

## ILU(0)前処つきIDR(s)-R2法と同BiCG法系統の収束性比較

関本, 幹  
九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻

藤野, 清次  
九州大学大学情報基盤研究開発センター

<https://doi.org/10.15017/19866>

---

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 16 (1), pp.11-16, 2011-03-25. 九州大学大学院システム情報科学研究所  
バージョン：  
権利関係：

# ILU(0) 前処理つき IDR(s)-R2 法と同 BiCG 法システムの収束性比較

関本 幹\* ・ 藤野 清次\*\*

## Convergence Comparison between ILU(0)-IDR(s)-R2 Method and a Family of BiCG Methods

Takashi SEKIMOTO\* and Seiji FUJINO\*\*

(Received February 10, 2011)

**Abstract:** We consider to solve a linear system of equations  $Ax = b$  by iterative method. An IDR(s)-Successive Over-Relaxation (SOR) method was proposed in 2009 and it was shown to be more effective than SOR method in convergence. In this paper, we introduce an algorithm of Residual Reduction method using ILU(0) preconditioning. Through numerical experiments, we make clear that the preconditioned Residual Reduction method has excellent convergence rate.

**Keywords:** Iterative method, IDR Theorem, IDR(s)-R2 method, ILU precondition

### 1. はじめに

自然科学や工学などの様々な解析分野において、数値シミュレーションは重要な役割を果たしてきた。それらの様々な解析分野から生じる問題は、偏微分方程式で記述されることが多い。偏微分方程式は有限要素法などにより離散化することで、連立一次方程式の求解に帰着され、この連立一次方程式の解法として反復法が知られている。

2009年、IDR(Induced Dimension Reduction) 定理<sup>10)11)</sup>を定常反復法であるSOR (Successive Over Relaxation) 法に適用したIDR based SOR (以下、IDR-SOR と略す) 法<sup>6)</sup>が発表され、IDR-SOR 法は従来のSOR 法よりも収束性が良いことが示された。さらに、IDR-SOR 法の空間の次数を  $s$  次に拡張したIDR(s)-SOR 法<sup>1)3)</sup>が発表され、次数  $s$  の増加により、IDR(s)-SOR 法が元のIDR-SOR 法よりも収束性がより一層向上することが明らかにされた。

一方、前処理は Krylov 部分空間法の収束性を向上させる技法である<sup>2)</sup>。しかし、IDR(s)-SOR 法のように、IDR 定理を定常反復法に適用した解法では反復行列  $B$  の与え方により前処理技法を適用することができない。そこで、我々は反復行列  $B$  の与え方に着目した。本論文では、反復行列  $B$  を Richardson 加速<sup>9)</sup>に基づき  $B = I - A$  とし、係数行列  $A$  に前処理技法<sup>2)7)8)</sup>を適用、さらに、IDR 定理を適用することでIDR(s)-Residual Reduction(残差縮小, IDR(s)-R2 と略す) 法を導出する。前処理においては、ILU(0) 前処理をIDR(s)-R2 法に適用し、その収束性を前処理なし

BiCGStab 法<sup>4)</sup>と BiCGSafe 法<sup>5)</sup>および ILU(0) 前処理つき同解法らと比較評価する。

本論文の構成は以下の通りである。第2節で、IDR 定理に基づく残差縮小法を導く。第3節で、同残差縮小法の前処理に適用するILU(0) 前処理について記述する。第4節で、数値実験により、ILU(0) 前処理つき残差縮小法の収束性を検証する。そして、第5節で、まとめと今後の課題を述べる。

### 2. IDR(s)-R2 法

解くべき連立一次方程式を

$$Ax = b \tag{1}$$

とする。ただし、係数行列  $A$  は大きさ  $n \times n$  の実非対称行列、 $x$  と  $b$  は次数  $n$  の解ベクトルと右辺ベクトルと各々とする。初期近似解を  $x_0$  とし、初期残差ベクトルを  $r_0 = b - Ax_0$  とする。

