

Davey-Stewartson II 方程式のdark型線ソリトン相互作用と三角形分割

巢山, 大地
早稲田大学基幹理工学研究科

永原, 新
早稲田大学基幹理工学研究科

丸野, 健一
早稲田大学理工学術院

<https://doi.org/10.15017/1957524>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29A0-S7 (1), pp.138-144, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用—」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 21 (pp. 138 - 144)

Davey-Stewartson II 方程式の dark 型線ソリトン相互作用と三角形分割

巢山 大地 (Suyama Daichi), 永原 新 (Nagahara Arata), 丸
野 健一 (Maruno Ken-ichi)

(Received 12 February 2018; Accepted 12 March 2018)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

Davey-Stewartson II 方程式の dark 型線ソリトン相互作用と三角形分割

早稲田大学基幹理工学研究科 巢山 大地 (Daichi Suyama)

早稲田大学基幹理工学研究科 永原 新 (Arata Nagahara)

早稲田大学理工学術院 丸野 健一 (Ken-ichi Maruno)

概要

2次元弱非線形有限水深の数値モデルの1つとして知られている Davey-Stewartson(DS) 方程式は多様な厳密解を持ち、特に DS2 方程式と呼ばれる場合には dark 型の N -線ソリトン解を持つことが知られている。本稿では、DS2 方程式の dark 型線ソリトン相互作用について三角形分割を用いた詳細な解析を行う。

1 イントロダクション

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式をはじめとする 2次元ソリトン方程式は複雑な相互作用をすることが知られている。Miles が発見した KP 方程式のソリトン共鳴 [1, 2] は 2つの波から大きな波が新たに生成される機構であり、浅水波の Mach 反射を説明するためこれまで様々な研究がなされてきた。特に KP 方程式の線ソリトン相互作用の詳細な解析は Kodama らによってなされ、二次元のソリトンダイナミクスの持つ数理的構造が明らかになってきた [3–12]。例えば以下のようなことが分かっている：

- KP2 方程式の解である τ 関数は、相互作用のパターンを決定する「 A 行列」と、ソリトンの角度や振幅を決定する「パラメーター k 」によって決定される。
- ソリトンのグラフは卓越する領域の移り変わりに着目することで置換と対応付けることができ、与えられた置換から A 行列を構成できる。
- A 行列とパラメーター k の情報を集約した chord 図と呼ばれるものが存在し、与えられた chord 図からソリトンのグラフが描ける。
- ソリトンのグラフから chord 図を構成することができ、ソリトンのグラフに対応する τ 関数を決定できる。
- Le-diagram やネットワークのような組み合わせ論的手法を用いて詳細な解析ができる。

一方、KP 方程式と同様に 2次元ソリトン方程式の代表例として知られている Davey-Stewartson (DS) 方程式 [13]

$$iu_t + u_{xx} - \sigma_1 u_{yy} + 2\sigma_2 |u|^2 u + 4uQ = 0, \quad (1)$$

$$Q_{xx} + \sigma_1 Q_{yy} + \sigma_2 (|u|^2)_{xx} = 0. \quad (2)$$

は dark 型 N -線ソリトン解 [14] やランプ解 [15]、ドロミオン解 [16] など多様な厳密解を持つ。ここで $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = \pm 1$ であり $\sigma_1 = -1$ のとき DS1 方程式, $\sigma_1 = 1$ のとき DS2 方程式と呼ばれている。また $\sigma_2 = -1$ のとき focusing, $\sigma_2 = 1$ のとき defocusing に対応する。

DS 方程式においても KP 方程式と同様の解析ができると期待されるが、そのような解析は十分にはなされていない。永原らは DS2 方程式のダーク型線ソリトン解に対する数値計算スキームを開発し、広田の方法と数値計算を用いて DS2 ソリトンの相互作用の角度依存性を調べた [17]。しかし、KP 方程式に対して行われたような理論解析は未完成である。

