mu_0^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right)^2\right] + F_7\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2\right)^2\right]$$
$$+ \cdots + F_2\left[\mu_6^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_6 + \mu_7\right)^2\right] + F_1F_2\mu_7^2$$

を**総ペナルティ**(total penalty) と呼ぶ。総アドバンテージの最大化問題は総ペナルティの最小化問題

$$(\mathrm{D}_8')\quad \begin{array}{l} \text{minimize} \quad -2cF_8\mu_0 + \displaystyle\sum_{n=0}^{6} F_{8-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{8-n}}{F_{7-n}}\mu_n + \mu_{n+1}\right)^2\right] + F_1\mu_7^2 \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, \ldots, 6, \quad \text{(ii)} \ \ \mu_7 = 0 \end{array}$$

に等価である。すなわち、(D_8) の最大値の負値が (D_8') 最小値になり、最大点と最小点は一致する。

問題 (D_8) は 点

$$\begin{aligned} \mu^* &= (\mu_0^*, \ \mu_1^*, \ \ldots, \ \mu_6^*, \ \mu_7^*) \\ &= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{13}, \ \boxed{-8}, \ \boxed{5}, \ \boxed{-3}, \ \boxed{2}, \ \boxed{-1}, \ \boxed{1}, \ \boxed{0}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

で最大値 $M_8 = \dfrac{\boxed{21\times 13}}{\boxed{34}}c^2$ に到達している。

この双対問題は主問題と同様にいくつかの方法で解けるが、本論文ではフィボナッチ分割法で解く。

3　交互フィボナッチ・シフト双対性

主問題 (P_8) の最小解と双対問題 (D_8) の最大解の間には次の 3 つのの関係が成り立っている。

1. （**双対性**）　最小値と最大値が等しい：$m_8 = M_8$. 共に初期値 c の 2 次式で、その係数は連続する 3 つのフィボナッチ数からなる比 $\dfrac{21\cdot 13}{34}$ である。
2. （**交互フィボナッチ**）　最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots\ ,\ \hat{x}_7,\ \hat{x}_8)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*,\ \mu_8^*)$ は共に**交代**[2]フィボ数列の後向きである。
3. （**シフト**）　最大点と最小点はお互いを 1 段シフトさせている。

すなわち、定数 $\dfrac{c}{34}$ 倍を無視すれば、主問題の最適解

$$\boxed{\hat{x}_1}\ \boxed{\hat{x}_2}\ \boxed{\hat{x}_3}\ \boxed{\hat{x}_4}\ \boxed{\hat{x}_5}\ \boxed{\hat{x}_6}\ \boxed{\hat{x}_7}\ \boxed{\hat{x}_8}$$

は

$$\boxed{-F_8}\ \boxed{F_7}\ \boxed{-F_6}\ \boxed{F_5}\ \boxed{-F_4}\ \boxed{F_3}\ \boxed{-F_2}\ \boxed{F_1}$$

で、双対問題の最適解

$$\boxed{\mu_0^*}\ \boxed{\mu_1^*}\ \boxed{\mu_2^*}\ \boxed{\mu_3^*}\ \boxed{\mu_4^*}\ \boxed{\mu_5^*}\ \boxed{\mu_6^*}\ \boxed{\mu_7^*}$$

は

$$\boxed{F_7}\ \boxed{-F_6}\ \boxed{F_5}\ \boxed{-F_4}\ \boxed{F_3}\ \boxed{-F_2}\ \boxed{F_1}\ \boxed{-F_0}$$

となる。

主問題の最適解は冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】を**交代後向きに**したものである。

この三位一体の関係を**交互フィボナッチ・シフト双対性** (alternately Fibonacci shift duality, AFSD) という。これは今まで考察してきた**フィボナッチ相補双対性** (Fibonacci complementary duality, FCD) [14–16, 18, 19, 21, 22] と対をなすものである。さて、交互フィボナッチ・シフト双対性は一般の n 変数問題の対 (P_n) と (D_n) の間に成り立つのだろうか。 また、主問題 (P_n) が与え

[2] $+$ と $-$ が交互に繰り返されることをいう。

られたとき、双対問題 (D_n) はどのように導かれるのだろうか。本論文では 簡単のため そして【ダ・ヴィンチ・コード】との一貫性のゆえに 8 変数問題に限るが、第 5 節で拡大ラグランジュ変数も用いて双対問題を導く。最後の第 6 節においては 4 変数問題の最適解と双対性を述べる ([16,18] 参照)。

3.1 反転問題

前節の主問題 (P_8) と双対問題 (D_8) を反転させる。すなわち、9 変数 $(x_0,\ x_1,\ldots,\ x_8)$ を $(x_9,\ x_8,\ldots,\ x_1)$ に変換する。このとき、反転主問題は次のように表わされる。

$$
(\mathrm{RP}_8)\qquad
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & F_0x_1^2+F_1(x_1+x_2)^2\\
&+\frac{F_1^2}{F_2}x_2^2+F_2(x_2+x_3)^2\\
&+\cdots\\
&+\frac{F_6^2}{F_7}x_7^2+F_7(x_7+x_8)^2\\
&+\frac{F_7^2}{F_8}x_8^2+F_8(x_8+c)^2\\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x\in R^8.
\end{aligned}
$$

主問題 (P_8) は次でも表わされる。

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}\quad \frac{F_{-1}F_0}{F_1}x_1^2+\sum_{k=1}^{8}\left[\frac{F_{k-1}^2}{F_k}x_k^2+F_k(x_k+x_{k+1})^2\right]\\
&\text{subject to}\quad \text{(i)}\ \ x\in R^8,\ \ \text{(ii)}\ \ x_9=c.
\end{aligned}
$$

これは次を形式的に用いただけである。

$$
F_0x_1^2\ =\ \frac{F_0^2}{F_1}x_1^2+\frac{F_{-1}F_0}{F_1}x_1^2.
$$

反転主問題 (RP_8) の双対問題は $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ として、

$$
(\mathrm{RD}_8)\quad
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & -F_1F_2\mu_1^2 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_1\mu_1 + F_2\mu_2)^2 - F_2\mu_2^2 \\
& - \frac{F_3}{F_2^2}(F_2\mu_2 + F_3\mu_3)^2 - F_3\mu_3^2 \\
& - \cdots \\
& - \frac{F_7}{F_6^2}(F_6\mu_6 + F_7\mu_7)^2 - F_7\mu_7^2 \\
& - \frac{F_8}{F_7^2}(F_7\mu_7 + F_8\mu_8)^2 - F_8\mu_8^2 + 2F_8c\mu_8 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^8, \quad \text{(ii)}\ \ \mu_1 = 0
\end{aligned}
$$