定常反復法において、反復  $k + 1$  回目の近似解ベクトル  $x_k$  と残差ベクトル  $r_{k+1}$  の更新式は反復行列  $B$  を用いて

$$x_{k+1} = x_k + r_k, \tag{2}$$

$$r_{k+1} = Br_k \tag{3}$$

と表される。以下に、定常反復法の算法を示す。ただし、 $\epsilon$  は収束判定用の微小な値とする。

#### 定常反復法の算法

Let  $x_0$  be an initial solution,

put  $r_0 = b - Ax_0 = Bx_0 + b - x_0$ ,

平成23年2月10日受付

\*情報学専攻修士課程

\*\*情報基盤研究開発センター

for  $k=0, 1, 2, \dots$   
 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k,$   
 $\mathbf{r}_{k+1} = B\mathbf{r}_k,$   
 if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  then stop,  
 end for.

(3) 式に IDR 定理に基づき, 残差ベクトル  $\mathbf{r}_{k+1}$  が次の関係式を満たすとする<sup>10)</sup>.

$$\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})). \quad (4)$$

ここで, 係数  $\gamma_k$  は, IDR 定理で導入された任意ベクトル  $\mathbf{p}$  との直交関係, すなわち,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}_k - \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})) = 0 \quad (5)$$

から求められる. さらに, (4) 式から近似解ベクトルは次の漸化式で表される.

$$\begin{aligned} & (B - I)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \\ &= \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r} \\ &= B(\mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})) - \mathbf{r}_k \\ &= (B - I)(\mathbf{r}_k + \gamma_k B(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})). \end{aligned}$$

共通因子  $(B - I)$  を両辺から除去すると,

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{r}_k - \gamma_k B(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \\ &= \mathbf{r}_k - \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}) - \gamma_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, 差分ベクトルを,

$$d\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \quad (7)$$

$$d\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1} \quad (8)$$

とおくと, 近似解ベクトル  $\mathbf{x}_{k+1}$  と残差ベクトル  $\mathbf{r}_{k+1}$  は次の漸化式で表現される.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \gamma_k d\mathbf{x}_k + (\mathbf{r}_k - \gamma_k d\mathbf{r}_k), \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k - \gamma_k d\mathbf{r}_k). \quad (10)$$

さらに, 空間を  $s$  次に拡張すると, (10) 式は,

$$\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k - \sum_{j=0}^s \gamma_{k-j} d\mathbf{r}_{k-j}) \quad (11)$$

のように拡張される. ここで, 反復行列  $B$  を  $B = I - A$  とおくと, 残差ベクトルの  $\mathbf{r}_{k+1}$  は以下の式で表される.

$$\mathbf{r}_{k+1} = (I - A)(\mathbf{r}_k - \sum_{j=0}^s \gamma_{k-j} d\mathbf{r}_{k-j}). \quad (12)$$

上記の漸化式によって構成された反復法を IDR( $s$ )-Residual Reduction(残差縮小, R2 と略す) 法と呼ぶ. 以下に,

IDR( $s$ )-R2 法の算法を示す. ここで,  $e_{k+1}$  は,  $k+1$  番目の要素が 1 で, それ以外の要素が 0 の  $s$  次元ベクトルを表す.

## IDR( $s$ )-R2 法の算法

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial guess, put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,

$P = (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_s) \in R^{N \times s}$ , set  $\gamma_0 = 0$ ,

{initial loop : build matrices

$E = (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_s)$ ,  $Q = (d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_s)$

by IDR - R2 method}

for  $k = 0, 1, \dots, s - 1$ ,

$\mathbf{s}_k = \mathbf{r}_k - \gamma_k d\mathbf{r}_k$ ,

$d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \gamma_k d\mathbf{x}_k$ ,

$d\mathbf{r}_{k+1} = (I - A)\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,

$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,

if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  then exit,

$\gamma_{k+1} = (\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1}) / (\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})$ ,

