Misanthrope model の流量-密度関係式の導出について

金丸, 真理子
立教大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部

https://doi.org/10.15017/1957526

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.151-156, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 23 (pp. 151 - 156)

Misanthrope model の流量-密度関係式の導出について

金丸 真理子（Kanamaru Mariko），筧 三郎（KAKEI Saburo）

（Received 16 January 2018; Accepted 11 February 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

Misanthrope model の流量-密度関係式の導出について

立教大学大学院理学研究科　金丸 真理子 (Kanamaru, Mariko)
立教大学理学部　筧 三郎 (Kakei, Saburo)

概要

交通流の CA モデルの一つである misanthrope model に関して，金井は 2 レーンの場合を考察し，超幾何関数の関係式を用いて流量-密度関係式を導出した．本研究では，金井の手法を再考した上で，3 レーンの場合への拡張を試みる．

1　はじめに

数理モデルを用いた交通流の研究は近年大きく発展し，様々なアプローチからの研究が行われている [1, 2, 3]．交通流に対する数理モデルを大別すると，微分方程式を用いたもの，セルオートマトン (CA) を用いたものに分けられる．さらに，決定論的モデルと確率モデルがあり，様々なモデルが提案されてきた．

本研究で注目する misanthrope (人嫌い) モデルは，元々は数学的観点から導入された確率過程であるが [4]，Evans, Hanney [5] によって，非平衡統計物理学の観点から研究された．金井 [6] は，複数のレーンを持つ交通流モデルとしての側面に着目し，2 レーンの misanthrope モデルに対する流量-密度関係式の解析的表示式を与え，それがシミュレーションの結果とよく一致することを示した．

本稿では，金井による流量-密度関係式の導出法を再考した上で，それを 3 レーンに拡張する試みを紹介することが目的である．

2　2 レーン misanthrope モデル

まずは 2 レーンの場合の misanthrope モデルを紹介し，金井による流量-密度関係式の導出法の概要をみておこう．

N を粒子数，L をサイト数，n_l を l 番目のサイトの粒子数とする．ただし，周期的境界条件 $n_{l+L} = n_l$ $(l = 1, \ldots, L)$ を満たすものとする．また，ある時刻において，l 番目のサイトに n_l 個，$l+1$ 番目のサイトに n_{l+1} 個の粒子があるときに，次の時刻に粒子が l 番目のサイトから $l+1$ 番目のサイトにホップする確率を $u(n_l, n_{l+1})$ とする (図 1)．

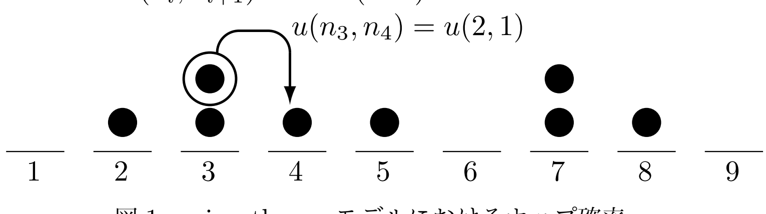

図 1　misanthrope モデルにおけるホップ確率

このモデルに対して，金井 [6] は以下の手法を用いて流量-密度関係の解析表示式を得た．

Step 1:　マスター方程式において，因子分解された定常解を持つための条件を導出する．

Step 2:　流量を系の分配関数 Z_{LN} を用いて表す．このとき，$Z_{L-2,N-1}$ などといった，パラメータがずれたものが現れる．

Step 3:　Z_{LN} を超幾何関数 ${}_2F_1$ で表し，超幾何関数の隣接関係式を用いて Step 2 に現れるパラメータのずれを消す．

Step 4:　超幾何微分方程式を用いて熱力学的極限 ($N \to \infty$，$N/L =$ 固定) を計算する．

この流れを，もう少し詳しく見ていこう．

(Step 1) 系の状態を，粒子の配列 $\omega := (n_1, n_2, \cdots, n_L)$ によって表すことにする．配列 ω の状態になる確率を $P(\omega)$ とすると，定常状態の misanthrope モデルにおけるマスター方程式は次のようになる:

$$\sum_{n=1}^{L} \{u(n_{l-1}+1, n_l-1)P(\ldots, n_{l-1}+1, n_l-1, \ldots) - u(n_{l-1}, n_l)P(\ldots, n_{l-1}, n_l, \ldots)\} = 0. \tag{1}$$

