Symplectic行列束と歪直交多項式

三木, 啓司
気象大学校

https://doi.org/10.15017/1957522

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.125-130, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 19 (pp. 125 - 130)

Symplectic 行列束と歪直交多項式

三木 啓司（**MIKI Hiroshi**）

（Received 11 January 2018; Accepted 15 March 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

Symplectic 行列束と歪直交多項式

気象大学校　三木 啓司 (MIKI Hiroshi)

概　要　歪直交多項式と呼ばれる反対称内積に対する直交性を有する多項式について，特殊な対称性を満たすクラスを導入する．導入したクラスの歪直交多項式の性質を調査し，シンプレクティック行列束との対応について議論する．

1　はじめに

直交多項式に代表される直交関数系は，可積分系にとどまらず数理物理の多くの分野に現れる [1]．その中でも鍵となる性質が，有限の項間で成立する隣接関係式である．例えば，直交多項式は三項間漸化式を満たすことが知られており，これは出生死滅過程などに現れる三重対角行列の固有ベクトルとして，直交多項式列が自然と現れることを意味している．

本稿では，ランダム行列の理論において直交・シンプレクティックアンサンブルの相関関数の計算に現れる歪直交多項式 [2, 3] に注目する．歪直交多項式は主に DKP 方程式などの可積分系との対応が知られている [4, 5]．しかしながら，一般の歪直交多項式に対しては上に述べたような有限の項間の隣接関係式が成立しないことが知られている．しかし，[6] において特殊な対称性を有するクラスについては隣接関係式が成立することが指摘されている．ここでは，別の対称性を持つ歪直交多項式を導入し，その性質等について議論を行っていく．

2　歪直交多項式

双線型 2 次形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}$ で，反対称性

$$\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$$

を満たすものを (内積の公理そのものは満たさないが) 反対称内積という．歪直交多項式は，反対称内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に対して次の直交性を満たす多項式列 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ として定義される：

$$\begin{aligned}&\langle q_{2m}(x), q_{2n+1}(x)\rangle = r_n\delta_{mn} \quad (\exists r_n \neq 0),\\ &\langle q_{2m}(x), q_{2n}(x)\rangle = \langle q_{2m+1}(x), q_{2n+1}(x)\rangle = 0 \quad (m, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\\ &\deg(q_n(x)) = n.\end{aligned} \tag{2.1}$$

直交多項式はハンケル行列式表示を持つことが知られているが，歪直交多項式はパフィアン表示を持つ．

命題 1. 反対称内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に対する歪直交多項式 $\{q_n(x)\}_{x=0}^{\infty}$ は以下のように書ける：

$$\begin{aligned}q_{2n}(x) &\propto \mathrm{Pf}(0, 1, \cdots, 2n, x),\\ q_{2n+1}(x) &\propto \mathrm{Pf}(0, 1, \cdots, 2n-1, 2n+1, x) + \gamma_n q_{2n}(x).\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで，$F_n = \{\sigma\in S_{2n} \mid \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1), \sigma(2i-1) < \sigma(2i)\}$ としたとき，$\mathrm{Pf}(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$ は以下で定まるパフィアンである．

$$\mathrm{Pf}(a_1, a_2, \cdots, a_{2n}) = \sum_{\sigma\in F_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{Pf}(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)})\mathrm{Pf}(a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)})\cdots\mathrm{Pf}(a_{\sigma(2n-1)}, a_{\sigma(2n)}),$$

$$\mathrm{Pf}(i, j) = \left\langle x^i, x^j\right\rangle, \quad \mathrm{Pf}(i, x) = x^i.$$