$Ee_{k+1} = d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $Qe_{k+1} = d\mathbf{x}_{k+1}$ ,

end for,

$G = P^T E$ ,  $\mathbf{f} = P^T \mathbf{r}_s$ ,

$k = s$ ,  $n = 1$ ,

{main loop}

while  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 > \epsilon$ ,

solve  $\mathbf{c}$  from  $G\mathbf{c} = \mathbf{f}$ ,

$\mathbf{s}_k = \mathbf{r}_k - E\mathbf{c}$ ,

$d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k - Q\mathbf{c}$ ,

$d\mathbf{r}_{k+1} = (I - A)\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,

$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,

$Ee_n = d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $Qe_n = d\mathbf{x}_{k+1}$ ,

$Ge_n = P^T d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f} + Ge_n$ ,

$k = k + 1$ ,  $n = n + 1$ ,

if  $n > s$  then  $n = 1$ ,

end while.

## 3. ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法

連立一次方程式を前処理技法を用いて解くことを考える. 前処理行列を  $K = K_1 K_2$  とすると, (1) 式は,

$$(K_1^{-1} A K_2^{-1})(K_2 \mathbf{x}) = K_1^{-1} \mathbf{b} \quad (13)$$

と変形される. 本研究では右側前処理を適用, すなわ

ち,  $K_1 = I, K_2 = K$  とする. 以下に右側前処理つき IDR(s)-R2 法の算法を示す.

## 右側前処理つき IDR(s)-R2 法の算法

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial guess, put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,  
 $P = (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_s) \in R^{N \times s}$ , set  $\gamma_0 = 0$ ,  
 {initial loop : build matrices  
 $E = (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_s)$ ,  $Q = (d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_s)$   
 by IDR - R2 method}  
 for  $k = 0, 1, \dots, s - 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{r}_k - \gamma_k d\mathbf{r}_k, \\ d\mathbf{x}_{k+1} &= K^{-1} \mathbf{s}_k - \gamma_k d\mathbf{x}_k, \\ d\mathbf{r}_{k+1} &= (I - AK^{-1})\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}, \\ \text{if } \|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 &\leq \epsilon \text{ then exit,} \\ \gamma_{k+1} &= (\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1}) / (\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1}), \\ E\mathbf{e}_{k+1} &= d\mathbf{r}_{k+1}, \quad Q\mathbf{e}_{k+1} = d\mathbf{x}_{k+1}, \end{aligned}$$

end for,

$$G = P^T E, \quad \mathbf{f} = P^T \mathbf{r}_s,$$

$k = s, n = 1$ ,

{main loop}

while  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 > \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \text{solve } \mathbf{c} \text{ from } G\mathbf{c} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{s}_k &= \mathbf{r}_k - E\mathbf{c}, \\ d\mathbf{x}_{k+1} &= K^{-1} \mathbf{s}_k - Q\mathbf{c}, \\ d\mathbf{r}_{k+1} &= (I - AK^{-1})\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}, \\ E\mathbf{e}_n &= d\mathbf{r}_{k+1}, \quad Q\mathbf{e}_n = d\mathbf{x}_{k+1}, \\ G\mathbf{e}_n &= P^T d\mathbf{r}_{k+1}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f} + G\mathbf{e}_n, \\ k &= k + 1, \quad n = n + 1, \\ \text{if } n > s &\text{ then } n = 1, \end{aligned}$$

end while.

ILU(0) 前処理は, 係数行列を,

$$A = (\tilde{L} + I)(\tilde{U} + \tilde{D}) + R \quad (14)$$

と分解し,

$$K = (\tilde{L} + I)(\tilde{U} + \tilde{D}) \quad (15)$$

とする前処理である. ここで,  $\tilde{L}, \tilde{D}, \tilde{U}$  は ILU(0) 分

解によって生成された狭義下三角行列, 対角行列, 狭義上三角行列を各々意味し,  $R$  は  $\tilde{L}, \tilde{D}, \tilde{U}$  のスパース性を保つための誤差行列を意味する. ILU(0) 前処理では, 不完全分解過程において非零要素を除いた位置に現れるフィルインを考慮しない.