ここで，因子分解された形

$$P(\omega) = c\, f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_L) \quad (c \text{ は規格化定数}) \tag{2}$$

を仮定する．これを (1) に代入すると，(2) の形の解を持つ条件として，

$$f(2) = \frac{u(1,1)f^2(1)}{u(2,0)f(0)}, \quad u(2,1) = u(2,0) - u(1,0) \tag{3}$$

という関係式が得られる．このとき $u(2,0) > u(1,0) > u(2,1)$ となるが，このような条件をおくことは，交通流のモデルとして妥当であることが，[6] で議論されている．実際，2 車線の道路において，車が混んでいると進みにくくなることから $u(1,0) > u(2,1)$ となり，並走して走ることを嫌がるとすれば $u(2,0) > u(1,0)$ と考えられるので．“misanthrope” (人嫌い) という名称とも合致する．

配列 ω において，ちょうど n 個の粒子を含んでいるサイト数を $\sigma_n(\omega)$ とすると，$\sigma_0(\omega)+\sigma_1(\omega)+\sigma_2(\omega) = L$, $\sigma_1(\omega)+2\sigma_2(\omega) = N$ となる．$P(\omega)$ に対する仮定と式 (3) より，

$$P(\omega) = c\prod_{l=1}^{L} f(n_l) = cf(0)^{L-N}f(1)^N \left(\frac{u(1,1)}{u(2,0)}\right)^{\sigma_2(\omega)} \left(=: \tilde{Z}_{LN} \text{とおく}\right) \tag{4}$$

であるので，規格化定数 c は以下のように表せる:

$$\frac{1}{c} = f(0)^{L-N}f(1)^N \sum_{|\omega|=N} \left(\frac{u(1,1)}{u(2,0)}\right)^{\sigma_2(\omega)} \left(=: \tilde{Z}_{LN} \text{とおく}\right). \tag{5}$$

(Step 2) 金井の論文 [6] に合わせて，分配関数 Z_{LN} を

$$Z_{LN} = \sum_{|\omega|=N} \lambda^{\sigma_2(\omega)}, \quad \lambda = \frac{u(1,1)}{u(2,0)} \tag{6}$$

で定義する．流量 Q_{LN} は，あるサイトから隣にホップする個数の期待値として定義される:

$$\begin{aligned} Q_{LN} &= \sum_{|\omega|=N} u(n_1,n_2)P(\omega) = \sum_{m,n=0}^{2} u(m,n)f(m)f(n)\frac{\tilde{Z}_{L-2,L-m-n}}{\tilde{Z}_{LN}} \\ &= u(1,0)\frac{Z_{L-2,N-1} - \lambda Z_{L-2,N-3}}{Z_{LN}} + u(2,0)\frac{2\lambda Z_{L-2,N-2} + \lambda Z_{L-2,N-3}}{Z_{LN}}. \end{aligned} \tag{7}$$

(Step 3) まずはガウスの超幾何関数 ${}_2F_1$ の定義を確認しておく:

$$ {}_2F_1\left(a,b,c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}. \tag{8} $$

ここで，いわゆるポッホハマー記号 $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ を用いた．これを用いると，(Step 1) で求めた分配関数 Z_{LN} は，以下のように表される:

$$ Z_{LN}=\binom{L}{N}{}_2F_1\left(\frac{-N}{2},\frac{-N+1}{2},L-N+1;4\lambda\right). \tag{9} $$

ここで，次の超幾何関数 ${}_2F_1$ の 2 次変換公式を用いる:

$$ (1+x)^{\alpha}{}_2F_1(\alpha,\alpha-\gamma+1,\gamma;x)={}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\gamma;\frac{4x}{(1+x)^2}\right). \tag{10} $$

新たな変数 z を $\lambda=z/(1+z)^2$ により定め，これを式 (9) に用いると，

$$ Z_{LN}=\binom{L}{N}(1+z)^{-N}{}_2F_1(-N,-L,L-N+1;z) \tag{11} $$

が得られる．以下では簡単のため，

$$ F(z)={}_2F_1(-N,-L,L-N+1;z) \tag{12} $$

とおくことにする．すると，超幾何関数 ${}_2F_1$ の隣接関係式により，式 (7) の Q_{LN} は以下のように書き換えられる:

$$ Q_{LN}=u(1,0)\frac{N(L-N)}{L(L-1)}\frac{1+z}{1-z}\left(1-\frac{2z}{N}\frac{F'}{F}\right)-u(2,0)\frac{N(2L-N)}{L(L-1)}\frac{z}{1-z}\left(1-\frac{1+z}{N}\frac{F'}{F}\right). \tag{13} $$