本稿では $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$ とした defocusing DS2 方程式の dark 型線ソリトン相互作用について、三角形分割を用いた解析によって DS2 ソリトンのグラフから chord 図と τ 関数が決定できることを報告する。

2 DS2 方程式の τ 関数と A 行列, パラメーター ψ

(1), (2) 式に

$$u = \rho_0 \frac{g(x, y, t)}{f(x, y, t)} e^{i(kx+ly-\omega t+\xi^{(0)})}, u^* = \rho_0 \frac{g^*(x, y, t)}{f(x, y, t)} e^{-i(kx+ly-\omega t+\xi^{(0)})}, Q = (\log f(x, y, t))_{xx} \quad (3)$$

を代入すると双線形形式

$$(iD_t + D_x^2 - \sigma_1 D_y^2 + 2ikD_x - 2i\sigma_1 l D_y) g \cdot f = 0, \quad (4)$$

$$(-iD_t + D_x^2 - \sigma_1 D_y^2 - 2ikD_x + 2i\sigma_1 l D_y) g^* \cdot f = 0, \quad (5)$$

$$(D_x^2 + \sigma_1 D_y^2 + \omega - k^2 + \sigma_1 l^2) f \cdot f + 2\sigma_2 \rho_0^2 |g|^2 = 0 \quad (6)$$

を得る [15, 18]. ここで f は実関数, g は複素関数, g^* は g の複素共役であり, $k, l, \omega, \rho_0, \xi^{(0)}$ は実定数である. また D_x^m は広田の D -オペレーターと呼ばれ, (7) 式で定義される:

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}. \quad (7)$$

このとき $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$ とした defocusing DS2 方程式は以下のような Wronskian で表される dark 型 N -線ソリトン解を持つ [18–20]:

$$u = \frac{\tau^{\left(\frac{1-N}{2}+1\right)}}{\tau^{\left(\frac{1-N}{2}\right)}} e^{2it}, \quad Q = (\log \tau^{\left(\frac{1-N}{2}\right)})_{xx}, \quad \tau^{(s)} = \begin{vmatrix} f_1^{(s)} & \cdots & f_N^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(s+N-1)} & \cdots & f_N^{(s+N-1)} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$f_i^{(s)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^M a_{ij} E_j^{(s)}(x, y, t), \quad E_j^{(s)}(x, y, t) = e^{\theta_j - is\psi_j},$$

$$\theta_j = -x \sin \psi_j + y \cos \psi_j - t \sin 2\psi_j, \quad j = 1, 2,$$

$$-\pi < \psi_1 < \cdots < \psi_M \leq \pi.$$

(8) 式の $\tau^{(s)}$ は, (9) 式のように定数成分からなる $N \times M$ 行列 A と指数関数項の成分からなる $M \times N$ 行列 $E^{(s)}$ の積の行列式に分解できる:

$$\tau^{(s)} = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1 - is\psi_1} & \cdots & e^{\theta_1 - i(s+N-1)\psi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M - is\psi_M} & \cdots & e^{\theta_M - i(s+N-1)\psi_M} \end{pmatrix} \right| = |A E^{(s)}|. \quad (9)$$

以降, (9) 式における $N \times M$ 行列 A を「 A 行列」, ψ_1, \dots, ψ_M を「パラメーター ψ 」と呼ぶ. (9) 式より, $\tau^{(s)}$ は A 行列とパラメーター ψ によって決定されることが分かる. また, Binet-Cauchy の公式

$$|A B| = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_N \leq M} |A(m_1, \dots, m_N)| |B(m_1, \dots, m_N)|,$$

$A(m_1, \dots, m_N)$: $N \times M$ 行列 A の第 m_1, \dots, m_N 列を抜き出した小行列,
 $B(m_1, \dots, m_N)$: $M \times N$ 行列 B の第 m_1, \dots, m_N 行を抜き出した小行列

を用いて (9) 式の右辺を展開すると

$$\tau^{(s)} = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_N \leq M} |A(m_1, \dots, m_N)| |E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)| \quad (10)$$