## 4. 数値実験

### 4.1 テスト行列

Table 1 に 10 種類のテスト用の非対称行列の特徴を示す. 行列は Florida 大学の疎行列データベース<sup>12)</sup> から選出した. 表中の “ $N$ ” は次元数, “NNZ” は総非零要素数, “ave. NNZ” は 1 行当りの平均非零要素数を各々表す.

Table 1 Specifications of test matrixes.

matrix	$N$	NNZ	ave. NNZ	analytical field
big	13,209	91,465	6.92	directed weight
language	399,130	1,216,334	3.05	graph
dc2	116,835	766,396	6.56	subsequent circuit
dc3	116,835	766,396	6.56	simulation
poisson3Db	85,623	2,374,949	27.74	computational fluid
raefsky2	3,242	293,551	90.55	dynamics
raefsky3	21,200	1,488,768	70.22	
stomach	213,360	3,021,648	14.16	2D/3D
torso3	259,156	4,429,042	17.09	
ecl32	51,993	380,415	7.32	semiconductor device

### 4.2 計算機環境と計算条件

計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った. 計算機は Nehalem (CPU : Intel Xenon X5570, クロック周波数 : 2.93GHz, メモリ : 24Gbytes, OS : RedHat Enterprise Linux 5.2) を用いた. プログラムは Fortran90 を用いて実装し, 最適化オプションは “-O3” を使用した.

右辺項ベクトル  $\mathbf{b}$  は物理的条件から得られる値を用いた. 収束判定条件は相対残差の 2 ノルム :  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq 10^{-8}$  とした. 初期近似解  $\mathbf{x}_0$  はすべて 0 とした. 行列は予め対角スケーリングによって対角項をすべて 1.0 に正規化した. 最大反復回数は 10000 回とした. 調べた反復法は IDR(s)-R2 法, BiCGStab 法, BiCGSafe 法と ILU(0) 前処理を各々 3 種類の解法に適用した計 6 種類である. IDR(s)-R2 法の空間次数  $s$  は 1, 2, 4, 8 の 4 通りを調べた. BiCGStab 法, BiCGSafe 法の初期シャドウ残差  $r_0^*$  は, 初期残差  $\mathbf{r}_0 (= \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$ , 区間  $[0, 1]$  の一様乱数, 定数 1.0 の 3 通りを与えた.

### 4.3 実験結果

Table 2-3 に 10 種類の行列に対する 6 種類の前処理つき反復法の収束性を示す．表中の時間の単位はすべて秒とする．表中の解法の表記について，BiCGStab 法，BiCGSafe 法，IDR( $s$ )-R2 は紙面の都合により Stab，Safe，R2 と各々略記する．表中で，2 種類のパラメータ：空間次数  $s$  および初期シャドウ残差  $r_0^*$  について最適な場合の数値を示す．表中の“max”，“div.(divergence)”は最大反復回数まで未収束，解が発散したことを各々意味する．表中の“ $s$ ”，“itr.(iteration)”，“TRR(True Relative Residual)”は次数，反復回数，真の相対残差の常用対数値である  $\log_{10}(\|b - Ax_{k+1}\|_2 / \|b - Ax_0\|_2)$  を各々意味する．表中の“rand”，“1.0”は一様乱数 (random number)，定数 1.0 を各々意味する．表中の“ratio”は前処理なし BiCGStab 法に対する残り 5 種類の解法の比を意味する．Table 4 に 6 種類の前処理つき反復法における実験結果のまとめを示す．Fig. 1 に行列 big における前処理なしおよび ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法の相対残差履歴を示す．Fig. 2 に行列 language における前処理なしおよび ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法の相対残差履歴を示す．Fig. 3 に行列 big における ILU(0) 前処理を適用した 3 種類の解法の相対残差履歴を示す．Fig. 4 に行列 raefsky3 における ILU(0) 前処理を適用した 3 種類の解法の相対残差履歴を示す．