注. パフィアン $\mathrm{Pf}(0,1,\cdots,2n-1)^2$ は反対称行列 $A=(\langle x^i,x^j\rangle)_{0\le i,j\le 2n-1}$ の行列式の値に等しい．また，

$$\mathrm{Pf}(0,1,\cdots,2n-1)=\begin{vmatrix}\mathrm{Pf}(0,1) & \mathrm{Pf}(0,2) & \cdots & \mathrm{Pf}(0,2n-1)\\ & \mathrm{Pf}(1,2) & \cdots & \mathrm{Pf}(1,2n-1)\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \mathrm{Pf}(2n-2,2n-1)\end{vmatrix}$$

と書くこともある．

パフィアン表示を見れば分かるように，奇数次の歪直交多項式には不定性が存在する．そのため，一般の歪直交多項式に対する隣接関係式の議論を行うことは困難である．

3　特殊な対称性を持つ歪直交多項式

先ほど述べたように，一般の歪直交多項式について隣接関係式の議論を進めることは難しいが，特定のクラスに対しては可能になる．例えば，反対称内積として

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int(f(x)g(-x)-f(-x)g(x))d\rho(x)$$

を選んだ場合の歪直交多項式は隣接関係式を満たし，シンプレクティック行列を初期値としたときの SR アルゴリズムに深く関係している [6].

本稿では，新たに反対称内積

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int(f(x)g(x^{-1})-f(x^{-1})g(x))d\rho(x) \tag{3.1}$$

を導入し，上記の反対称内積に対応する歪直交多項式について考える．このとき，先ほど導入したパフィアンについて，例えば以下のような性質が成り立つことが分かる：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}(i_1+k,i_2+k,\cdots,i_{2n}+k)=\mathrm{Pf}(i_1,i_2,\cdots,i_{2n}),\\&\mathrm{Pf}(i_1+k,i_2+k,\cdots,i_{2n-1}+k,x)=x^k\mathrm{Pf}(i_1,i_2,\cdots,i_{2n-1},x)\quad(i_1,i_2,\cdots,i_{2n},k\in\mathbb{Z}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

以降では (2.1) における直交定数を $r_n=1$ と規格化する．さらに，(2.2) の不定パラメーターを $\gamma_n=0$ と選び，$q_{2n}(x)$ および $q_{2n+1}(x)$ の最高次の係数が等しくなおかつ正であるとする．このようにすることで，対応する歪直交多項式列 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は一意に定まる．これを正規歪直交多項式と呼ぶ．ここで導入した反対称内積に対応する正規歪直交多項式について，隣接関係式が成立する．

定理 2. 反対称内積 (3.1) に対する正規歪直交多項式 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{aligned}x(q_{2n+1}(x)-\alpha_{n+1}q_{2n}(x))&=\beta_{n+1}q_{2n+2}(x)-q_{2n}(x),\\x(q_{2n}(x)-\beta_nq_{2n-2}(x))&=q_{2n+1}(x)-\alpha_nq_{2n}(x).\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで，α_n,β_n はそれぞれ，$\tau_n=\mathrm{Pf}(0,1,\cdots,2n-1),\sigma_n=\mathrm{Pf}(0,1,\cdots,2n-2,2n)$ としたとき

$$\alpha_n=\frac{\sigma_n}{\tau_n},\quad\beta_n=\sqrt{\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}}.$$

Proof. 行列式のプリュッカー関係式・ヤコビの恒等式に相当するパフィアンに関する恒等式 [7, 8]

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n})\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, b, c, d, e)\\
&= \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, b, c)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, d, e) - \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, b, d)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, c, e)\\
&+ \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, b, e)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n}, c, d),\\
&\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, a)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, b, d, e)\\
&= \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, b)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, a, d, e) - \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, d)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, a, b, e)\\
&+ \mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, e)\mathrm{Pf}(i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}, a, b, d)
\end{aligned}
$$

を利用する．上記の恒等式に $i_k = k, a = 2n, b = 2n+1, c = 2n+2, d = 0, e = x$ を代入し，性質 (3.2) および正規歪直交多項式のパフィアン表示

$$
q_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau_n \tau_{n+1}}}\mathrm{Pf}(0, 1, \cdots, 2n, x), \quad q_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau_n \tau_{n+1}}}\mathrm{Pf}(0, 1, \cdots, 2n-1, 2n+1, x)
$$

