九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

ソリトンとネットワーク

田中，悠太
早稲田大学基幹理工学研究科

城戸，真弥
早稲田大学基幹理工学部

渡邉，靖之
早稲田大学基幹理工学研究科

筧，三郎
立教大学理学部

他

https://doi.org/10.15017/1957523

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.131-137, 2018-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 20 (pp. 131 - 137)

ソリトンとネットワーク

田中 悠太（Tanaka Yuta），城戸 真弥（Kido Shinya），渡邉 靖之（Watanabe Yasuyuki），筧 三郎（KAKEI Saburo），丸野 健一（Maruno Ken-ichi）

（Received 13 February 2018; Accepted 12 March 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

ソリトンとネットワーク

早稲田大学基幹理工学研究科　田中悠太 (Yuta Tanaka)
早稲田大学基幹理工学部　城戸真弥 (Shinya Kido)
早稲田大学基幹理工学研究科　渡邉靖之 (Yasuyuki Watanabe)
立教大学理学部　筧三郎 (Saburou Kakei)
早稲田大学理工学術院　丸野健一 (Ken-ichi Maruno)

概 要

KP II 方程式のソリトン解はネットワークと密接に関係し，ネットワーク表示などの組み合わせ論的手法を用いてソリトン相互作用の詳細な解析を行うことができることが最近わかってきた．本稿では KP II 方程式と DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示について解説する．特に，DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示の構成法を用いることで KP II 方程式のネットワーク表示が従来の手法に比べて簡単に得られること，そして KP II 方程式のソリトン解のネットワーク表示が与えられた時に KP II 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示が得られることを示す.

1　イントロダクション

Kadomtsev-Petviashvili II(KP II) 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \tag{1}$$

は N-ソリトン解を持ち，それらは Wronskian で表示することができる．最近，KP II 方程式のソリトン相互作用は組み合わせ論的手法を用いることでより深く解析できることがわかってきた [1, 2, 3, 4].

KP II 方程式の拡張の一つとして DKP(coupled KP) 方程式

$$\begin{cases} (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 24(v^+v^-)_{xx} \\ 2v_t^{\pm} + 3uv_x^{\pm} + v_{xxx}^{\pm} \mp 3\left(v_{xy}^{\pm} + v^{\pm}\int^x u_y dx\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

が知られている [5, 6]．DKP 方程式 (2) は $v^+ = v^- = 0$ とした時に KP II 方程式 (1) に一致するので，この方程式は KP II 方程式の全ての解を厳密解として含んでいる．KP II 方程式と DKP 方程式は蜘蛛の巣状パターンを示す spider-web 解のように複雑な相互作用を示すソリトン解を持っている [7, 8].

Chakravarty と Kodama は KP II 方程式のソリトン解の Wronskian 表示に対して Cauchy-Binet の公式を適用し，KP II 方程式のソリトン解の分類に成功した [1]．その後，Kodama らによって KP II 方程式のソリトン解の分類は chord 図，J-diagram[9]，ネットワーク [10] などを用いることで完全置換と対応することが示された [3]．しかしながら，DKP 方程式のソリトン相互作用についての詳細な研究はこれまでほとんどなされていない [11].

本稿では KP II 方程式と DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示について解説する．特に，DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示の構成法を用いることで KP II 方程式のネットワーク表示が従来の手法に比べて簡単に得られること，そして KP II 方程式のソリトン解のネットワーク表示が与えられた時に KP II 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示が得られることを示す.