(Step 4) (12) の F に対する超幾何微分方程式は以下のようになる:

$$ z(1-z)F''+\{1+L-N-(1-L-N)z\}F'-LNF=0. \tag{14} $$

$g=F'/F$ とおくと，g は次のリッカチ型微分方程式を満たす:

$$ z(1-z)(g'+g^2)+\{1+L-N-(1-L-N)z\}g-LN=0. \tag{15} $$

$N\to\infty$ での挙動を調べるために，

$$ g=g_1N+g_0+g_{-1}N^{-1}+\cdots \tag{16} $$

と仮定する．密度 $\rho=N/L$ が一定という条件の下で，(16) を (15) に代入し，N^2 の項だけ取り出すと，

$$ \rho z(1-z)g_1^2+\{1-\rho+(1+\rho)z\}g_1-1=0 \tag{17} $$

という，g_1 についての 2 次方程式が得られる．これを解くと，

$$ g_1=\frac{\rho-\frac{1+z}{1-z}+\sqrt{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-2\rho+\rho^2}}{2\rho z} \tag{18} $$

が得られる，これらにより，式 (13) の熱力学的極限は,

$$Q(\rho) := \lim_{\substack{N\to\infty \\ \rho=N/L}} Q_{LN} = \frac{u(2,0)}{2}\rho(2-\rho)\left(1 - \frac{2-\rho-2\frac{u(1,0)}{u(2,0)}(1-\rho)}{1+\sqrt{1-(1-4\frac{u(1,1)}{u(2,0)})\rho(2-\rho)}}\right) \tag{19}$$

となる．こうして得られた流量 Q と密度 ρ の関係式はシミュレーションの結果とよく一致する [6].

以上の導出においては，超幾何関数の 2 次変換 (10) が用いられたが，実はこれは必要ではない．実際，2 次変換 (10) を用いなくても，Z_{LN} が

$$Z_{L,N-1} = \frac{2N}{2L-N+1}Z_{LN} + \frac{1-4\lambda}{2L-N+1}\frac{dZ_{LN}}{d\lambda}, \quad Z_{L-1,N} = \frac{L-N}{L}Z_{LN} + \frac{\lambda}{L}\frac{dZ_{LN}}{d\lambda}. \tag{20}$$

という隣接関係式を満たすことが証明できる．また，Z_{LN} が

$$\lambda(1-4\lambda)Z''_{LN} + \left\{(4N-6)\lambda + L - N + 1\right\}Z'_{LN} - N(N-1)Z_{LN} = 0 \tag{21}$$

を満たすことは，(9) から分かる．超幾何微分方程式 (21) は，金井が用いた (14) とはパラメータが異なるが，これらを用いて計算しても，金井の結果 (19) を再現することができる．

3　3 レーン misanthrope モデルに向けて

前節で紹介した金井 [6] の結果を，3 レーンの場合にに拡張することを試みる．現時点では流量-密度関係式の解析的表示式にまではたどり着いていないが，研究集会の際に「予想」となっていた部分に進展が見られており，現状を報告する．以下で示すように，(Step 1) と (Step 2) では同様の議論を進めることができるが，(Step 3) で問題が生じる．

(Step 1) 前節と同様に，因子分解された形 (2) をマスター方程式 (1) に代入すると，以下の 5 つの関係式が得られる:

$$\begin{aligned}
&f(2) = \frac{u(1,1)f(1)^2}{u(2,0)f(0)}, \quad f(3) = \frac{u(1,2)u(1,1)f(1)^3}{u(3,0)u(2,0)f(0)^2}, \\
&u(2,0) - u(1,0) + u(1,2) - u(2,1) = 0, \\
&u(3,1) - u(3,0) + u(2,0) = 0, \quad u(3,0) - u(2,0) - u(3,2) = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

また，この場合は $\sigma_0(\omega)+\sigma_1(\omega)+\sigma_2(\omega)+\sigma_3(\omega) = L$, $\sigma_1(\omega)+2\sigma_2(\omega)+3\sigma_3(\omega) = N$ となることから，以下のことが成り立つ:

$$P(\omega) = c\prod_{l=1}^{L} f(n_l) = cf(0)^{L-N}f(1)^N\left(\frac{u(1,1)}{u(2,0)}\right)^{\sigma_2(\omega)}\left(\frac{u(1,2)u(1,1)}{u(3,0)u(2,0)}\right)^{\sigma_3(\omega)}. \tag{23}$$