で与えられる。条件 (ii) の下では、最初の 3 項の和は次になる：

$$
-F_1F_2\mu_1^2 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_1\mu_1 - F_2\mu_2)^2 - F_2\mu_2^2 \;=\; -\frac{F_2F_3}{F_1}\mu_2^2.
$$

双対問題 (D_8) はまた次で表わされる。

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & -F_1F_2\mu_1^2 - \sum_{k=1}^{7}\left[\frac{F_{k+1}}{F_k^2}(F_k\mu_k + F_{k+1}\mu_{k+1})^2 + F_{k+1}\mu_{k+1}^2\right] + 2F_8c\mu_8 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^8, \quad \text{(ii)}\ \ \mu_1 = 0.
\end{aligned}
$$

反転主問題 (RP_8) および反転双対問題 (RD_8) を考えると、両反転問題の最適解の間には今度は**前向きの**交互フィボ・シフト双対性が成り立つ。すなわち、反転主問題 (RP_8) の最小解と反転双対問題 (RD_8) の最大解の間には次の三位一体の関係が成り立っている。

1. （双対性）　最小値と最大値が等しい：$m_8 = M_8$. 共に初期値 c の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{21\cdot 13}{34}$ である。
2. （交互フィボナッチ）　最小点 $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_7,\ \tilde{x}_8)$ と最大点 $(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \ldots,\ \mu_7^\star,\ \mu_8^\star)$ は共に（前向きの）交代フィボ数列である。

$$
(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_7,\ \tilde{x}_8) = \frac{c}{34}\left(\boxed{1},\ \boxed{-1},\ \ldots,\ \boxed{13},\ \boxed{-21}\right)
$$

$$
(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \ldots,\ \mu_7^\star,\ \mu_8^\star) = \frac{c}{34}\left(\boxed{-0},\ \boxed{1},\ \ldots,\ \boxed{-8},\ \boxed{13}\right)
$$

3. （シフト）　最大点と最小点はお互いを 1 段シフトさせている。すなわち、定数 $\dfrac{c}{F_9}$ 倍を無視すれば、反転主問題の最適解

$$
\boxed{\tilde{x}_1}\quad \boxed{\tilde{x}_2}\quad \boxed{\tilde{x}_3}\quad \boxed{\tilde{x}_4}\quad \boxed{\tilde{x}_5}\quad \boxed{\tilde{x}_6}\quad \boxed{\tilde{x}_7}\quad \boxed{\tilde{x}_8}
$$

は

$$\boxed{F_1}\quad\boxed{-F_2}\quad\boxed{F_3}\quad\boxed{-F_4}\quad\boxed{F_5}\quad\boxed{-F_6}\quad\boxed{F_7}\quad\boxed{-F_8}$$

で、反転双対問題の最適解

$$\boxed{\mu_1^\star}\quad\boxed{\mu_2^\star}\quad\boxed{\mu_3^\star}\quad\boxed{\mu_4^\star}\quad\boxed{\mu_5^\star}\quad\boxed{\mu_6^\star}\quad\boxed{\mu_7^\star}\quad\boxed{\mu_8^\star}$$

は

$$\boxed{-F_0}\quad\boxed{F_1}\quad\boxed{-F_2}\quad\boxed{F_3}\quad\boxed{-F_4}\quad\boxed{F_5}\quad\boxed{-F_6}\quad\boxed{F_7}$$

である。

すなわち、反転主問題の最適解には冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】が交代列として現れている。特に $c = 34$ のとき、この最適解は【ダ・ヴィンチ・コード】の 1 連交代そのものになっている。

4　交互フィボナッチ分割

この節では、まず最適化の 1 階条件が簡単な条件に帰着できことを示す。これを交互フィボナッチ条件という。次に、この条件に基づいて所与の区間をフィボ比で逐次分割すれば、最適な分割が得られることを示す。すなわち、**交互フィボナッチ最適分割** (alternately Fibonacci optimal section) を提示する。

4.1　主問題 (P_8)

さて、主問題 (P_8) の目的関数を 8 変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_8)$ の関数 $f(x)$ で表す：

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & F_8(x_0 + x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 + F_7(x_1 + x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 + \cdots \\ & + F_2(x_6 + x_7)^2 + \frac{F_1^2}{F_2}x_7^2 + F_1(x_7 + x_8)^2 + \frac{F_0^2}{F_1}x_8^2. \end{aligned}$$

このとき $f(x)$ は 2 次の凸関数である。また一般に最小解 x は 1 階条件を満たす。したがって、この問題では 1 階条件を満たす x を求めれば、最小解が得られる。実際、1 階条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \;=\; 0 \qquad n = 1, 2, \ldots, 8$$

は 8 つの 1 次式からなる連立方程式系

$$
\begin{aligned}
F_8(x_0+x_1)+\frac{F_7^2}{F_8}x_1+F_7(x_1+x_2) &= 0\\
F_7(x_1+x_2)+\frac{F_6^2}{F_7}x_2+F_6(x_2+x_3) &= 0\\
&\vdots\\
F_2(x_6+x_7)+\frac{F_1^2}{F_2}x_7+F_1(x_7+x_8) &= 0\\
F_1(x_7+x_8)+\frac{F_0^2}{F_1}x_8 &= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

になる。最後の第 8 式を除けば、すべて隣接 3 項間であるが、7 式とも敢えて整理しないでこのままにしておく。そうすると、最後の式から後向きに逐次 2 項間の比例式からなる系

$$
\begin{aligned}
&\frac{c+x_1}{F_7}=-\frac{x_1}{F_8},\quad -\frac{x_1+x_2}{F_6}=\frac{x_2}{F_7},\ \cdots\\
&\quad ,\ -\frac{x_5+x_6}{F_2}=\frac{x_6}{F_3},\quad \frac{x_6+x_7}{F_1}=-\frac{x_7}{F_2},\quad F_1(x_7+x_8)=-F_0x_8
\end{aligned}
$$

が得られて

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}\qquad \frac{c+x_1}{F_7}&=-\frac{x_1}{F_8}=-\frac{x_1+x_2}{F_6}=\frac{x_2}{F_7}=\cdots\\
&=\frac{x_6+x_7}{F_1}=-\frac{x_7}{F_2},\quad -x_7=x_8
\end{aligned}
$$

が導かれる。これを**交互フィボナッチ条件** (alternately Fibonacci condition, AFC)[3]という。したがって、この系または交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ を解けば、最小解が得られる。幸いにもこれは解き易い。隣接 2 項間の比例式であり、初期値 c が与えられているから、前向きに解ける。