を用いることで所望の結果を得る． □

式 (3.3) に対して，奇数次の項を消去すると，偶数次のみに関する関係式

$$
(x^2+1)q_{2n}(x) = \beta_{n+1}q_{2n+2}(x) + x(\alpha_{n+1} - \alpha_n)q_{2n}(x) + x^2\beta_n q_{2n-2}(x)
$$

が得られる．偶数次の歪直交多項式は奇数次のような不定性もなく，定数倍を除いて反対称内積に対して一意に定まる．さらに，新しい関数列

$$
R_n(x) = x^{-n}q_{2n}(x) \tag{3.4}
$$

により導入すると，先ほどの関係式は

$$
\left(x + \frac{1}{x}\right)R_n(x) = \beta_{n+1}R_{n+1}(x) + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)R_n(x) + \beta_n R_{n-1}(x)
$$

と書き直すことができる．さらに，

$$
R_0(x) = q_0(x) \propto 1, \quad R_1(x) = x^{-1}q_2(x) \propto \mathrm{Pf}(0,1)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \mathrm{Pf}(0,2).
$$

これは，$y = x + \frac{1}{x}$ と思うと，$R_n(x)$ は y についての n 次多項式であり，上記の式は直交多項式の満たす三項間漸化式になっている．以上のことをまとめると，次のことがしたがう．

定理 3. $y = x + \frac{1}{x}$ として，y に関する n 次多項式 $\{R_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ を式 (3.4) により導入すると，$\{R_n(y)\}$ は直交多項式でありその直交性は，

$$
\int R_n(y)R_m(y)\left(\frac{1}{x} - x\right)d\rho(x) = \delta_{mn}
$$

で与えられる．

Proof. (正規) 歪直交性から，$m \geq n$ のとき，

$$
\left\langle q_{2m}(x), x^{m-n+1}q_{2n}(x)\right\rangle = \delta_{mn}
$$

がしたがうことが分かる．この式に対して，(3.4) および反対称内積 (3.1) を代入すると，

$$
\left\langle x^m R_m(y), x^{m+1}R_n(y)\right\rangle = \int R_n(y)R_m(y)(x^{-1} - x)d\rho(x) = \delta_{mn}
$$

を得る．$m \leq n$ の場合も同様の議論を行えばよい． □

このように，反対称内積 (3.1) に対する歪直交多項式は直交多項式と密接な関係にあることが明らかとなった．さらに，直交多項式はハンケル行列式表示を用いた表現を持つことが知られており，その事実から次のパフィアンと行列式の間の非自明な関係式が導かれる．

系 4. $c_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right) \mu_{n-2k}$ としたとき，全ての自然数 n について次の恒等式が成立する：

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{2n-2} \\ & \mu_0 & \cdots & \mu_{2n-3} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_0 \end{matrix}\right| = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \\
&\left|\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{2n-3} & \mu_{2n-1} \\ & \mu_0 & \cdots & \mu_{2n-4} & \mu_{2n-2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \mu_0 & \mu_2 \\ & & & & \mu_1 \end{matrix}\right| = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-2} & c_n \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \cdots & c_{2n-3} & c_{2n-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

4　対応するシンプレクティック行列束

直交多項式は三重対角行列を対角化することが知られているが，基本的に現れる行列のサイズは半無限である．ところが内積の空間の自由度を有限にすることで行列のサイズも有限になる．そこで，反対称内積 (3.1) を N 次元空間に制限した

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{s=1}^{N} (f(x_s) g(x_s^{-1}) - f(x_s^{-1}) g(x_s)) w_s$$