したがって，規格化定数 c は以下のように表せる:

$$\frac{1}{c} = f(0)^{L-N}f(1)^N\sum_{|\omega|=N}\Big(\frac{u(1,1)}{u(2,0)}\Big)^{\sigma_2(\omega)}\Big(\frac{u(1,2)u(1,1)}{u(3,0)u(2,0)}\Big)^{\sigma_3(\omega)}\Big(=: \tilde{Z}_{LN}\text{とおく}\Big). \tag{24}$$

(Step 2) この場合の分配関数 Z_{LN} を

$$Z_{LN} = \sum_{|\omega|=N}\lambda^{\sigma_2(\omega)}\mu^{\sigma_3(\omega)}, \quad \lambda = \frac{u(1,1)}{u(2,0)}, \quad \mu = \frac{u(1,2)u(1,1)}{u(3,0)u(2,0)} \tag{25}$$

により定める．すると，流量 Q_{LN} は，

$$
\begin{aligned}
Q_{LN} &= \sum_{|\omega|=N} u(n_1,n_2)P(\omega) = \sum_{m,n=0}^{3} u(m,n)f(m)f(n)\frac{\tilde{Z}_{L-2,L-m-n}}{\tilde{Z}_{LN}} \\
&= u(1,0)\frac{Z_{L-2,N-1}-\lambda Z_{L-2,N-3}-2\mu Z_{L-2,N-4}}{Z_{LN}} \\
&\quad + u(2,0)\frac{2\lambda Z_{L-2,N-2}+\lambda Z_{L-2,N-3}-\lambda\mu Z_{L-2,N-5}}{Z_{LN}} \\
&\quad + u(3,0)\frac{3\mu Z_{L-2,N-3}+2\mu Z_{L-2,N-4}+\lambda\mu Z_{L-2,N-5}}{Z_{LN}}
\end{aligned} \tag{26}
$$

として表される．(26) における Z_{LN} の添字のズレを扱う際，2 レーンの場合は，分配関数 Z_{LN} を超幾何関数 ${}_2F_1$ と関係付けることによって，隣接関係式を導くことができた．しかし，3 レーンの場合の分配関数 (25) の場合は，例えば Appell の $F_1 \sim F_4$ などのような，古典的に知られている 2 変数超幾何関数 (cf. [7], §4.10) と直接結びつけて考えることは難しい．

研究集会では，3 レーンの場合の分配関数 (25) に対して，次の予想を提出した:

$$
\begin{aligned}
Z_{L-1,N} &= \frac{L-N}{L}Z_{LN} + \frac{\lambda}{L}\frac{\partial Z_{LN}}{\partial\lambda} + \frac{2\mu}{L}\frac{\partial Z_{LN}}{\partial\mu}, \\
Z_{L,N-1} &= \frac{3N}{3L-N+1}Z_{LN} - \frac{6\lambda-2}{3L-N+1}\frac{\partial Z_{LN}}{\partial\lambda} + \frac{\lambda-9\mu}{3L-N+1}\frac{\partial Z_{LN}}{\partial\mu}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

その後の研究で，関係式 (27) が実際に正しいことの証明，および $Z_{LN}(\lambda,\mu)$ の満たす偏微分方程式系を導出することに成功した．これらについて，節を改めて議論しよう．

4　分配関数と GKZ 超幾何系

Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky は，超幾何級数を一般化することから出発して，広いクラスの超幾何関数を統一的に捉える視点を提案した [8, 9, 10, 11]．論文 [9] では “A-超幾何関数” と呼ばれているが，ここでは [10, 11] に従って “GKZ 超幾何関数” と呼ぶことにする．

3 レーンの場合の分配関数 (25) を GKZ 超幾何系の文脈で理解するために，2×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に付随する GKZ 超幾何級数 $\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ を次で定義する:

$$
\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3) = \sum_{\substack{\vec{k}=(k_0,k_1,k_2,k_3)\\ \vec{k}\in \mathrm{Ker}A\cap\mathbb{Z}^4}} \frac{x_0^{L-N+k_0}x_1^{L+k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}}{\Gamma(L-N+k_0+1)\Gamma(L+k_1+1)\Gamma(k_2+1)\Gamma(k_3+1)}. \tag{28}
$$