さて、ここで方程式系 (4) から条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ を導いてこう。まず、$F_0=0$ より、(4) の最後の第 8 式は

$$x_7=-x_8$$

に他ならない。これより、次の第 7 式より

$$\frac{x_6+x_7}{F_1}=-\frac{x_7}{F_2}$$

がわかる。よって、$x_7=-\dfrac{F_2}{F_3}x_6$. この関係を第 6 式に代入すると

$$-\frac{x_5+x_6}{F_2}=\frac{x_6}{F_3}$$

[3]厳密には 6 : 4 型のフィボナッチ条件という。4 : 6 型は既に [16] で導入している。

になる。すなわち、$x_6 = -\dfrac{F_3}{F_4}x_5$. これを繰り返すと、最後に

$$\frac{c + x_1}{F_7} = -\frac{x_1}{F_8}$$

になる。同時に、これらの値はすべて等しいこともわかる。したがって、$(\mathrm{AF})_\mathrm{P}$ が成立することになる。

交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_\mathrm{P}$ は最適分割を構成する点列 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8)$ が次のように 8 段階**交互フィボナッチ分割** (alternately Fibonacci section, AFS) によって生成されることを示している。まず区間 $[0,\ c]$ を $F_8 : F_7$ に内分する点を $-x_1$ とし、次に $[0,\ -x_1]$ の比 $F_7 : F_6$ による内分点を x_2 とする。さらに、 $[0,\ x_2]$ の $F_6 : F_5$ の内分点を $-x_3$ とし、これを繰り返して最後に $[0,\ -x_7]$ を $F_1 : F_0$ に内分する点を x_8 としている。すなわち、この最適分割は 16 個の 1 次量

$$-x_1,\quad c + x_1,\quad x_2,\quad -x_1 - x_2,\quad -x_3,\quad x_2 + x_3,\quad x_4,\quad -x_3 - x_4$$

$$,\quad -x_5,\quad x_4 + x_5,\quad x_6,\quad -x_5 - x_6,\quad -x_7,\quad x_6 + x_7,\quad x_8,\quad -x_7 - x_8$$

がフィボ連比

$$F_8 : F_7 : F_7 : F_6 : F_6 : F_5 : F_5 : F_4$$

$$: F_4 : F_3 : F_3 : F_2 : F_2 : F_1 : F_1 : F_0$$

になるように配分することである。

初期値 $x_0 = c\ (> 0)$ が与えられているとき、主問題 (P_8) の最適点 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8)$ は区間 $[-c, c]$ の 7 段階フィボ条件によって得られる。まず第 1 段では、$-x_1 > 0$ は区間 $[0, c]$ を $F_8 : F_7\ (= 21 : 13)$ の比に内分する点にとる。

次の第 2 段では、x_2 を $[0, -x_1]$ を $F_7 : F_6\ (= 13 : 8)$ に内分する点にとる。第 3 段では、$-x_3$ を $[0, x_2]$ の $F_6 : F_5\ (= 8 : 5)$ の内分点にする。第 4 段では、x_4 を $[0, -x_3]$ の $F_5 : F_4\ (= 5 : 3)$ の内分点にする。第 5 段では、$-x_5$ を $[0, x_4]$ の $F_4 : F_3\ (= 3 : 2)$ の内分点にする。第 6 段では、x_6 を $[0, -x_5]$ の $F_3 : F_2\ (= 2 : 1)$ の内分点にする。第 7 段では、$-x_7$ を $[0, x_6]$ の $F_2 : F_1\ (= 1 : 1)$ の内分点にする。最後の第 8 段では、x_8 を $[0, -x_7]$ の $F_1 : F_0\ (= 1 : 0)$ の内分点にするにとる。

すなわち、第 1 段から第 8 段まですべて **6 : 4 型**の分割である。

さて、実際に $(\mathrm{AF})_\mathrm{P}$ は容易に解けて、

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_8) \\ &= \frac{c}{F_9}\Big(\ -F_8,\quad F_7,\quad -F_6,\quad F_5,\quad -F_4,\quad F_3,\quad -F_2,\quad F_1\ \Big) \end{aligned} \tag{5}$$

で最小値 $m_8 = \dfrac{F_8F_7}{F_9}c^2$ をもつことを示そう。

最初の

$$\frac{c+x_1}{F_7} = -\frac{x_1}{F_8}$$

より、まず

$$\hat{x}_1 = -\frac{F_8}{F_9}c.$$

したがって、次は $\dfrac{\hat{x}_1+x_2}{F_6} = -\dfrac{x_2}{F_7}$ より

$$\hat{x}_2 = -\frac{F_7}{F_8}\hat{x}_1 = \frac{F_7}{F_9}c.$$

これを繰り返すと、最後は

$$\hat{x}_8 = -\frac{F_1}{F_2}\hat{x}_7 = \frac{F_1}{F_9}c$$

になる。すなわち、$\hat{x}$ が得られた。

このとき、次の**補題 1**(ii)

$$2\sum_{n=0}^{7} F_n^2 F_{n+1} = F_7F_8F_9$$

を用いると、

$$\begin{aligned} F_9^2\frac{f(\hat{x})}{c^2} &= \left(F_8F_7^2+F_7^2F_8\right)+\left(F_7F_6^2+F_6^2F_7\right)+\cdots+\left(F_2F_1^2+F_1^2F_2\right)+\left(F_1F_0^2+F_0^2F_1\right) \\ &= 2\left(F_8F_7^2+F_7F_6^2+\cdots+F_2F_1^2+F_1F_0^2\right) \\ &= F_7F_8F_9 \end{aligned}$$

になる。すなわち、最小値は

$$f(\hat{x}) = \frac{F_8F_7}{F_9}c^2$$

である。

フィボナッチ数列の和については次の公式が成り立つ[4]。

補題 1

$$\text{(i)（リュカ）}\quad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1} \tag{6}$$

$$\text{(ii)（準立方和）}\quad 2\sum_{k=1}^{n} F_k^2F_{k+1} = F_nF_{n+1}F_{n+2}. \tag{7}$$

[4] この 6 : 4 型では新たに導いた公式 (ii) を用いたが、4 : 6 型では [16] で既に (i)（リュカ）を用いている。

4.2 双対問題 (D_8)

今度は、双対問題 (D_8) の目的関数を 8 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ の関数 $g(\mu)$ で表そう：

$$\begin{aligned} g(\mu) &= 2cF_8\mu_0 - F_8\left[\mu_0^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right)^2\right] - F_7\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2\right)^2\right] - \cdots \\ &\quad -F_3\left[\mu_5^2 + \left(\frac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6\right)^2\right] - F_2\left[\mu_6^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_6 + \mu_7\right)^2\right] - F_1F_2\mu_7^2. \end{aligned}$$

$g(\mu)$ は 2 次の凹関数である。最大解 μ は 1 階条件を満たすので、条件 (ii) と 1 階条件を解けば、最大解が得られる。実際、(ii) と 1 階条件