となり, さらに $|E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)|$ は

$$|E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)| = (-2i)^{\frac{N(N-1)}{2}} \left(\prod_{j=1}^N e^{-i\psi_{m_j}} \right)^{s + \frac{N-1}{2}} \left(\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \sin \frac{\psi_{m_\beta} - \psi_{m_\alpha}}{2} \right) \prod_{j=1}^N E_{m_j} \quad (11)$$

と展開できる．(10) 式より A 行列はその小行列式が零が非零かによって τ 関数に残る指数関数項を決定していることが分かる．したがって A 行列はソリトン相互作用のパターンを決定している．さらに $N \times M$ の A 行列はグラスマン多様体 $\text{Gr}(N, M)$ 上の点となっていることから，以降 A 行列のサイズが $N \times M$ のソリトンのことを $\text{Gr}(N, M)$ のソリトンと呼ぶことにする．

N -ソリトン解 (8) において， x - y 平面で $[i, j]$ -ソリトンの峰を表す直線は

$$(-\sin \psi_i + \sin \psi_j)x + (\cos \psi_i - \cos \psi_j)y + (-\sin 2\psi_i + \sin 2\psi_j)t = 0 \quad (12)$$

であることから $[i, j]$ -ソリトンは単位円上の点 $(-\sin \psi_i, \cos \psi_i)$ ， $(-\sin \psi_j, \cos \psi_j)$ を結ぶ線分に直交する．したがって図 1 のように DS2 ソリトンのグラフは単位円上の三角形分割された図形と対応がある．

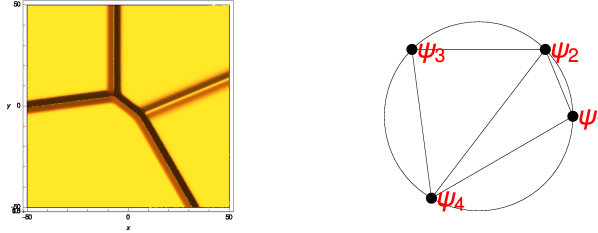


図 1: $\text{Gr}(1, 4)$ のソリトン． $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi)$ ， $t = 5$

これを一般化すると，以下ようになる：

$\text{Gr}(N, M)$ のソリトン解に対応する A 行列とパラメーター ψ に対して，3次元の点の集合

$$\left\{ \Psi_{j_1 \dots j_N} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathbf{v}_{j_m}(t) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_N \leq M \text{ かつ } |A(j_1, \dots, j_N)| \neq 0 \right\} \quad (13)$$

の凸包を考えたとき，その上面を x - y 平面に射影してできる三角形分割された図形とソリトンのグラフが一対一対応する．ただし $\mathbf{v}_{j_m}(t) = (-\sin \psi_{j_m}, \cos \psi_{j_m}, -t \sin 2\psi_{j_m})$ とする．例えば $\text{Gr}(1, 4)$ のソリトンで

$$A = (1, 1, 1, 1), (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi\right), t = 5 \quad (14)$$

の場合を考えると $|A(1)|, |A(2)|, |A(3)|, |A(4)| > 0$ であることから (13) 式の集合は

$$\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\} \quad (15)$$

となる．この集合の凸包をとると上面は図 2 のようになり，それを $z \rightarrow \infty$ から見ると図 3 のような三角形分割された図形が得られ，ソリトンのグラフと一対一対応する．