Table 2-4 の観察から以下の知見が得られる．

- ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法の計算時間が最も短かった行列は，行列 big，language，raefsky2，raefsky3，stomach の合計 5 種類である．
- ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法は行列 dc3 において偽収束が発生．
- すべての行列において収束をした解法は，ILU(0) 前処理つき BiCGStab 法，前処理なし BiCGSafe 法，ILU(0) 前処理つき BiCGSafe 法である．
- 前処理なし IDR( $s$ )-R2 法は 5 種類の行列にだけ収束する．
- ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法が特に優れた収束性を示した行列として，行列 raefsky3 が挙げられ，前処理なし BiCGStab 法の計算時間の 20 分の 1 の時間で収束する．
- 行列 dc3 を除く 9 種類の行列において，ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法は前処理なし IDR( $s$ )-R2 法よりも収束性が優れ，前処理の効果を得られたことがわかる．

Fig. 1-4 の観察から以下の知見が得られる．

- 前処理なしおよび ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法において，反復初期の残差の減少は同等であるが，ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法はその後残差が急

Table 2 Performance of six kind of iterative methods for other five matrices.

matrix	method	pre.	$s$	$r_0^*$	itr.	time	ratio	TRR
big	Stab	none	-	1.0	2658	1.25	1.00	-8.33
		ILU(0)	-	rand	672	0.78	0.62	-8.05
	Safe	none	-	1.0	1503	0.79	0.63	-8.02
		ILU(0)	-	$r_0$	731	0.88	0.70	-8.05
	R2	none	8	-	1621	0.77	0.61	-8.08
		ILU(0)	8	-	324	<b>0.27</b>	0.21	-8.07
lan- guage	Stab	none	-	rand	24	0.43	1.00	-8.22
		ILU(0)	-	rand	6	0.35	0.81	-8.62
	Safe	none	-	$r_0$	25	0.56	1.30	-8.31
		ILU(0)	-	$r_0$	6	0.36	0.84	-9.33
	R2	none	1	-	45	0.51	1.18	-8.73
		ILU(0)	1	-	10	<b>0.31</b>	0.73	-8.45
dc2	Stab	none	-	$r_0$	223	1.20	1.00	-8.01
		ILU(0)	-	rand	106	1.17	0.98	-8.21
	Safe	none	-	$r_0$	114	<b>0.69</b>	0.58	-8.25
		ILU(0)	-	$r_0$	94	1.16	0.97	-8.41
	R2	none	8	-	239	1.50	1.25	-8.24
		ILU(0)	8	-	163	1.48	1.23	-9.16
dc3	Stab	none	-	$r_0$	1607	8.60	1.00	-8.07
		ILU(0)	-	rand	368	3.84	0.45	-8.17
	Safe	none	-	$r_0$	691	4.21	0.49	-8.02
		ILU(0)	-	$r_0$	335	3.94	0.46	-8.04
	R2	none	8	-	596	<b>3.71</b>	0.43	-8.23
		ILU(0)	8	-	200	-	-	(-7.75)
poisson- 3Db	Stab	none	-	1.0	244	3.80	1.00	-8.01
		ILU(0)	-	$r_0$	79	3.06	0.81	-8.12
	Safe	none	-	1.0	215	3.49	0.92	-8.03
		ILU(0)	-	1.0	65	<b>2.67</b>	0.70	-8.02
	R2	none	1	-	max	-	-	div.
		ILU(0)	4	-	140	2.84	0.75	-8.09

激に減少する．

- 行列 big において，ILU(0) 前処理つき BiCGStab 法および同 BiCGSafe 法の残差の振動が続いているが，ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法は残差が振動するが急速に収束する．
- 行列 raefsky3 において，ILU(0) 前処理つき IDR( $s$ )-R2 法は反復開始後に残差が増加しているが，その後の残差の減少幅が大きく，ILU(0) 前処理つき BiCGStab 法および同 BiCGSafe 法よりも速く収束する．