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_n} = 0 \qquad n = 0, 1, \ldots, 6$$

は 8 つの一次式からなる連立方程式系

$$\begin{aligned} c - \mu_0 - \frac{F_8}{F_7}\left(\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right) &= 0 \\ -\frac{F_8}{F_7}\left(\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1\right) - \mu_1 - \frac{F_7}{F_6}\left(\frac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2\right) &= 0 \\ &\vdots \\ -\frac{F_4}{F_3}\left(\frac{F_4}{F_3}\mu_4 + \mu_5\right) - \mu_5 - \frac{F_3}{F_2}\left(\frac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6\right) &= 0 \\ -\frac{F_3}{F_2}\left(\frac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6\right) - \mu_6 - \frac{F_2}{F_1}\left(\frac{F_2}{F_1}\mu_6 + \mu_7\right) &= 0 \\ \mu_7 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

になる。

これから双対問題 (D_8) に対するフィボ条件

$$\begin{aligned} (\mathrm{AF})_{\mathrm{D}} \qquad \frac{c - \mu_0}{F_8} &= \frac{\frac{F_8}{F_7}\mu_0 + \mu_1}{F_7} = -\frac{\mu_1}{F_6} = -\frac{\frac{F_7}{F_6}\mu_1 + \mu_2}{F_6} = \frac{\mu_2}{F_5} \\ &= \cdots = \frac{\frac{F_4}{F_3}\mu_4 + \mu_5}{F_3} = -\frac{\mu_5}{F_2} = -\frac{\frac{F_3}{F_2}\mu_5 + \mu_6}{F_2} = \frac{\mu_6}{F_1}, \quad \mu_7 = 0 \end{aligned}$$

が導かれる。これは次の 8 つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c-\mu_0}{F_8} = \frac{\frac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1}{F_7} = -\frac{\mu_1}{F_6}, \quad \frac{\frac{F_7}{F_6}\mu_1+\mu_2}{F_6} = -\frac{\mu_2}{F_5},$$

$$\cdots, \quad \frac{\frac{F_4}{F_3}\mu_4+\mu_5}{F_3} = -\frac{\mu_5}{F_2}, \quad \frac{\frac{F_3}{F_2}\mu_5+\mu_6}{F_2} = -\frac{\mu_6}{F_1}, \quad F_0\left(\frac{F_2}{F_1}\mu_6+\mu_7\right) = -F_1\mu_7$$

方程式系 (8) から条件 $(\mathrm{AF})_\mathrm{D}$ を導こう。まず、 $\mu_7 = 0$ より、系の第 7 式より

$$\frac{\frac{F_3}{F_2}\mu_5+\mu_6}{F_2} = -\frac{\mu_6}{F_1}$$

である。よって $\mu_6 = -\frac{F_1}{F_2}\mu_5$. 次に、これを第 6 式に代入して

$$\frac{\frac{F_4}{F_3}\mu_4+\mu_5}{F_3} = -\frac{\mu_5}{F_2}.$$

これを繰り返すと、

$$\frac{\frac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1}{F_7} = -\frac{\mu_1}{F_6}$$

が得られる。最後に、第 1 式は

$$\frac{c-\mu_0}{F_8} = \frac{\frac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1}{F_7}$$

に他ならない。したがって、条件 $(\mathrm{AF})_\mathrm{D}$ が成立する。

フィボ条件 $(\mathrm{AF})_\mathrm{D}$ は 15 個の 1 次量

$$c-\mu_0, \quad \frac{F_8}{F_7}\mu_0+\mu_1, \quad -\mu_1, \quad \frac{F_7}{F_6}\mu_1+\mu_2, \quad -\mu_2, \quad \frac{F_6}{F_5}\mu_2+\mu_3, \quad -\mu_3, \quad \frac{F_5}{F_4}\mu_3+\mu_4$$

$$, \quad -\mu_4, \quad \frac{F_4}{F_3}\mu_4+\mu_5, \quad -\mu_5, \quad \frac{F_3}{F_2}\mu_5+\mu_6, \quad -\mu_6, \quad \frac{F_2}{F_1}\mu_6+\mu_7, \quad -\mu_7$$

をフィボ連比

$$F_8 : F_7 : F_6 : F_6 : F_5 : F_5 : F_4 : F_4$$

$$: F_3 : F_3 : F_2 : F_2 : F_1 : F_1 : F_0$$

で配分することを意味している。すなわち、この条件とは、区間 $[0,c]$ に大きい方から順に 8 つの分点 $\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_7$ を入れて、15 個の量

$$c-\mu_0,\quad \mu_0,\quad \mu_0+\mu_1,\quad -\mu_1,\quad -\mu_1-\mu_2,\quad \mu_2,\quad \mu_2+\mu_3,\quad -\mu_3$$

$$,\quad -\mu_3-\mu_4,\quad \mu_4,\quad \mu_4+\mu_5,\quad -\mu_5,\quad -\mu_5-\mu_6,\quad \mu_6,\quad \mu_6+\mu_7$$

がフィボ連比

$$F_8:F_7:F_5:F_6:F_4:F_5:F_3:F_4$$

$$:F_2:F_3:F_1:F_2:F_0:F_1:F_1$$

になるように配分することである。

主問題 (P_8) の初期値 $x_0=c\,(>0)$ が与えられているとき、双対問題 (D_8) の最適点 $(\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_7)$ は区間 $[-c,c]$ の 7 段階フィボ条件によって得られる。まず第 1 段では、μ_0 は区間 $[0,c]$ を $F_7:F_8\ (=13:21)$ の比に内分する点にとる。

次の第 2 段では、$-\mu_1$ を $[0,\mu_0]$ を $F_6:F_5\ (=8:5)$ に内分する点にとる。第 3 段では、μ_2 を $[0,-\mu_1]$ の $F_5:F_4\ (=5:3)$ の内分点にする。第 4 段では、$-\mu_3$ を $[0,\mu_2]$ の $F_4:F_3\ (=3:2)$ の内分点にする。第 5 段では、μ_4 を $[0,-\mu_3]$ の $F_3:F_2\ (=2:1)$ の内分点にする。第 6 段では、$-\mu_5$ を $[0,\mu_4]$ の $F_2:F_1\ (=1:1)$ の内分点にする。第 7 段では、μ_6 を $[0,-\mu_5]$ の $F_1:F_0\ (=1:0)$ の内分点にする。最後の第 8 段では、$\mu_7=0$ にとる。