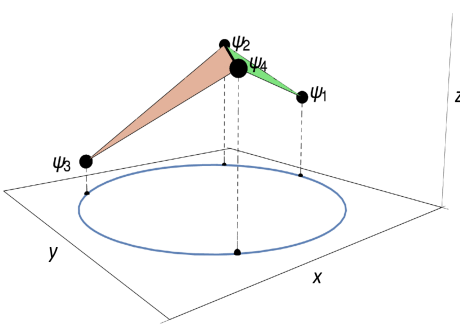


図 2: 凸包の上面

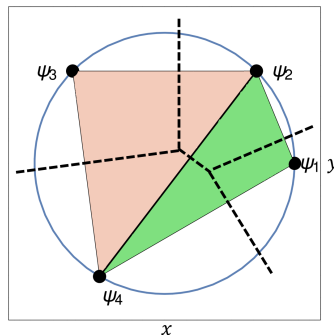


図 3: 凸包の二次元射影

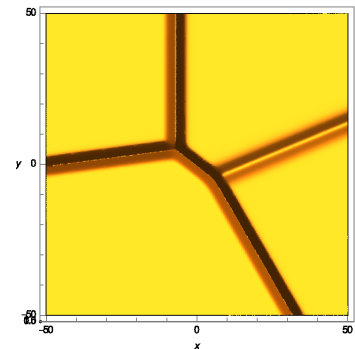


図 4: 対応するソリトンのグラフ ($|u|^2$)

3 DS2 ソリトンのグラフから τ 関数を決定する方法

第1章で述べたように、KP2 ソリトンではソリトンのグラフから τ 関数を決定することができた。しかし DS2 ソリトンでは図5、6のように異なる τ 関数から同じソリトンのグラフが構成できてしまう。

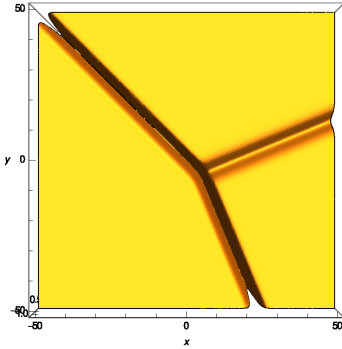


図5: Gr(1,3) のソリトンのグラフ。

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right), t = 5$$

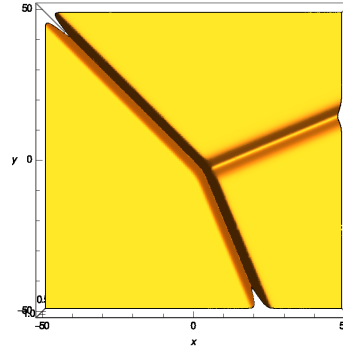


図6: Gr(2,3) のソリトンのグラフ。

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), t = -5$$

これはパラメーター ψ を変えることによりソリトンが回転するためである。このような理由から、今まで DS2 ソリトンのグラフから τ 関数を決定することは困難だった。この問題を解決するため、まずは Gr(1,3) のソリトンと Gr(2,3) のソリトンのグラフの判別を「ソリトンの進行方向」に着目して行う。

3.1 Gr(1,3) と Gr(2,3) のソリトンの進行方向

まず Gr(1,3) の Y 字型ソリトンの進行方向を調べる。状況設定として $t > 0$ でソリトン 1, 2, 3 がそれぞれ角度 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の位置に存在する場合を考える。角度はいずれも y 軸正の部分から反時計回りを正の方向として測り、 $-\pi < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 \leq \pi$ とする。このときソリトンのグラフに対応するパラメーター (ψ_1, ψ_2, ψ_3) が一意に定まり、これらのパラメーターは $-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \leq \pi$ を満たす。

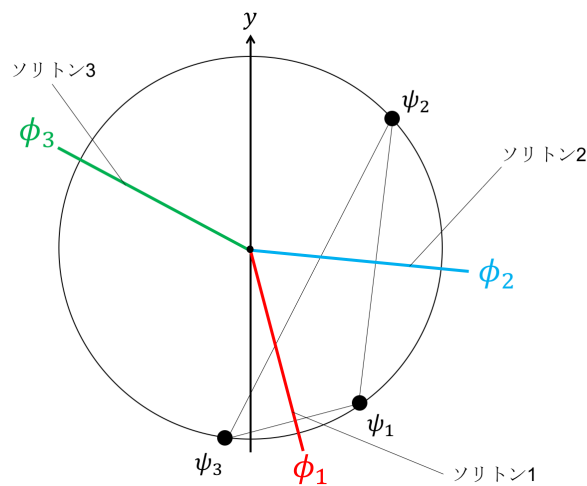


図7: Y字型ソリトンとパラメーター ψ

図 7 の各ソリトンは (12) 式で表されるため、その進行方向は速度

$$-\frac{-\sin 2\psi_i + \sin 2\psi_j}{-\sin \psi_i + \sin \psi_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ かつ } i \neq j) \quad (16)$$