を考える．このとき，歪直交多項式列は $\{q_n(x)\}_{n=0}^{2N-1}$ になり，隣接関係式 (3.3) も $n = 0, 1, \cdots, N-1$ までの範囲で成立する．$2N$ 次元ベクトル $\boldsymbol{q} = (q_0(x), q_2(x), \cdots, q_{2N-2}(x), q_1(x), q_3(x), \cdots, q_{2N-1}(x))^T$ を導入すると，関係式 (3.3) は，次の一般化固有値問題に書き直すことが出来る：

$$x A_{2N} \boldsymbol{q} = B_{2N} \boldsymbol{q}, \quad A_{2N} = \begin{pmatrix} F & O \\ -G_1 & I_N \end{pmatrix}, \quad B_{2N} = \begin{pmatrix} -G_0 & I_N \\ -F^T & O \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

ここで，I_N は N 次単位行列，O は零行列であり，F および G_i $(i = 1, 2)$ は以下で定義される N 次正方行列である．

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\beta_1 & 1 & & & \\ & -\beta_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\beta_{N-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad G_i = \mathrm{diag}(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{i+N-1}) \quad (\alpha_0 = 0).$$

一般化固有値問題 (4.1) に現れる行列束 (A_{2N}, B_{2N}) は歪直交多項式に特殊な対称性を課しているため，特徴的な構造を持っており，さらには直交多項式との対応関係から三重対角行列とも関係する．これらを述べたのが次の定理である．

定理 5. 行列束 (A_{2N}, B_{2N}) はシンプレクティック行列束をなす．すなわち，関係式

$$A_{2N} J_{2N} A_{2N}^T = B_{2N} J_{2N} B_{2N}^T, \quad J_{2N} = \begin{pmatrix} O & I_N \\ -I_N & O \end{pmatrix}$$

が成立する．このとき，(A_{2N}, B_{2N}) の一般化固有値の一つを λ とするとき，λ^{-1} も一般化固有値である．これらの一般化固有値を $\lambda_i, \lambda_i^{-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ と書いたとき，三重対角行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-1} - \alpha_{N-2} & \beta_{N-1} \\ & & & \beta_{N-1} & \alpha_N - \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

の固有値 μ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ との間に，

$$\mu_i = \lambda_i + \lambda_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.3}$$

が成立する．

上記の定理から，歪直交多項式は（あるクラスの）シンプレクティック行列束の一般化固有値問題を対角化することがわかり，この一般化固有値問題は三重対角化行列の固有値問題と等価であることが分かった．シンプレクティック行列束の問題は一般に複素数が一般化固有値として現れるため，この問題をそのまま数値解法で求めようとすると，特に精度面で疑問が出てしまう．実際に，MAPLE を用いて数値計算を行ったところ，図 1 左のように「自身が固有値なら逆数も固有値である」というシンプレクティック行列束の性質が反映されていない結果が出ている．

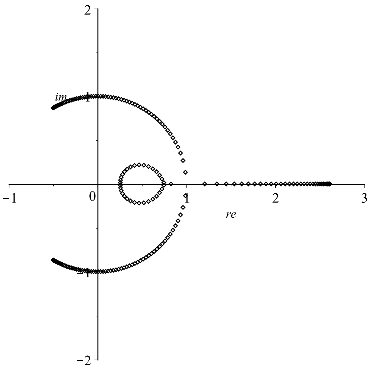
dqds 法などの実対称三重対角行列用の数値解法は高速・高精度なことが知られている [9] ため，先ほどの定理を利用することで，シンプレクティック行列束 (A_{2N}, B_{2N}) に対する高精度（かつ高速）な数値解法を提案することができる．具体的な手順としては，次のようにすればよい：

(i). シンプレクティック行列束 (A_{2N}, B_{2N}) から，三重対角行列 (4.2) を構成する．

(ii). 構成した三重対角行列の固有値 μ_i $(i = 1, \cdots, N)$ を数値解法により計算する．

(iii). 求めた固有値から関係式 (4.3) により，一般化固有値 $\lambda_i, \lambda_i^{-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を求める．