ただし L,N は非負正数とし，$\Gamma(z)$ はガンマ関数である．k が負の整数であるときは $1/\Gamma(k+1)=0$ であるので，今の場合，(28) の右辺は実は有限和である．すると，(25) の $Z_{LN}(\lambda,\mu)$ は，

$$
Z_{LN}(\lambda,\mu) = \sum_{\substack{\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=L\\ \sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3=N\\ \sigma_j\geq 0\ (j=0,1,2,3)}} \frac{L!}{\sigma_0!\,\sigma_1!\,\sigma_2!\,\sigma_3!}\lambda^{\sigma_2}\mu^{\sigma_3} = L!\,\varphi(1,1,\lambda,\mu) \tag{29}
$$

として，$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ を用いて表される．このことを用いると，$\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ が満たす，いわゆる “GKZ 超幾何方程式系” [8, 9, 10, 11] を経由して，$Z_{LN}(\lambda,\mu)$ が次の偏微分方程式系を満た

すことが示される:

$$
\begin{aligned}
&\lambda(4\lambda-1)\partial_\lambda^2 Z_{LN} + 2\mu(6\lambda-1)\partial_\lambda\partial_\mu Z_{LN} + 9\mu^2\partial_\mu^2 Z_{LN} \\
&\qquad + \{2\lambda(3-2N)+N-L-1\}\,\partial_\lambda Z_{LN} - 6\mu(N-2)\partial_\mu Z_{LN} + N(N-1)Z_{LN} = 0, \\
&\partial_\lambda^2 Z_{LN} + 2\lambda\partial_\lambda\partial_\mu Z_{LN} + 3\mu\partial_\mu^2 Z_{LN} - (N-3)\partial_\mu Z_{LN} = 0, \\
&2\lambda\partial_\lambda^2 Z_{LN} + (\lambda+3\mu)\partial_\lambda\partial_\mu Z_{LN} + 2\mu\partial_\mu^2 Z_{LN} + (2-N)\partial_\lambda Z_{LN} + (L-N+2)\partial_\mu Z_{LN} = 0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

また，研究集会では「予想」として提示した (27) も，GKZ 超幾何系の隣接関係式を示すための標準的な議論により，証明を与えることができる (cf. [12]).

こうして，2 節の “Step 2”, “Step 3” の計算を，3 レーンの場合で実行するための素材，すなわち，$Z_{LN}(\lambda,\mu)$ に対する隣接関係式 (27)，および超幾何偏微分方程式系 (30) が出揃ったことになる．しかし，残念ながら今のところ，これらを用いることで熱力学的極限をとって，流量-密度関係を計算するというプランを最後まで実行できていない．流量-密度関係の解析的表示式を導出し．シミュレーションとの比較を行うことを目標に，現在研究を進めている．

謝辞

久留米工業大学の金井政宏先生には，論文 [6] の内容について詳しくご説明いただき，また，関連する論文をご紹介いただきました，ここに感謝致します．

参考文献

[1] 杉山雄規, 交通流の物理, ながれ **22** (2003), 95–108.

[2] B.S. Kerner, *The Physics of Traffic*, Springer, Berlin, 2004.

[3] 友枝明保・西成活裕，社会現象の数理 — 渋滞学入門，「現象数理学入門」(三村昌泰 編) 所収，東京大学出版会，2013, pp. 79–108.

[4] C. Cocozza-Thivent, Processus des misanthropes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb.*, **70** (1985), 509–523.

[5] M.R. Evans and T. Hanney, Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), R195–R240.

[6] M. Kanai, Two-lane traffic-flow model with an exact steady-state solution, *Phys. Rev.* **E82** (2010), 066107.

[7] 木村弘信，超幾何関数入門 – 特殊関数への統一的視点からのアプローチ –，臨時別冊数理科学 SGC ライブラリ **55**, サイエンス社，2007.

[8] I.M. Gel’fand, A.V. Zelevinskii and M.M. Kapranov, Hypergeometric functions and toral manifolds, *Functional Analysis and its Applications* **23** (1989), 94–106.

[9] I.M. Gel’fand, M.M. Kapranov and A.V. Zelevinsky, Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions, *Advances in Math.* **84** (1990), 255–271.

[10] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000.

[11] 原岡喜重，超幾何関数 (すうがくの風景 7)，朝倉書店，2002.

[12] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama, Hypergeometric polynomials and integer programming, *Compositio Math.* **115** (1999), 185–204.