の正負によって決定される。1本のソリトンの進行方向について、各ソリトンの角度を変えながらその符合を調べると図 8 のようになる。この図は着目しているソリトンがどの領域に存在するかで +- (右左) のどちらに進むかを表し、他の 2本のソリトンのなす角が鋭角か鈍角かによって符合が反転する。同様に Gr(2,3) の Y 字型ソリトンについても進行方向を調べると図 9 のような結果が得られ、Gr(2,3) のソリトンは Gr(1,3) のソリトンに対して逆方向に進むことが分かる。以上の結果から、ソリトンの進行方向を調べることでグラフから Gr(1,3) と Gr(2,3) のソリトンの判別が可能である。

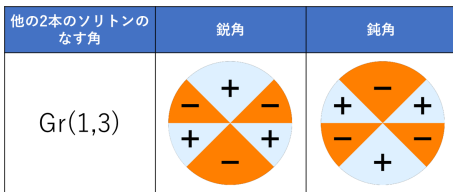


図 8: 進行方向 Gr(1,3)

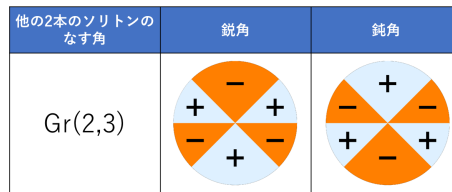


図 9: 進行方向 Gr(2,3)

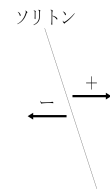


図 10: 進行方向と符合の対応

3.2 DS2 ソリトンの chord 図の構成

ソリトンの進行方向を調べることで Gr(1,3) と Gr(2,3) の判別が可能のため、それぞれのソリトンに対応する chord 図を以下のような手順で構成できる：

1. Y 字型ソリトンの進行方向を調べ、ソリトンが Gr(1,3) か Gr(2,3) かを判別する。
2. Gr(1,3) のソリトンの場合、各ソリトンに直交する辺を持つ三角形を単位円上にプロットする。
3. Gr(2,3) のソリトンの場合、各ソリトンに直交する辺を持つ三角形を 180 度回転させた状態で単位円上にプロットする。
4. 頂点の存在する角度を $-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \leq \pi$ となるように定める。
5. 三角形の頂点を Gr(1,3) なら時計回りに、Gr(2,3) なら反時計回りに辿るよう各辺に矢印をつける。