### 5. まとめと今後の課題

定常反復法の反復行列の与え方を前処理行列と見直し，IDR 定理を適用および次数を  $s$  次に拡張することによって IDR( $s$ )-R2 法を導出した．前処理行列として，ILU(0) 前処理を適用し数値実験を行った結果，従来の前処理つき反復法に比べ高い収束の速さが得られた．

今後の課題は，計算量を削減した定常型反復法の適

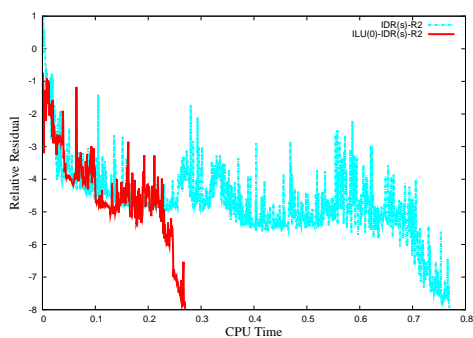


Fig. 1 The history of relative residual 2-norm of two kind of methods for matrix big.

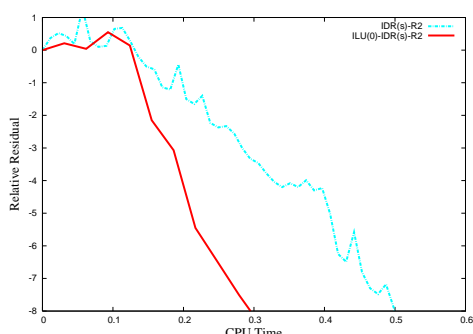


Fig. 2 The history of relative residual 2-norm of two kind of methods for matrix language.

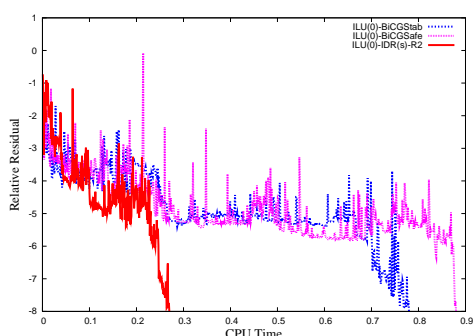


Fig. 3 The history of relative residual 2-norm of three kind of methods with ILU(0) preconditioning for matrix big.

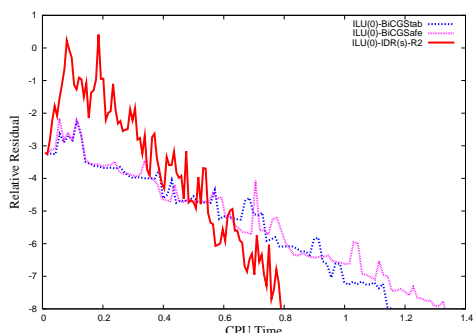


Fig. 4 The history of relative residual 2-norm of three kind of methods with ILU(0) preconditioning for matrix raefsky3.

Table 3 Performance of six kind of iterative methods for other five matrices.(cont'd)