すなわち、第 1 段では **4 : 6 型**の分割であるが、第 2 段から第 7 段までは **6 : 4 型**になっている。

さて、交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ を解いて、

$$(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \ldots,\ \mu_7^*)\ =\ \frac{c}{F_9}\Big(\ F_7\,,\quad -F_6,\quad \ldots,\quad -F_2\,,\quad F_1\,,\quad -F_0\ \Big)$$

が最大値 $M_8\ =\ \dfrac{F_8F_7}{F_9}c^2$ に達していることを示そう。

これには同値な系を次のように後向きに解けばよい。まず、最後の第 8 式の $\mu_7\ =\ 0$ を第 7 式に代入すると、

$$\mu_6\ =\ -\mu_5\quad \text{i.e.}\quad \frac{\mu_6}{F_1}\ =\ -\frac{\mu_5}{F_2}.$$

これを第 6 式に代入して

$$-\frac{\mu_5}{F_2}\ =\ \frac{\mu_4}{F_3}.$$

以下、同様に１つ上の式に代入して逐次

$$\frac{\mu_4}{F_3} = -\frac{\mu_3}{F_4},\ \cdots\ ,\ -\frac{\mu_1}{F_6} = \frac{\mu_0}{F_7}$$

が得られる。この最後の式を最初の第１式に代入すると、

$$\mu_0 = \frac{F_7}{F_9}c$$

になる。したがって、

$$\mu_1 = -\frac{F_6}{F_9}c,\quad \mu_2 = \frac{F_5}{F_9}c,\ \ldots\ ,\quad \mu_5 = -\frac{F_2}{F_9}c,\quad \mu_6 = \frac{F_1}{F_9}c$$

である。

ゆえに、

$$\begin{aligned}\mu^* &= (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \ldots,\ \mu_7^*)\\ &= \frac{c}{F_9}\Big(\ F_7\,,\quad -F_6\,,\quad F_5\,,\quad -F_4\,,\quad F_3\,,\quad -F_2\,,\quad F_1\,,\quad -F_0\ \Big)\end{aligned}$$

が得られた。このとき、補題 1(ii) より

$$\begin{aligned}g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_7F_8F_9 - F_8\left[F_7^2 + (F_8-F_6)^2\right] - F_7\left[F_6^2 + (F_7-F_5)^2\right] - \cdots\\ &\qquad - F_3\left[F_2^2 + (F_3-F_1)^2\right] - F_2\left[F_1^2 + (F_2-F_0)^2\right] - F_1F_2F_0^2\\ &= 2F_7F_8F_9 - 2\left(F_8F_7^2 + F_7F_6^2 + \cdots + F_2F_1^2\right)\\ &= F_7F_8F_9\end{aligned}$$

になる。すなわち、最大値

$$g(\mu^*) = \frac{F_8F_7}{F_9}c^2$$

が得られた。

5　双対問題の導出

さて、主問題から双対問題がどのようにして導かれるだろうか。一般に、２つの方法――ラグランジュ乗数法 [16] と準線形化法 [5,16,18,23] ――があるが、この節ではラグランジュ乗数法とは独立に直接双対問題を導こう。

主問題

$$
(\mathrm{P}_8)\qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n+x_{n+1})^2+\frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right]+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty<x_n<\infty \qquad n=1,2,\ldots,8 & \\ & \text{(ii)}\quad x_0=c & \end{array}
$$

が与えられているとしよう。いま、$x=(x_1,\ \ldots,\ x_8)$ が制約条件 (i), (ii) を満たすとして、その目的関数の値を $I(x)$ で表わす：

$$
I(x) \;=\; \sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n+x_{n+1})^2+\frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right]+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2.
$$

このとき、変数列 $u=(u_0,\ \ldots,\ u_7)$ を

$$
u_n=x_n+x_{n+1} \qquad 0\le n\le 7 \tag{9}
$$

で導入すると、任意の実数列 $\mu=(\mu_0,\ \ldots,\ \mu_7)$ を用いて、値 $I(x)$ は次でも表わされる。

$$
\begin{aligned}
I(x) \;=\;& F_8u_0^2+\frac{F_7^2}{F_8}x_1^2+2F_8\mu_0(x_0+x_1-u_0)\\
&+F_7u_1^2+\frac{F_6^2}{F_7}x_2^2+2F_7\mu_1(x_1+x_2-u_1)\\
&\qquad\vdots\\
&+F_2u_6^2+\frac{F_1^2}{F_2}x_7^2+2F_2\mu_6(x_6+x_7-u_6)\\
&+F_1u_7^2+\frac{F_0^2}{F_1}x_8^2+2F_1\mu_7(x_7+x_8-u_7)+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2.
\end{aligned} \tag{10}
$$

(10) では 列 $\{2F_8\mu_0,\ 2F_7\mu_1,\ \ldots\ ,\ 2F_1\mu_7\}$ を等式制約 (9) に対応するラグランジュ変数にとっている。この列を**拡大ラグランジュ乗数列** (augmented Lagrange multipliers) と言う[5]。このとき、

$$
\begin{aligned}
I(x) \;=\;& F_8\left(u_0^2-2\mu_0u_0\right)+\frac{F_7^2}{F_8}x_1^2+2\left(F_8\mu_0+F_7\mu_1\right)x_1+2F_8x_0\mu_0\\
&+F_7\left(u_1^2-2\mu_1u_1\right)+\frac{F_6^2}{F_7}x_2^2+2\left(F_7\mu_1+F_6\mu_2\right)x_2\\
&\qquad\vdots\\
&+F_2\left(u_6^2-2\mu_6u_6\right)+\frac{F_1^2}{F_2}x_7^2+2\left(F_2\mu_6+F_1\mu_7\right)x_7\\
&+F_1\left(u_7^2-2\mu_7u_7\right)+F_0x_8^2+2F_1\mu_7x_8
\end{aligned}
$$

[5]通常は、等式制約 $x_0+x_1=u_0$ に対応するラグランジュ乗数を λ_0 として、λ_0 倍した $\lambda_0(x_0+x_1-u_0)$ を目的式に加えて、ラグランジュ関数を構成している。しかしここでは、μ_0 を $2F_8$ 倍した $2F_8\mu_0$ をラグランジュ乗数とし、μ_0 に関して最大化している。

