九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Study on the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model

シッド，アルマンド，イサク，レジェス，ブストス

https://hdl.handle.net/2324/1959076

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　名	ｼｯﾄﾞ ｱﾙﾏﾝﾄﾞ ｲｻｸ ﾚｼﾞｪｽ ﾌﾞｽﾄｽ Cid Armando Isaac Reyes Bustos
論　文　名	Study on the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model (非対称量子ラビ模型の固有値に関する研究)
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　　若山正人 副　査　　九州大学　　教授　　廣島文生 副　査　　九州大学　　教授　　落合啓之 副　査　　琉球大学　　教授　　木本一史 副　査　　マックス・プランク固体物理学研究所 研究員　Daniel Braak

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

本学位論文の主題は、量子光学において最も基本的で重要だとされている量子ラビ模型を含み、さらに理論家のみならず実験家にとっても重要視されている非対称ラビ模型のスペクトルに関するものである。量子ラビ模型は２準位原子と１光子との相互作用を記述する物理モデルであるが、近年、数理物理学の研究者のみならず極めて多くの物理学者によってその一般化模型も含めた研究が進展している。本論文の意義と位置づけについて述べるため、まずは歴史を紐解く。準古典的ラビ模型は、Isidor Isaac Rabi （原子核の磁気的性質を測定する共鳴法の開発により 1944 年にノーベル物理学賞受賞）により 1936 年に定式化され、その後、1963 年の Jaynes と Cummings の論文において、光子の部分も量子化され量子ラビ模型が定式化された。しかしながら、量子ラビ模型の解析解を求める事は極めて困難であったため、以降、当該模型は完全可解系ではないと考えられてきた。一方で同じ論文で定式化された量子ラビ模型の回転波近似である Jaynes -Cumming 模型については、完全可解系であることが容易に示される。さらにこの Jaynes -Cumming 模型は、実験で確認できるようなパラメータ（エネルギー準位差、結合定数）の範囲での種々の実験にも整合的であった。ところが近年になり、以下の 2 点の重要な事実が判明した。長く完全可解系でないと信じられていた量子ラビ模型が、実は完全可解系であり解析解が存在することが、Daniel Braak によって 2011 年に示された。2012 年にノーベル物理学賞を受けた Serge Haroche と David Wineland の業績「個別の量子系に対する計測および制御を可能にする画期的な実験的手法に関する業績」を見ても、量子光学における相互作用系の研究は、情報科学、特に量子計算機の実現に不可欠であるとされている。一方で、このように実験技術が格段に進歩するなか、2014 年には Maissen et al.により、（強結合と呼ばれるパラメータに対する）Jaynes -Cumming 模型は実験結果に合わず、回転波近似をしていない量子ラビ模型そのものを扱わねばならないことが判明した。先に述べたような近年の量子ラビ模型に関係する研究の進展には、以上のような背景がある。

本論文の主目的は、非対称量子ラビ模型の固有値の縮退を完全に決定すること、さらには退化しない場合の例外固有値を含め、リー環 sl_2 の表現でそれらの固有空間を記述することである。量子ラビ模型（＝対称量子ラビ模型）については、Braak の完全可解性証明の以前から Kus により

縮退固有値の決定がなされていた（1985 年）。それらは、固有状態（ベクトル）がいわゆる Judd 解（quasi-exact solution ともいう）と呼ばれる多項式的に与えられるもので尽くされる。一般に量子ラビ模型の固有値は例外型及び正則型固有値からなり、さらに例外型固有値は Judd 型と非 Judd 型からなる。ここで、正則型と非 Judd 型は縮退しない（なお、非 Judd 型の固有値は、2014 年になり、Maciejewski et al.の論文で初めて数値解析的にその存在が指摘された）。Braak の論文における完全可解系の証明においては、その零点が正則型固有値を与えることになる G-関数と呼ばれる複素有理型関数の構成が鍵であった。（なお、この G-関数の極が丁度 Judd 型例外固有値を与えることが Braak の当該論文にも示唆されていたが、そこでの議論は不完全であり、本学位論文ではその点にも明確な証明を与えている。なお、この時点で非 Judd 型の固有値の存在が確認されなかったのは、そのためでもある。）さらに G-関数の構成のポイントとなるのは量子ラビ模型のハミルトニアンが持つ Z/2Z-対称性（固有関数の偶奇性のようなもの）であり、その対称性のために Judd 型のような縮退固有値が存在すると理解されていた。非対称量子ラビ模型は量子ラビ模型にこの対称性を崩す一つの項 $\varepsilon\sigma_x$（ε は実数、σ_x パウリ行列）が追加されたものである。ハミルトニアン自体の対称性の喪失により、非対称量子ラビ模型では、先験的には縮退は起こらないと考えられてきた。なお、非対称量子ラビ模型は単なる理論模型に止まらずトンネル効果を考慮したモデルとして、超電導人工原子と電磁場の相互作用に関する最近の Semba et al. の論文（2018 年）などの実験研究にも直接つながっている。ところが、2015 年の Li-Batchelor の論文において、数値計算の結果から、$\varepsilon=1/2$ のときには、縮退する固有値が存在するだろうとの予想がなされた。2016 年、Wakayama はこれを証明し、さらに ε が半整数の時には、常に縮退が起こるとの予想を Judd 解の存在を記述する constraint 多項式の整除性の問題として定式化するとともに、constraint 多項式に関するより一般的な予想を提出した。その後、前者の予想は当該多項式の行列式表示とその正値性を示すことにより本申請者-Kimoto-Wakayama の論文で解決したが、本学位論文ではさらに、後半の予想の成立も証明されている。これらの議論には、行列式表示に関する深い考察と、さらに正値性については多項式の根の分布に関する極めて精緻な議論が必要であった。また、この議論を通し、申請者は直交多項式に関連して、自然対数の底 e の冪に関する（おそらく既知でない）美しい連分数展開公式も導いている。また、Judd 解についてのみならず、例外型の非 Judd 解についても、新しく G-関数にあたる解析関数を導入しその非縮退性を示し、さらには sl_2 の離散系列表現との関係を論じた。そのほか、非対称量子ラビ模型のスペクトル全体に対しても新しい知見を与えている。

上述の結果は、数理物理学、表現論、直交多項式・特殊関数論において大きな意義があるばかりか理論物理学においてもインパクトを与えるものである。また、（量子ラビ模型と所謂 Heun 描像において合流操作を通して繋がる）非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数は豊かな数論的性質を持つことが知られているが、同様のことが期待される量子ラビ模型のスペクトルゼータ関数の特殊値研究に対して、本論文は重要な足掛かりを与えるものである。

以上のことから本学位論文は極めて価値ある業績と認められる。よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。