2　KP II 方程式の τ 関数とネットワーク

KP II 方程式 (1) は従属変数変換 $u(x,y,t) = 2\left(\log\tau(x,y,t)\right)_{xx}$ によって双線形方程式

$$\left(D_x^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2\right)\tau\cdot\tau = 0 \tag{3}$$

に変形され，この双線形方程式 (3) は Wronskian 解

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix},$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \tag{4}$$

を持つ．特に分散関係式 (4) を満たす f_i として

$$f_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y + k_j^3 t \qquad (k_1 < k_2 < \cdots < k_M, \quad N < M)$$

を考えると τ 関数は

$$\begin{aligned} \tau &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1} e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1} e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right| \\ &=: \left| \hat{A} E \right| \end{aligned}$$

と表され，これは KP II 方程式 (1) のソリトン解になる．$\hat{A}$ 行列のサイズが $N \times M$ の時，$\mathrm{Gr}(N, M)$ の解であるという．この表示によって得られる τ 関数は Cauchy-Binet の公式を用いて以下のように展開される:

$$\tau = \left| \hat{A} E \right| = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_N \le M} \left| \hat{A}_{i_1, \ldots, i_N} \right| \left| E^{i_1, \ldots, i_N} \right|. \tag{5}$$

ただし，$\hat{A}_{i_1, \ldots, i_N}$ は行列 $\hat{A}$ の $i_1, \ldots, i_N$ 列を抜き出した小行列を表し，$E^{i_1, \ldots, i_N}$ は行列 E の $i_1, \ldots, i_{2n}$ 行を抜き出した小行列を表す．また，$\hat{A}$ 行列は次の 2 条件を満たしているものとする:

- $\hat{A}$ 行列の $N \times N$ 小行列式が全て非負である．(totally non-negative, TNN)
- $\hat{A}$ 行列を行基本変形で階段行列にした時，全ての行のピボット以外の成分および全ての列に非零の成分が存在する．(reduced row echelon form, RREF)

ここで 1 つ目の条件は Cauchy-Binet の公式から τ 関数が零点を持たない，つまりもとの従属変数 u が特異点を持つような非物理的な解でないことに対応し，2 つ目の条件はゲージ変換を含めて本質的に指数関数が M 個全て残ることに対応している．

$\hat{A}$ 行列は次の手順でも得られる:

1. 高さ N，幅 $M - N$ の Young 図形の中に次の条件を満たすように $y_i(p_j), s_i$ を入れる:
   - s が入った箱があった場合，その箱より上の箱全て，もしくはその箱より左の箱全てに s が入っている．
   - s が入った箱のみの行および列が存在しない．

   ただし，y_i, s_i の添字は
   - 一番右上の箱の添字は 1
   - 右または上に箱があればその添字 +1

で決定され，各パラメータ p_j は全て正とする．

2. Young 図形の一番下の行から，同じ行の中では一番右の箱から順に図 1 のようにネットワークに置き換え，右につなげていく．

3. ネットワーク上に振られている数字をその経路の重み (何も書かれていない場合は重み 1) と考え，ネットワークの左の番号 i から右の番号 j への全ての経路の重みの和を $M \times M$ 行列 A の第 $M-i+1, M-j+1$ 成分とする．

4. 次の操作で $M \times M$ 行列 A から $N \times M$ 行列 $\hat{A}$ を得る:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{MN} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

手順 1 は完全置換やそれに対応するJ-diagram を考えていることと等価である．以下，ネットワークは手順 3 で得られる行列と同一視する．

図 1: y_i, s_i とネットワークの対応

例えば，図 2 の例は手順 2 によって図 3 のネットワークになり，対応する $A, \hat{A}$ 行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_3p_5 & p_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} p_3p_5 & p_5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．このようにして得られた $\hat{A}$ 行列は必ず TNN かつ RREF になる [1, 2, 3, 4].

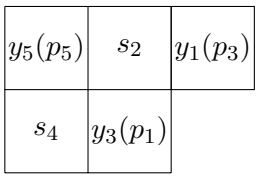


図 2: 手順 1 の例

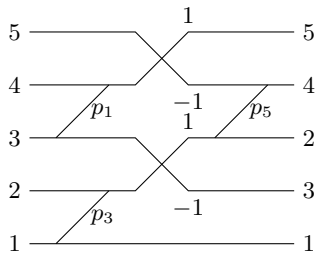
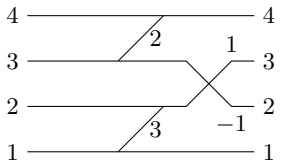