である。ここに x_8^2 の係数だけが $F_0 = 0$ で、他の 2 次項はすべて正係数である。したがって、

$$
\begin{aligned}
I(x) \quad = \quad & 2F_8 x_0 \mu_0 + F_8 (u_0 - \mu_0)^2 - F_8 \mu_0^2 \\
& + \frac{F_7^2}{F_8} \left\{ x_1 + \frac{F_8}{F_7^2} (F_8 \mu_0 + F_7 \mu_1) \right\}^2 - \frac{F_8}{F_7^2} (F_8 \mu_0 + F_7 \mu_1)^2 \\
& \qquad + F_7 (u_1 - \mu_1)^2 - F_7 \mu_1^2 \\
& \qquad \vdots \\
& + \frac{F_2^2}{F_3} \left\{ x_6 + \frac{F_3}{F_2^2} (F_3 \mu_5 + F_2 \mu_6) \right\}^2 - \frac{F_3}{F_2^2} (F_3 \mu_5 + F_2 \mu_6)^2 \\
& \qquad + F_2 (u_6 - \mu_6)^2 - F_2 \mu_6^2 \\
& + \frac{F_1^2}{F_2} \left\{ x_7 + \frac{F_2}{F_1^2} (F_2 \mu_6 + F_1 \mu_7) \right\}^2 - \frac{F_2}{F_1^2} (F_2 \mu_6 + F_1 \mu_7)^2 \\
& \qquad + F_1 (u_7 - \mu_7)^2 - F_1 \mu_7^2 + F_0 x_8^2 + 2F_1 \mu_7 x_8 .
\end{aligned}
$$

ゆえに、右辺から非負項を削除すると、

$$
\begin{aligned}
I(x) \ \geq \ & 2F_8 x_0 \mu_0 - F_8 \mu_0^2 - \frac{F_8}{F_7^2} (F_8 \mu_0 + F_7 \mu_1)^2 \\
& - F_7 \mu_1^2 - \frac{F_7}{F_6^2} (F_7 \mu_1 + F_6 \mu_2)^2 \\
& \qquad \vdots \\
& - F_2 \mu_6^2 - \frac{F_2}{F_1^2} (F_2 \mu_6 + F_1 \mu_7)^2 \\
& - F_1 \mu_7^2 + F_0 x_8^2 + 2F_1 \mu_7 x_8
\end{aligned}
$$

が成り立つ。さらに、$\mu_7 = 0$ を仮定することによって、この右辺から $+F_0 x_8^2 + 2F_1 \mu_7 x_8$ を除去した項は $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_7)$ のみからなり、x_8 を含まない[6]。これを $J(\mu)$ で表わす：

$$
\begin{aligned}
J(\mu) \ = \ & 2F_8 x_0 \mu_0 - F_8 \mu_0^2 - \frac{F_8}{F_7^2} (F_8 \mu_0 + F_7 \mu_1)^2 \\
& - F_7 \mu_1^2 - \frac{F_7}{F_6^2} (F_7 \mu_1 + F_6 \mu_2)^2 \\
& \qquad \vdots \\
& - F_2 \mu_6^2 - \frac{F_2}{F_1^2} (F_2 \mu_6 + F_1 \mu_7)^2 \\
& - F_1 \mu_7^2 .
\end{aligned}
$$

[6] x_0 は定数である。

すると、不等式

$$I(x) \ \geq \ J(\mu) \tag{11}$$

が (9) を満たす任意の (x,u) と $\mu_7=0$ を満たす任意の μ に対して成り立つ。等号は

$$\begin{aligned}
u_0 &= \mu_0, \quad x_1 = -\frac{F_8}{F_7^2}\left(F_8\mu_0+F_7\mu_1\right)\\
u_1 &= \mu_1, \quad x_2 = -\frac{F_7}{F_6^2}\left(F_7\mu_1+F_6\mu_2\right)\\
&\qquad\vdots\\
u_5 &= \mu_5, \quad x_6 = -\frac{F_3}{F_2^2}\left(F_3\mu_5+F_2\mu_6\right)\\
u_6 &= \mu_6, \quad x_7 = -\frac{F_2}{F_1^2}\left(F_2\mu_6+F_1\mu_7\right)\\
u_7 &= \mu_7
\end{aligned} \tag{12}$$

のときに限り成り立つ。

さて、(9),(12) および $\mu_7=0$ を満たす $(x,u;\,\mu)$ を求めよう[7]。まず u,x を消去すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{c-\mu_0}{F_8} = \frac{F_8\mu_0+F_7\mu_1}{F_7^2}, \quad \frac{c-\mu_0+\mu_1}{F_7} = -\frac{F_7\mu_1+F_6\mu_2}{F_6^2},\\
&\frac{c-\mu_0+\mu_1-\mu_2}{F_6} = \frac{F_6\mu_2+F_5\mu_3}{F_5^2}, \quad \cdots,\\
&\frac{c-\mu_0+\mu_1-\cdots+\mu_5}{F_3} = -\frac{F_3\mu_5+F_2\mu_6}{F_2^2},\\
&\frac{c-\mu_0+\mu_1-\cdots-\mu_6}{F_2} = \frac{F_2\mu_6+F_1\mu_7}{F_1^2}, \quad \mu_7 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

になる。このとき、

$$u_n \ = \ \mu_n, \quad x_{n+1} \ = \ (-1)^{n+1}\left[c+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\mu_{k-1}\right] \qquad 0\leq n\leq 7. \tag{14}$$

連立 1 次方程式 (13) を後向きに解こう。まず、最後から 2 番目と 3 番目の 2 式から $c-\mu_0+\mu_1-\cdots+\mu_5$ を消すと、

$$\mu_6 \ = \ -\frac{F_3}{F_2^2}\left(F_3\mu_5+F_2\mu_6\right)-\frac{F_2}{F_1^2}\left(F_2\mu_6+F_1\mu_7\right)$$

になる。これに最後の式の $\mu_7 = 0$ を代入すると、μ_6, μ_5 の関係が

$$-\frac{F_3\mu_5+F_2\mu_6}{F_2^2} \ = \ \frac{\mu_6}{F_1}$$

[7] これは未知変数 (x,u,μ) に関する 24 元連立一次方程式を解くことである。

として得られる。これより、μ_6, μ_5 の 2 項関係が比例式

$$-\mu_5 = \mu_6 \quad \text{i.e.} \quad -\frac{\mu_5}{F_2} = \frac{\mu_6}{F_1}$$

で表わされる。次に、最後から 3 番目と 4 番目の 2 式から $c - \mu_0 + \mu_1 - \cdots - \mu_4$ を消すと、

$$\mu_5 = -\frac{F_4}{F_3^2}\left(F_4\mu_4 + F_3\mu_5\right) - \frac{F_3}{F_2^2}\left(F_3\mu_5 + F_2\mu_6\right).$$