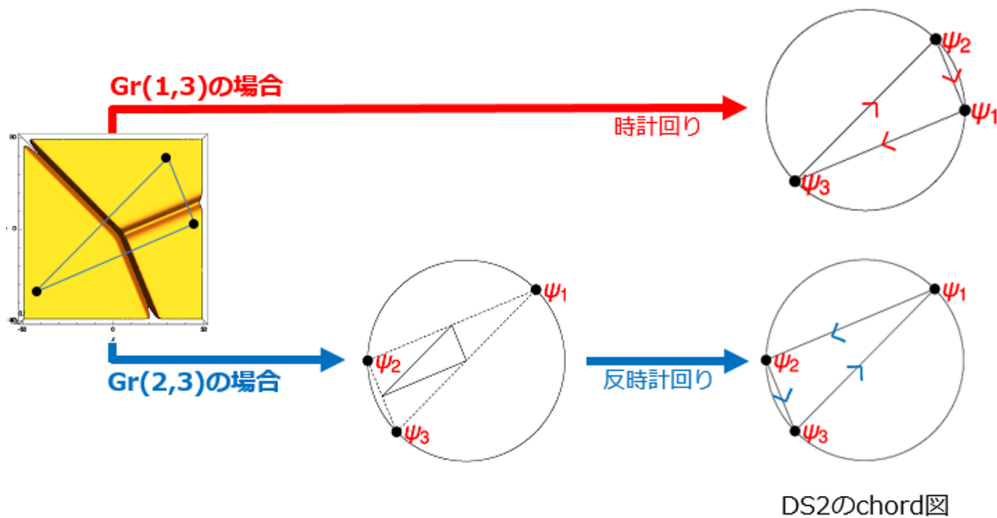


図 11: Gr(1,3) と Gr(2,3) のソリトンに対応する chord 図

この chord 図において，頂点を矢印に沿って辿ることにより置換 π が構成でき，置換からソリトン解の A 行列が得られる．図 11 の $\text{Gr}(1, 3)$ の chord 図に対応する置換は $\pi = (3, 1, 2)$ ， $\text{Gr}(2, 3)$ の chord 図に対応する置換は $\pi = (2, 3, 1)$ であり，これに対応する A 行列はそれぞれ

$$A = (1, a, b), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad (a, b > 0) \quad (17)$$

となる [6, 12]．さらに各頂点に対応する角度が τ 関数のパラメーター ψ の値になっている．図 11 の $\text{Gr}(1, 3)$ の場合では $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ ， $\text{Gr}(2, 3)$ の場合では $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$ である． τ 関数は A 行列とパラメーター ψ によって決定されるため， $\text{Gr}(1, 3)$ と $\text{Gr}(2, 3)$ のソリトンのグラフから対応する τ 関数を決定できる．

3.3 DS2 ソリトンのグラフから τ 関数の決定

上記の議論により構成した $\text{Gr}(1, 3)$ と $\text{Gr}(2, 3)$ のソリトンの chord 図を組み合わせることにより，DS2 ソリトンのグラフから τ 関数を決定できる．例として次のようなソリトンのグラフが与えられている状況を考える．

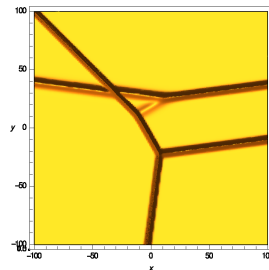


図 12: 与えられたソリトンのグラフ

このグラフに対して次の手順でソリトンの chord 図を構成する：

1. 各ソリトン，および Y 字型ソリトンの交点にラベルをつける．
2. 各 Y 字型ソリトンの進行方向を調べ，各 Y 字型ソリトンに対して局所的な chord 図を構成する．
(→ 今回 Y 文字型ソリトン A, C が $\text{Gr}(1, 3)$ のソリトンで，B が $\text{Gr}(2, 3)$ のソリトンだったとする．)
3. 各 chord 図を同一の単位円上にプロットする．
4. 漸近ソリトンでないソリトンに対応する辺を消去する．

以上の手順から，図 13 のようにソリトン解に対応する置換 π (つまり A 行列) とパラメーター ψ が定まり， τ 関数を決定することができる．また A 行列のサイズから $\text{Gr}(2, 5)$ のソリトンであることも分かる．

4 まとめ

DS2 方程式の dark 型線ソリトンについて，ソリトンの進行方向に着目することで DS2 ソリトンに対応する chord 図の構成に成功した．DS2 ソリトンの chord 図を経由することで DS2 ソリトンのグラフから τ 関数を構成できることが分かった．