図 3: 図 2 に対応するネットワーク

KP II 方程式のネットワークとソリトン相互作用の対応の例として O 型，P 型，T 型の 2-ソリトン相互作用をあげる:

$A =$ 

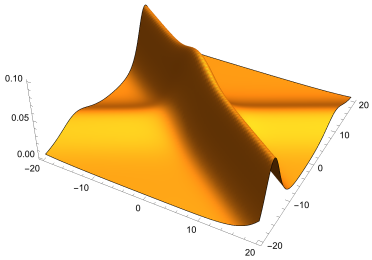
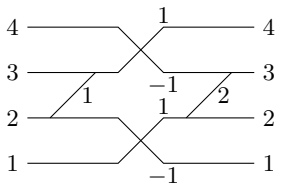
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 

図 4: O 型相互作用に対応するネットワークとソリトングラフ

$A =$ 

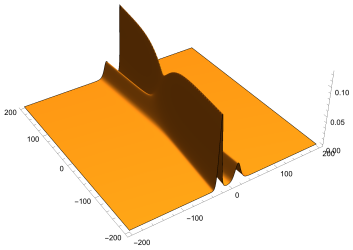
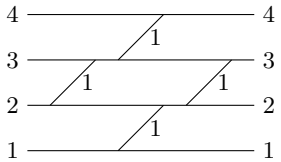
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

図 5: P 型相互作用に対応するネットワークとソリトングラフ

$A =$ 

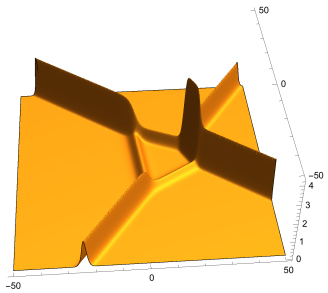
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 

図 6: T 型相互作用に対応するネットワークとソリトングラフ

3 DKP 方程式のネットワークと KP II 方程式

DKP 方程式 (2) は従属変数変換 $u = 2(\log \tau_n)_{xx}, v^{\pm} = \tau_{n\pm1}/\tau_n$ によって双線形方程式

$$\begin{cases} (-4D_xD_t + D_x^4 + 3D_y^2)\tau_n \cdot \tau_n = 24\tau_{n-1}\tau_{n+1} \\ (2D_t + D_x^3 \mp 3D_xD_y)\tau_{n\pm1} \cdot \tau_n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

に変形され，この双線形方程式 (6) は Wronski 型 Pfaffian 解

$$\begin{aligned} &\tau_n = \mathrm{Pf}[\mathcal{Q}_n] = \sum_{\Omega} \sigma(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) Q_{i_1,j_1} Q_{i_2,j_2} \ldots Q_{i_n,j_n}, \\ &\mathcal{Q}_n = (Q_{i,j})_{1 \le i,j \le 2n}, \\ &\frac{\partial}{\partial t_k} Q_{i,j} = Q_{i+k,j} + Q_{i,j+k} \quad (t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t) \end{aligned} \tag{7}$$

を持つ [6]．ただし，$\mathcal{Q}_n$ は $2n$ 次反対称行列，$\Omega = \{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le 2n,\ i_k < j_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ であり，

$$\sigma(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) = \mathrm{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_n & j_n \end{pmatrix}$$

である．ここで，$\mathcal{Q}_n$ を M 次反対称パラメータ行列 $B \quad (M > 2n)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n &= \mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top, \\
\mathcal{E}_n &= \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_M \\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & \cdots & E_M^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^{(2n-1)} & E_2^{(2n-1)} & \cdots & E_M^{(2n-1)} \end{pmatrix}, \\
E_i^{(j)} &= {k_i}^j \exp(k_i x + k_i^2 y + k_i^3 t)
\end{aligned}
$$

と選ぶとこれは分散関係式 (7) を満たす．この表示によって得られる τ 関数は石川・若山の Pfaffian の和公式を用いて以下のように展開される [11]:

$$
\tau_n = \mathrm{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top] = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{2n} \le M} \mathrm{Pf}[B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}] \det[(\mathcal{E}_n)_{i_1,\ldots,i_{2n}}]. \tag{8}
$$