これに上述の比例式を代入すると、μ_5, μ_4 間に関係式

$$\frac{F_4\mu_4 + F_3\mu_5}{F_2^3} = -\frac{\mu_5}{F_2}$$

が得られる。これより

$$\frac{\mu_4}{F_3} = -\frac{\mu_5}{F_2}$$

になる。これを繰り返して、最初の 2 式から $c - \mu_0$ を消す。すると、いま導いた比例関係式より

$$\frac{F_8\mu_0 + F_7\mu_1}{F_7^2} = -\frac{\mu_1}{F_6}$$

すなわち

$$\frac{\mu_0}{F_7} = -\frac{\mu_1}{F_6}$$

が従う。最後に、これを用いると、最初の式自身から

$$\frac{c - \mu_0}{F_8} = \frac{\mu_0}{F_7}$$

が得られる。

すなわち、(13) から同値な 2 つの系

$$\frac{c - \mu_0}{F_8} = \frac{F_8\mu_0 + F_7\mu_1}{F_7^2}, \quad \frac{F_8\mu_0 + F_7\mu_1}{F_7^2} = -\frac{\mu_1}{F_6},$$

$$\cdots, \frac{F_3\mu_5 + F_2\mu_6}{F_2^2} = -\frac{\mu_6}{F_1}, \quad \mu_7 = 0$$

と

$$\frac{c - \mu_0}{F_8} = \frac{\mu_0}{F_7} = -\frac{\mu_1}{F_6} = \frac{\mu_2}{F_5} = \cdots - \frac{\mu_5}{F_2} = \frac{\mu_6}{F_1}, \quad \mu_7 = 0$$

が導かれた。

したがって、方程式 (13) は解

$$\mu_n^* = (-1)^n \frac{F_{7-n}}{F_9} c \quad 0 \le n \le 7 \tag{15}$$

をもつ。すなわち、

$$\mu^* = \left(\mu_0^*, \quad \mu_1^*, \quad ,\ldots, \quad \mu_6^*, \quad \mu_7^* \right) = \frac{c}{F_9} \left(F_7, \quad -F_6, \quad ,\ldots, \quad -F_2, \quad F_1, \quad -F_0 \right).$$

また (14) より、$n = 0, 1, \ldots, 7$ に対して、

$$\hat{u}_n = \mu_n^* = (-1)^n \frac{F_{7-n}}{F_9} c, \qquad \hat{x}_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{F_{8-n}}{F_9} c \tag{16}$$

になる。すなわち、

$$\hat{x} = \left(\hat{x}_1, \quad \hat{x}_2, \quad ,\ldots, \quad \hat{x}_7, \quad \hat{x}_8 \right) = \frac{c}{F_9} \left(-F_8, \quad F_7, \quad ,\ldots, \quad -F_2, \quad F_1 \right).$$

したがって、(9),(12) の解 $(\hat{x}, \hat{u};\ \mu^*)$ は (15),(16) で与えられる。これで $J(\mu)$ の制約付き最大化

$$(\mathrm{D}_8) \qquad \begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 2F_8 c\mu_0 - F_8\mu_0^2 - \frac{F_8}{F_7^2}\left(F_8\mu_0 + F_7\mu_1\right)^2 \\ & - F_7\mu_1^2 - \frac{F_7}{F_6^2}\left(F_7\mu_1 + F_6\mu_2\right)^2 \\ & \qquad \vdots \\ & - F_2\mu_6^2 - \frac{F_2}{F_1^2}\left(F_2\mu_6 + F_1\mu_7\right)^2 - F_1F_2\mu_7^2 \\ \text{subject to} \quad & \text{(i)} \ \ \mu \in R^8, \quad \text{(ii)} \ \ \mu_7 = 0 \end{aligned}$$

が双対問題であることが分かった。

6　4 変数問題

これまで、【ダ・ヴィンチ・コード】に焦点を当てるべく、8 変数問題に限定して、フィボナッチ・シフト双対性を導いてきた。しかし、n を自然数として、一般にこの双対性は n 変数問題に対しても成り立つ。ここでは $n = 4$ について、主問題と双対問題の対 (P_4), (D_4) および対応する反転問題の対 (RP_4), (RD_4) について、問題、最適解および交互フィボナッチ・シフト双対性を述べよう。

6.1 主問題 (P_4) と双対問題 (D_4)

4 変数 $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の主問題

$$
(\mathrm{P}_4)\qquad
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & F_8(x_0+x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 \\
& + F_7(x_1+x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 \\
& + F_6(x_2+x_3)^2 + \frac{F_5^2}{F_6}x_3^2 \\
& + F_5(x_3+x_4)^2 + F_4x_4^2 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x \in R^4,\quad \text{(ii)}\ \ x_0 = c
\end{aligned}
$$

の双対問題は 4 変数 $\mu = (\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$ の最大化問題

$$
(\mathrm{D}_4)\qquad
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & 2F_8x_0\mu_0 - F_8\mu_0^2 - \frac{F_8}{F_7^2}\left(F_8\mu_0 + F_7\mu_1\right)^2 \\
& - F_7\mu_1^2 - \frac{F_7}{F_6^2}\left(F_7\mu_1 + F_6\mu_2\right)^2 \\
& - F_6\mu_2^2 - \frac{F_6}{F_5^2}\left(F_6\mu_2 + F_5\mu_3\right)^2 - \frac{F_5F_6}{F_4}\mu_3^2 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^4,\quad \text{(ii)}\ \ x_0 = c
\end{aligned}
$$

になる。この (D_4) は条件付きになっていないことに注意しよう。これは (D_8) の導出過程を検討すれば、$F_4 > 0$ より、すぐわかる。

主問題 (P_4) は

$$
\hat{x} = \left(\ \hat{x}_1,\quad \hat{x}_2,\quad \hat{x}_3,\quad \hat{x}_4\ \right) = \frac{c}{F_9}\left(\ -F_8,\quad F_7,\quad -F_6,\quad F_5\ \right)
$$

のとき、最小値 $m_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。双対問題 (D_4) は

$$
\mu^* = \left(\ \mu_0^*,\quad \mu_1^*,\quad \mu_2^*,\quad \mu_3^*\ \right) = \frac{c}{F_9}\left(\ F_7,\quad -F_6,\quad F_5,\quad -F_4\ \right)
$$

のとき、最大値 $M_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

主問題 (P_4) の最小解と双対問題 (D_4) の最大解の間には次の交互フィボナッチ・シフト双対性が成り立っている。

1. （双対性）　最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$. 共に初期値 c の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{F_7F_8}{F_9}$ である。

2. （交互フィボナッチ）　最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ と最大点 $(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)$ は共に交代フィボ数列の後向きである。
3. （シフト）　最大点 μ^* は最小点 $\hat{x}$ を 1 段シフトした点になる：

$$\mu_n^* = \hat{x}_{n+2} \qquad n = 0, 1, 2$$

6.2　主問題と双対問題の反転

4 変数の (P_4) と (D_4) を反転させる。すなわち、変数 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ を $(x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1)$ に変換する。このとき、主問題と双対問題はそれぞれ次のように表わされる。

$$(\mathrm{RP}_4)\qquad \begin{aligned} \text{minimize}\quad & F_4x_1^2 + F_5(x_1+x_2)^2 \\ & + \frac{F_5^2}{F_6}x_2^2 + F_6(x_2+x_3)^2 \\ & + \frac{F_6^2}{F_7}x_3^2 + F_7(x_3+x_4)^2 \\ & + \frac{F_7^2}{F_8}x_4^2 + F_8(x_4+c)^2 \\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x \in R^4. \end{aligned}$$