matrix	method	precond.	s	$r_0^*$	itr.	time	ratio	TRR
raefsky2	Stab	none	-	$r_0$	348	0.26	1.00	-8.14
		ILU(0)	-	$r_0$	31	0.11	0.42	-9.23
	Safe	none	-	$r_0$	298	0.23	0.88	-8.10
		ILU(0)	-	$r_0$	31	0.10	0.38	-9.02
	R2	none	1	-	max	-	-	div.
		ILU(0)	8	-	44	<b>0.09</b>	0.35	-8.19
raefsky3	Stab	none	-	1.0	3459	20.38	1.00	-8.02
		ILU(0)	-	1.0	82	1.17	0.06	-8.01
	Safe	none	-	1.0	3099	18.63	0.91	-8.12
		ILU(0)	-	1.0	95	1.34	0.07	-8.28
	R2	none	1	-	max	-	-	div.
		ILU(0)	4	-	98	<b>0.79</b>	0.04	-9.00
stomach	Stab	none	-	$r_0$	max	-	-	div.
		ILU(0)	-	$r_0$	7	0.44	-	-8.17
	Safe	none	-	1.0	155	2.74	-	-8.12
		ILU(0)	-	rand	7	0.44	-	-8.69
	R2	none	1	-	max	-	-	div.
		ILU(0)	2	-	14	<b>0.42</b>	-	-8.33
torso3	Stab	none	-	$r_0$	79	1.76	1.00	-8.08
		ILU(0)	-	rand	20	1.21	0.69	-8.49
	Safe	none	-	$r_0$	40	<b>1.03</b>	0.59	-8.03
		ILU(0)	-	rand	20	1.24	0.70	-8.94
	R2	none	1	-	max	-	-	div.
		ILU(0)	4	-	33	1.15	0.65	-8.53
ecl32	Stab	none	-	rand	307	0.65	1.00	-8.24
		ILU(0)	-	$r_0$	114	<b>0.61</b>	0.94	-8.68
	Safe	none	-	1.0	309	0.77	1.18	-8.03
		ILU(0)	-	$r_0$	116	0.68	1.05	-8.50
	R2	none	8	-	666	1.82	2.79	(-6.66)
		ILU(0)	8	-	167	0.69	1.06	-8.58

Table 4 Summary of performance of preconditioned iterative methods

method	precond.	no. of	no. of
		convergence	fastest case
Stab	none	9/10	0/10
	ILU(0)	10	1
Safe	none	10	2
	ILU(0)	10	1
R2	none	5	1
	ILU(0)	9	<b>5</b>

用することや、偽収束が発生しないよう、残差ベクトルの更新式を改良することである。

### 参考文献

- 1) 藤野清次, 尾上勇介, IDR 定理をベースにした SOR 法の提案, 加速法ワークショップ講演集, pp.U1-U6, 2009.
- 2) 藤野清次, 張紹良, 反復法の数理, 朝倉書店, 1996.
- 3) 藤野清次, Sonneveld, P., 尾上勇介, van Gijzen, M.B.,

- IDR(s)-SOR 法の提案, 日本応用数学会論文誌, Vol.20, pp.289-308, 2010.
- 4) Fujino, S., A hybrid of BiCGStab and GPBiCG methods with efficiency and robustness, Applied Numerical Mathematics, Vol.41, pp.107-117, 2002.
  - 5) 藤野清次, 藤原牧, 吉田正浩, 準残差の最小化に基づく BiCGSafe 法の収束性について, Transactions of JSCES, Paper No.20050028, 2005.
  - 6) 春松正敏, 日下部雄三, 藤野清次, 福重貴浩, 有馬敏幸, Sonneveld, P., IDR 定理に基づく GS 法と SOR 法の提案と収束性評価, 情報処理学会 HPC 研究会報告, pp.1-6, 2009.
  - 7) Li, N., Saad, Y., Chow, E., Crout version of ILU for general sparse matrices, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol.25, pp.716-728, 2003.
  - 8) Onoue, Y., Fujino, S., A Proposal of GS(Gauss-Seidel)-based Preconditioner without Extra Forward and Backward Substitutions, 2nd International Kyoto-Forum on Krylov Subspace method, pp.29-36, 2010.
  - 9) Saad, Y., van der Vorst, H.A., Iterative solution of linear systems in the 20th century, J. of Computational and Applied Mathematics, Vol.123, pp.1-33, 2000
  - 10) Sonneveld, P., AGS - IDR - CGS - BiCGStab - IDR(s): The circle closed, A case of serendipity, The Proc. of Int. Kyoto Forum 2008 on Krylov subspace methods, pp.1-14, 2008.
  - 11) Sonneveld, P., van Gijzen, M.B., IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 31, pp.1035-1062, 2008.
  - 12) University of Florida Sparse Matrix Collection:  
<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html>