ただし，$B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}$ は行列 B の $i_1,\ldots,i_{2n}$ 行および $i_1,\ldots,i_{2n}$ 列を抜き出した小行列を表し，$(\mathcal{E}_n)_{i_1,\ldots,i_{2n}}$ は $\mathcal{E}_n$ の $i_1,\ldots,i_{2n}$ 列を抜き出した小行列を表す．このように展開した時，全ての $\mathrm{Pf}[B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}]$ が非負であればこれはソリトン解を与える．

式 (8) の τ 関数のパラメータ行列 B が与えられた時，そこから対応するネットワークを得る方法を説明する．そのためにまず次のような $M \times M$ 行列を導入する:

$$
J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & q_1 & & & \\ -q_1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & 0 \quad q_l & \\ & & & -q_l \quad 0 & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right)_{M\times M}.
$$

このような $J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l)$ を M 次反対称行列の標準形と呼ぶことにする．さらに，図 1 に加えて図 7 のように定義した $x_i(p), y_i(p), s_i$ の積で表される行列 A を用いて

$$
A^{-1}B(A^{-1})^\top = J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l) \Leftrightarrow B = A J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l) A^\top
$$

の形にすることを反対称行列 B の標準化と呼ぶことにする．

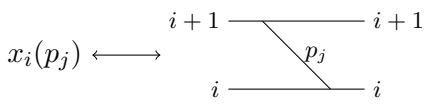


図 7: x_i とネットワークの対応

この時，行列 A はその構成方法からネットワークで表すことができる．例えば，

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} A^\top, \\
A &= x_3(1)x_1(1)x_2(1)x_2(-1/2)
\end{aligned}
$$

に対応するネットワークは図 8 である．

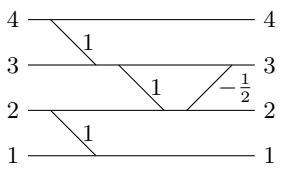
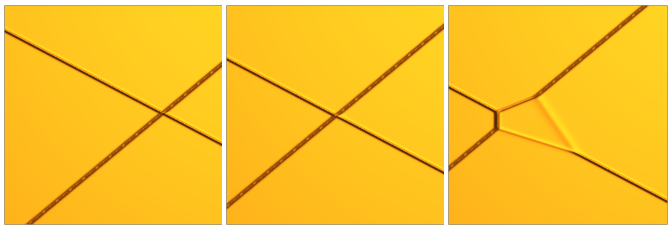


図 8: DKP 方程式のネットワークの例



$t<0$　　$t=0$　　$t>0$

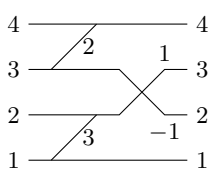
図 9: 図 8 に対応する相互作用

特に，反対称パラメータ行列 B を標準化した時に標準形 $J_M^{(2l)}$ のブロックの個数 l が n に等しいならば，石川・若山の Pfaffian の和公式と Pfaffian の性質から $\tau_{n+1}=0$ となるので τ_n は KP II 方程式の双線形形式 (3) の解になる．このことから，DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian 解が KP II 方程式の解にもなっている場合，上手く A 行列をとることで KP II 方程式の解析で現れるネットワークと同様のネットワークが得られることがわかる．つまり，DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian 解が KP II 方程式の解になっているかを確かめるには反対称パラメータ行列 B の標準化を行えばよく，その過程で自然とネットワーク表示 A が現れる．この方法を用いることによって，従来の手法のように完全置換やJ-diagram を経由することなく KP II 方程式のソリトン解に対応するネットワーク表示が得られる．