関係式

$$F_4x_1^2 \ = \ \frac{F_4^2}{F_5}x_1^2 + \frac{F_3F_4}{F_5}x_1^2.$$

を用いると、この目的関数は

$$\frac{F_3F_4}{F_5}x_1^2 + \sum_{k=1}^{4}\left[\frac{F_{3+k}^2}{F_{4+k}}x_k^2 + F_{4+k}(x_k+x_{k+1})^2\right]$$

でも表わされる。

この双対問題は $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ として、

$$(\mathrm{RD}_4)\qquad \begin{aligned} \text{Maximize}\quad & -\frac{F_5F_6}{F_4}\mu_1^2 - F_6\left[\left(\mu_1 + \frac{F_6}{F_5}\mu_2\right)^2 + \mu_2^2\right] \\ & - F_7\left[\left(\mu_2 + \frac{F_7}{F_6}\mu_3\right)^2 + \mu_3^2\right] \\ & - F_8\left[\left(\mu_3 + \frac{F_8}{F_7}\mu_4\right)^2 + \mu_4^2\right] + 2F_8c\mu_4 \\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^4 \end{aligned}$$

になる。この目的関数は

$$-\frac{F_5F_6}{F_4}\mu_1^2-\sum_{k=1}^{3}F_{k+5}\left[\left(\mu_k+\frac{F_{k+5}}{F_{k+4}}\mu_{k+1}\right)^2+\mu_{k+1}^2\right]+2F_5c\mu_4$$

でも表わされる。

問題 (RP_4) は

$$\hat{x}\ =\ \left(\ \hat{x}_1,\quad \hat{x}_2,\quad \hat{x}_3,\quad \hat{x}_4\ \right)=\frac{c}{F_9}\left(\ F_5,\quad -F_6,\quad F_7,\quad -F_8\ \right)$$

のとき、最小値 $m_4=\dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。問題 (RD_4) は

$$\mu^*\ =\left(\ \mu_1^*,\quad \mu_2^*,\quad \mu_3^*,\quad \mu_4^*\ \right)=\frac{c}{F_9}\left(\ -F_4,\quad F_5,\quad -F_6,\quad F_7\ \right)$$

のとき、最大値 $M_4=\dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

反転主問題 (RP_4) の最小解と反転双対問題 (RD_4) の最大解の間には次の交互フィボナッチ・シフト双対性が成り立っている。

1. （双対性）　最小値と最大値が等しい：$m_4=M_4$. 共に初期値 c の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{F_7F_8}{F_9}$ である。
2. （交互フィボナッチ）　最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*)$ は共に交代フィボ数列 (の前向き) である。
3. （シフト）　最大点 μ^* は最小点 $\hat{x}$ を 1 段シフトした点になる：

$$\mu_n^*=\hat{x}_{n-1}\qquad n=2,3,4$$

参考文献

[1] 日本建築学会編,「黄金比とその周辺」,『建築学便覧 2』第 2 版, 丸善, 1977 年.

[2] 日本建築学会編,「黄金比・黄金分割」,『建築学用語辞典』第 2 版, 岩波書店, 1999 年.

[3] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[4] Bellman, R.E., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[5] Bellman, R.E., *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, Singapore, World Scientific, 1984.

[6] Beutelspacher, A. and Petri, B.,『黄金分割 ― 自然と数理と芸術と ― 』（柳井浩訳）, 共立出版, 2005 年; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflange*, Heidelberg, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, 1996.

[7] Brown, D.,『ダ・ヴィンチ・コード (上・下)』（越前敏弥訳）, 角川書店, 2004 年; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[8] Dunlap, R.A.,『黄金比とフィボナッチ数』（岩永恭雄・松井講介訳）, 日本評論社, 2003 年; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[9] 岩本誠一, 『動的計画論』, 九大出版会, 1987 年.

[10] Iwamoto, S., "Cross dual on the Golden optimum solutions,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1443, 2005 年, pp.27–43.

[11] Iwamoto, S., "The Golden trinity — optimility, inequality, identity —,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年, pp.1–14.

[12] Iwamoto, S., "The Golden optimum solution in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2007, pp.199–205.

[13] 岩本 誠一, 「黄金最適解を鑑賞する ― 経済数学へのプレリュード（V）― 」, 経済学研究・別冊 第 12 号 (九大経済学会), 2006 年, pp.39–43.

[14] 岩本 誠一, 「最適化『ダ・ヴィンチ・コード』 ― 経済数学へのプレリュード（VI）―」, 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会), 2007 年, pp.45–52.

[15] 岩本 誠一, 「ダ・ヴィンチ・コードは最適か？」, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年, pp.1–9.

[16] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 2/3 号, 2009 年, pp.1–22.

[17] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード 64」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 77 巻 1 号, 2010 年, pp.1–25.

[18] 岩本 誠一・木村 寛, 「交互ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 4 号, 2010 年, pp.1–18.

[19] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Non-*

linear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan), Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.

[20] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl. Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, 2004.

[21] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes," Ed. Elaydi, S., Nishimura, K., Shishikura, M. and Tose, N., *Advanced Studies in Pure Mathematics* Vol.53, Advances in Discrete Dynamic Systems, 2009, pp.77–86. *Proceedings of the Intl. Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006)*, Kyoto, 2006.

[22] Kira, A. and Iwamoto, S., "Golden complementary dual in quadratic optimization," Modeling Decisions for Artificial Intelligence, *Proceedings of the Fifth Intl. Confernece (MDAI 2008)*, Barcelona, 2008. Eds. Torra, V. and Narukawa, Y., Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.

[23] Lee, E.S., *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, New York, Academic Press, 1968.

[24] 中村 滋, 『フィボナッチ数の小宇宙 — フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割 — 』第 2 版, 日本評論社, 2008 年.

[25] Walser, H., 『黄金分割』(蟹江幸博訳) , 日本評論社, 2002 年; (Original) *Der Goldene Schnitt*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996 年.

[26] 柳 亮, 『黄金分割：ピラミッドからル・コルビュジュまで』, 1965 年, 美術出版社.

[27] 柳 亮, 『黄金分割, 日本の比例』, 1977 年, 美術出版社.

岩本　誠一〔九州大学名誉教授〕
木村　寛〔秋田県立大学システム科学技術部　准教授〕