この提案手法を用いて，実際に MAPLE 上で数値計算を行ったところ図 1 右のような結果が得られ，さきほどの一般化固有値を直接求めた場合と比べて，シンプレクティック行列束の性質が反映された結果となっている．



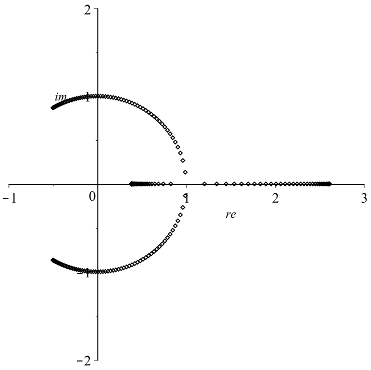


図 1: 数値計算により求めた $N = 100, \alpha_i = i, \beta_i = 1$ における行列束 (A_{2N}, B_{2N}) の一般化固有値分布 (左：MAPLE の LinearAlgebra パッケージの Eigenvalues コマンドを使用．右：提案手法．(4.2) の固有値計算は Eigenvalues コマンドを使用)

5　まとめ

本稿では，特殊な対称性を持つ反対称内積 (3.1) を導入し，対応する歪直交多項式が隣接関係式を持ち，直交多項式とも関係することを示した．この関係からあるパフィアンとハンケル行列式の間の非自明な関係式 (3.5) を導き，さらには対応するシンプレクティック行列束の一般化固有値と三重対角行列の固有値との間の関係式も明らかにした．この事実に基づくことで，(4.1) の一般化固有値を高精度に計算可能な数値計算法を提案した．しかしながら，求めた行列束は形が特殊であるため，現時点では使える状況が非常に限られてしまう．シンプレクティック行列束は制御理論の問題に現れ，一般のシンプレクティック行列束は Butterfly-form と呼ばれる形に相似変形できることが知られている [10]．Butterfly-form と今回導入したシンプレクティック行列束は非常によく似た形をしているため，両者の関係および一般のシンプレクティック行列束との対応を明らかにしていくことが今後の課題である．また，パフィアン・行列式は組み合わせ論でも重要な対象であり [11]，得られた関係式 (3.5) の組み合わせ論的な解釈も興味深い問題である．

参考文献

[1] 前田 一貴, 三木 啓司, 辻本 諭: “直交多項式理論からみえてくる可積分系”, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013) 341–380.

[2] F. Dyson: “A class of matrix matrix ensembles”, J. Math. Phys. **13** (1972) 90–97.

[3] 永尾 太郎: “ランダム行列の基礎”, 東京大学出版会, 2005.

[4] M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke: “The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials”, Int. Math. Res. Not. **1999** (1999) 569–588.

[5] Hiroshi Miki, Hiroaki Goda and Satoshi Tsujimoto: “Discrete Spectral Transformations of Skew Orthogonal Polynomials and Associated Discrete Integrable Systems”, SIGMA **8** (2012) 008.

[6] Y. Kodama and V. Pierce: “The Pfaff lattice on symplectic matrices”, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 055206.

[7] D. Knuth: “Overlapping Pfaffians” Electron. J. Combin. **3** (1996), no. 2, R5, 13 pages

[8] Y. Ohta: “Special solutions of discrete integrable systems, in Discrete Integrable Systems”, Lecture Notes in Phys., Vol. 644, Springer, Berlin, 2004, 57–83.

[9] 中村 佳正: “可積分系の機能数理”, 共立出版, 2006.

[10] P. Benner and H. Faßbender: “The symplectic eigenvalue problem, the butterfly form, the SR algorithm, and the Lanczos method”, Lin. Alg. Appl. **275**-**276** (1998) 19–47.

[11] 石川 雅雄, 岡田 聡一: “行列式・パフィアンに関する等式とその表現論，組合せ論への応用”, 数学 **62**(1) (2010) 85–114