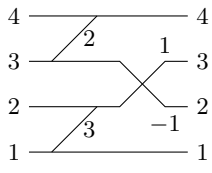
以上の手順を逆に辿ることで，KP II 方程式のソリトン解のネットワークが与えられた時，そこから Wronski 型 Pfaffian 表示が得られるので，その方法を説明する．まず，$M\times M$ 行列 A を

$$A=\begin{cases}\text{“ネットワーク”} & (\mathrm{Gr}(2n,M)\text{ のネットワークの場合})\\ \text{“ネットワークの上に行を 1 つ追加したもの”} & (\mathrm{Gr}(2n-1,M-1)\text{ のネットワークの場合})\end{cases}$$

とする．例えば，Gr(2,4)，Gr(1,3) の場合は次のようになる:



$$\longrightarrow\quad A=$$



$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&3&0&1\end{pmatrix}$$

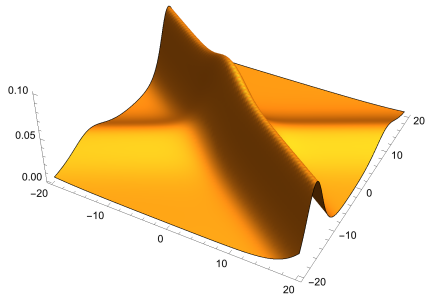
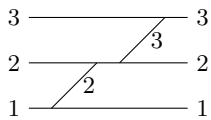
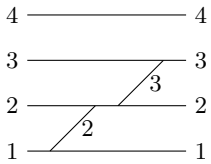


図 10: O 型相互作用 (Gr(2,4)) のネットワークからの対応する A 行列の構成



$$\longrightarrow\quad A=$$



$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3&1&0\\0&6&2&1\end{pmatrix}$$

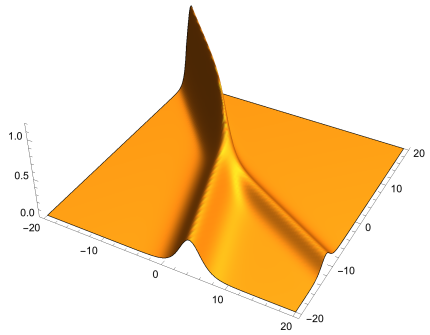


図 11: Y 字型相互作用 (Gr(1,3)) のネットワークからの対応する A 行列の構成

こうして得られた A 行列を用いて

$$B = AJ_M^{(2n)}(1,\ldots,1)A^\top$$

と定めると

$$\tau_n = \mathrm{Pf}[\mathcal{E}_n B \mathcal{E}_n^\top] = \det[\hat{A}E]$$

として τ 関数の Wronski 型 Pfaffian 表示が得られる．

4　まとめ

本稿では KP II 方程式と DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示について解説した．DKP 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示に対して反対称行列の標準化を行うことで，DKP 方程式のソリトン解に対するネットワーク表示を得ることができる．また，KP II 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示を考えることにより，KP II 方程式のソリトン解に対応するネットワーク表示を従来の手法に比べて簡単に得ることができる．このことを用いることによって KP II 方程式のソリトン解のネットワーク表示が与えられた時にソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示が構成できる．

参考文献

[1] S. Chakravarty, Y. Kodama, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 275209.

[2] S. Chakravarty, Y. Kodama, Stud. Appl. Math. **123** (2009) 83-151.

[3] Y. Kodama, L. K. Williams, PNAS. **108** (2011) 8684-8989.

[4] Y. Kodama, *KP Solitons and the Grassmanians – Combinatorics and Geometry of Two-Dimensinal Wave Patterns* (Springer, Singapore, 2017).

[5] M. Jimbo, T. Miwa, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **19** (1983) 943-1001.

[6] R. Hirota, Y. Ohta, J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1990) 798-809.

[7] S. Isojima, R. Willox and J. Satsuma, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 9533-9552.

[8] G. Biondini, Y. Kodama, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 10519-10536.

[9] A. Postnikov, arXiv:math/0609764 (2006).

[10] 高崎金久, 線形代数とネットワーク (日本評論社, 東京, 2017).

[11] Y. Kodama, K. Maruno, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 4063-4086.