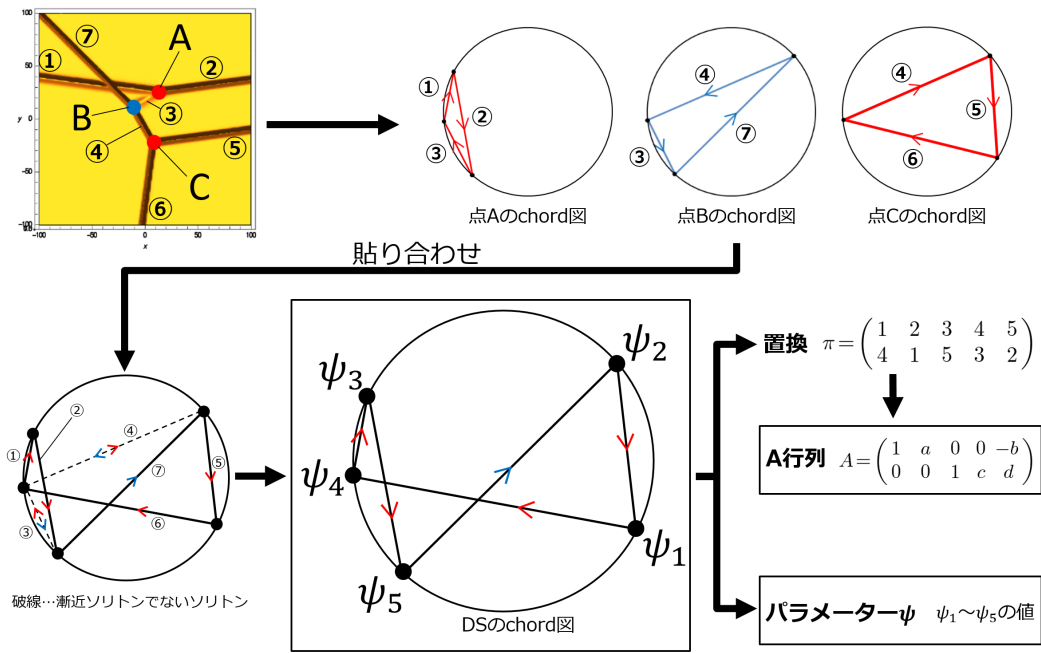


図 13: DS2 ソリトンのグラフから A 行列とパラメーター ψ を決定する手順

参考文献

- [1] J. W. Miles, 1977, J. Fluid Mech., **79**, 157–169.
- [2] J. W. Miles, 1977, J. Fluid Mech., **79**, 171–179.
- [3] G. Biondini, Y. Kodama, 2003, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, 10519.
- [4] Y. Kodama, 2004, J. Phys. A: Math. Gen., **37**, 11169–11190.
- [5] G. Biondini, S. Chakravarty, 2006, J. Math. Phys., **47**, 033514.
- [6] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, J. Phys. A: Math. Theor., **41**, 275209.
- [7] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, Stud. Appl. Math., **123**, 83–151.
- [8] Y. Kodama, M. Oikawa, and H. Tsuji, 2009, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 312001.
- [9] Y. Kodama, 2010, J. Phys. A: Math. Theor., **43**, 434004.
- [10] C-Y. Kao, Y. Kodama, 2012, Math. Comp. Sim., **82**, 1185–1218.
- [11] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2013, J. Phys. A: Math. Theor., **47**, 025201.
- [12] Y. Kodama, 2017, “KP Solitons and the Grassmannians : combinatorics and geometry of two-dimensional wave patterns”, Springer, Singapore.
- [13] A. Davey, K. Stewartson, 1974, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **338**, 101–110.
- [14] D. Anker, N. C. Freeman, 1978, Proc. R. Soc. Lond. A, **360**, 529–540.
- [15] J. Satsuma, M. J. Ablowitz, 1979, J. Math. Phys., **20**, 1496–1503.
- [16] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, 1991, “Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering”, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [17] 永原新, 丸野健一, 2009, 数理解析研究所講究録, **1989**, 94–103.
- [18] N. C. Freeman, 1984, IMA J. Appl. Math., **32**, 125–145.
- [19] R. Hirota, Y. Ohta, and J. Satsuma, 1988, Prog. Theor. Phys. Supp., **94**, 59–72.
- [20] 太田泰広, 1989, 京都大学数理解析研究所講究録, **684**, 1–17.